УДК 513.88

ВУ КУОК ФОНГ, Ю. И. ЛЮБИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУГРУПП

В настоящей статье развивается основной результат работы [1]. Напомним основные определения и факты спектральной теории представлений, используемые далее (подробности см. в [2, 3]).

Пусть S — топологическая абелева полугруппа с единицей e, T — ее ограниченное* представление в комплексном банаховом пространстве B. Характер χ полугруппы S (полуунитарный, но необязательно унитарный) называется квазивесом представления T, если существует такая направленность $\{x_\nu\} \subset B$ (квазивесовая направленность), что $\|x_\nu\| = 1$ для всех ν и

$$\lim_{\nu} \|T(s)x_\nu - \chi(s)x_\nu\| = 0 \quad (s \in S). \tag{1}$$

Множество всех квазивесов представления T называется его аппроксимативным спектром (короче, a-спектром) и обозначается $\operatorname{spec}_a T$.

Если представление T равномерно (т. е. по норме операторов) непрерывно**, то 1) его a-спектр непуст; 2) $\operatorname{spec}_a T \subset \operatorname{spec}_\delta T \subset \widehat{S}$, где

* Т. е. $\sup_s \|T(s)\| < \infty$. Не умаляя общности, можно далее принять $\|T(s)\| \leqslant 1$.

** По определению представление должно быть лишь сильно непрерывным.

$\hat{S}$ — полугруппа полуунитарных характеров на S, $\mathrm{spec}_\delta T$ (δ-спектр) — пространство максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры, порождаемой всеми $T(s)$; включения определяются некоторыми естественными инъекциями; 3) все унитарные характеры $\chi \in \mathrm{spec}_\delta T$ принадлежат $\mathrm{spec}_a T$.

Лемма 1. *Пусть представление T равномерно непрерывно, $L \underset{\neq}{\subset} B$ — инвариантное для T подпространство, T/L — соответствующее представление в фактор пространстве B/L. Тогда все унитарные характеры из $\mathrm{spec}_a(T/L)$ принадлежат $\mathrm{spec}_a T$.*

Для доказательства достаточно воспользоваться изложенными выше фактами и очевидным включением $\mathrm{spec}_\delta(T/L) \subset \mathrm{spec}_\delta T$.

Превратим S в направленное множество, полагая $s \geqslant t$, если s делится на t. Представление T называется асимптотически почти периодическим (а. п. п.), если каждая поднаправленность направленности $\{T(s)\}$ содержит сильно сходящуюся поднаправленность. Этот класс шире класса п. п. представлений, определяемых как такие, для которых орбита $O(x) = \{T(s)x\}$ каждого вектора предкомпактна*. Однако свойство а. п. п. равносильно п. п. для таких полугрупп, как $\boldsymbol{R}_+$, $\boldsymbol{Z}_+$.

Для любого а. п. п. представления (и только для такого) справедлива теорема об отщеплении граничного спектра, согласно которой $B = B_0 \dotplus B_1$, где B_0, B_1 — инвариантные подпространства, называемые соответственно внутренним и граничным и описываемые следующим образом:

$$B_0 = \{x \mid \lim_s T(s)x = 0\}. \qquad (2)$$

B_1 является топологической прямой суммой весовых подпространств $V_\chi = \{x \mid T(s)x = \chi(s)x\}$, отвечающих унитарным характерам χ (χ — вес, если $V_\chi \neq 0$); сужения $T(s) \mid B_1$ — обратимые изометрии. **Проектор P, для которого $\mathrm{Ker}\, P = B_0$, $\mathrm{Im}\, P = B_1$, называется граничным (для представления T). Это ортопроектор, т. е. $\|P\| = 1$ (при $B_1 \neq 0$), поскольку представление T — сжимающее.

Из теоремы об отщеплении граничного спектра вытекает следующее важное свойство представления, которое мы называем спектральной двойственностью.

Теорема 1. *Пусть T — а. п. п. представление, χ — унитарный характер полугруппы S. Тогда подпространства*

$$V_\chi = \{x \mid x \in B,\ T(s)x = \chi(s)x,\ (s \in S)\},$$
$$W_\chi = \{f \mid f \in B^*,\ T^*(s)f = \chi(s)f,\ (s \in S)\}$$

находятся в двойственности.

Доказательство. Пусть $x \in V_\chi$, $x \neq 0$. Обозначим через g какой-нибудь линейный функционал на V_χ, такой, что $g(x) \neq 0$. По теореме об отщеплении граничного спектра в B существует проектор

---

* Если заменить это условие слабой предкомпактностью, то получится определение класса слабо п.п. представлений, изучавшихся в [4].

** Последнее — в силу сжимаемости всех $T(s)$.

P_χ на V_χ, аннулирующий подпространство B_0 и все весовые подпространства, отвечающие унитарным весам, отличным от χ. Проектор P_χ коммутирует с представлением T. Функционал $f \in B^*$, определяемый равенством $f(y) = g(P_\chi y)$, принадлежит пространству W_χ и $f(x) \neq 0$.

Пусть обратно $f \in W_\chi$, $f \neq 0$. Тогда f аннулирует B_0 и все весовые подпространства, отвечающие унитарным весам, отличным от χ. По теореме об отщеплении граничного спектра $f \mid V_\chi \neq 0$, т. е. существует $x \in V_\chi$, для которого $f(x) \neq 0$.

Следствие. *В условиях теоремы 1 конечномерность одного из подпространств* V_χ, W_χ *эквивалентна конечномерности другого и при этом* $\dim V_\chi = \dim W_\chi$. *В частности,* $W_\chi = 0 \leftrightarrow V_\chi = 0$.

Замечание 1. Теорема 1 справедлива и для слабо п. п. представлений. Соответствующий вариант теоремы об отщеплении граничного спектра был установлен в [4]. В рефлексивном пространстве любое ограниченное представление является слабо п. п. и поэтому для него имеет место теорема об отщеплении граничного спектра*, а следовательно, и спектральная двойственность.

Замечание 2. Для любого (не только а. п. п.) представления T ($\| T(s) \| \leqslant 1$) имеет место импликация $x \in V_\chi \setminus \{0\} \Rightarrow \exists f \in W_\chi$, $f(x) \neq 0$. Для доказательства рассмотрим в B^* выпуклое w^*-компактное множество $\Omega = \{f \mid f(x) = \|f\| = 1\}$. Оно инвариантно для коммутативного семейства аффинных непрерывных отображений $\{\chi^{-1}(s)\, T^*(s)\}$, $(s \in S)$. По теореме Маркова — Какутани существует $f \in \Omega$ такой, что $T^*(s) f = \chi(s) f$.

Основной результат настоящей работы состоит в обращении теоремы 1 при дополнительных условиях на представление.

Теорема 2. *Пусть представление T равномерно непрерывно, его унитарный а-спектр не более чем счетен и T удовлетворяет условию спектральной двойственности, т. е.* $f \in W_\chi \setminus \{0\} \Rightarrow \exists\, x \in V_\chi$, $f(x) \neq 0$ (3). *Тогда T является а. п. п.*

Доказательство. Определим для T внутреннее подпространство B_0 и граничное подпространство B_1 точно так же, как они описываются в формулировке теоремы об отщеплении граничного спектра. Очевидно, это — инвариантные подпространства. Рассмотрим инвариантное подпространство $L = \overline{B_0 + B_1}$. Сужение $T \mid L$ является а. п. п., ибо таково (и даже п. п.) $T \mid B_1$, а $T \mid B_0$ сильно сходится к нулю. По теореме об отщеплении граничного спектра $L = B_0 + B_1$.

Поскольку представление T — сжимающее, то при любом $x \in B$ числовая направленность $\{\| T(s)\, x \|\}$ монотонна, откуда следует существование предела

$$l(x) = \lim_s \| T(s)\, x \| = \inf_s \| T(s)\, x \|.$$

Очевидно, $l(x)$ — полунорма в B, $l(x) \leqslant \| x \|$. Ядро $\operatorname{Ker} l$ совпадает с B_0, поэтому l порождает некоторую норму l_0 на фактор-пространстве B/B_0. На подпространстве $L/B_0 \subset B/B_0$, естественно изометричном подпространству $B_1 \subset B$, норма l_0 совпадает с первоначальной нормой

* Этот результат был впервые получен в [5].

в силу теоремы об отщеплении граничного спектра. Следовательно, L/B_0 полно по норме l_0. Но тогда l_0 порождает некоторую норму $\tilde{l}$ на фактор-пространстве $(B/B_0)/(L/B_0) \approx B/L$. Норма $\tilde{l}$ порождается также полунормой l при прямой факторизации B/L.

Очевидно, $\tilde{l}(z) \leqslant \|z\|$. Имеет место формула

$$\tilde{l}(z) = \lim_{s} \inf_{v \in B_1} \| T(s)\, x - v \|, \tag{4}$$

где $x \in B$ — любой прообраз элемента $z \in B/L$. Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{l}(z) &= \inf_{y \in L} l(x - y) = \inf_{v \in B_1} l(x - v) = \\ &= \inf_{v \in B_1} \inf_{s} \| T(s)\, x - T(s)\, v \| = \inf_{s} \inf_{v \in B_1} \| T(s)\, x - T(s)\, v \| = \\ &= \lim_{s} \inf_{v \in B_1} \| T(s)\, x - T(s)\, v \|. \end{aligned} \tag{5}$$

Остается вспомнить, что операторы $T(s) \mid B_1$ обратимы, поэтому в (5) можно заменить $T(s)\, v$ на v.

Рассмотрим в фактор-пространстве B/L представление $U = T/L$. Из формулы (4) следует, что U сохраняет норму $\tilde{l}$. Пополним B/L по норме $\tilde{l}$. Получим банахово пространство E, в котором будет действовать изометрическое представление $\tilde{U}$. При переходе от U к $\tilde{U}$ может нарушиться равномерная непрерывность, поскольку норма $\tilde{l}$, вообще говоря, не эквивалентна первоначальной норме в B/L. Поэтому далее мы будем работать не с представлением $\tilde{U}$, а с его образом, т. е. с полугруппой изометрий $\Sigma = \{\tilde{U}(s)\}_{s \in S}$. Ее a-спектр, вообще говоря, шире a-спектра представления $\tilde{U}$, так как может содержать характеры ξ, для которых $\chi(s) \equiv \xi(\tilde{U}(s))$ разрывны на исходной полугруппе S. Докажем, однако, что $\operatorname{spec}_a \Sigma \subset \operatorname{spec}_a U$ (с учетом переноса характеров с Σ на S).

Пусть $\chi \in \operatorname{spec}_a \Sigma$, $\{z_\nu\}$ — соответствующая квазивесовая направленность, которую сразу можно выбрать из B/L, плотного в E:

$$\tilde{l}(z_\nu) = 1, \quad \lim_{\nu} \tilde{l}(U(s)\, z_\nu - \chi(s)\, z_\nu) = 0, \ (s \in S).$$

Второе из этих соотношений записывается согласно (4) в виде

$$\lim_{\nu} \lim_{t} \inf_{v \in B_1} \| T(t)\,(T(s)\, x_\nu - \chi(s)\, x_\nu) - v \| = 0, \ (s \in S),$$

где $x_\nu \in B$ — любой прообраз элемента $z_\nu \in B/L$. Тем более

$$\lim_{\nu} \lim_{t} \inf_{v \in L} \| T(t)\,(T(s)\, x_\nu - \chi(s)\, x_\nu) - v \| = 0, \ (s \in S),$$

т. е.

$$\lim_{\nu} \lim_{t} \| U(s)\, U(t)\, z_\nu - \chi(s)\, U(t)\, z_\nu \| = 0, \ (s \in S). \tag{6}$$

Так как $\| U(t) z_\nu \| \geqslant \tilde{l}(U(t) z_\nu) = \tilde{l}(z_\nu) = 1$, то из (6) следует, что $\chi \in \operatorname{spec}_a U$.

Согласно лемме 1 унитарный a-спектр представления U не более чем счетен. Следовательно, таков же и a-спектр полугруппы Σ. Покажем, что он совпадает с ее δ-спектром. Достаточно проверить, что все характеры из δ-спектра унитарны, а для этого, в свою очередь, достаточно установить обратимость всех изометрий $\tilde{U}(s)$, $(s \in S)$. Пусть некоторый оператор $\tilde{U}(t)$ необратим. Тогда его a-спектр содержит единичную окружность $|\lambda| = 1$. Но для каждого $\lambda \in \operatorname{spec}_a \tilde{U}(t)$ существует квазивес $\chi \in \operatorname{spec}_a \sum$, такой, что $\chi(t) = \lambda$ (см. [2]). Это противоречит счетности $\operatorname{spec}_a \sum$.

Итак, пространство максимальных идеалов $\operatorname{spec}_\delta \sum$ не более чем счетно. Так как оно компактно, то в нем существует изолированная точка χ. По известной теореме Шилова об идемпотентах существует проектор Q в пространстве E, коммутирующий со всеми $\tilde{U}(s)$, $(s \in S)$ и такой, что δ-спектр семейства $\{\tilde{U}(s) \mid \operatorname{Im} Q\}$ состоит из одной точки χ. Но тогда каждая изометрия $\tilde{U}(s) \mid \operatorname{Im} Q$ имеет единственную точку спектра $\chi(s)$. Следовательно, $\tilde{U}(s) w = \chi(s) w$ для всех $w \in Q$, $s \in S$. Если g — линейный функционал на $\operatorname{Im} Q$, $g \neq 0$, то функционал $h(z) = g(Qz)$, $z \in E$ — весовой: $\tilde{U}^*(s) h = \chi(s) h$ $h \neq 0$, $(s \in S)$. Отсюда видно, между прочим, что характер χ непрерывен на S. Перенесем функционал h на исходное пространство B с помощью сквозного гомоморфизма $B \to B/L \to E$ (очевидно, непрерывного). Получим функционал $f \in B^*$, весовой для исходного представления $T: T^*(s) f = \chi(s) f$ $(s \in S)$, $f \neq 0$. В силу спектральной двойственности существует дуальный весовой вектор $x \in B$: $T(s) x = \chi(s) x$, $f(x) \neq 0$. Но, очевидно, $x \in B_1 \subset L$, а $f \mid L = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Из теоремы 2 следует, что равномерно непрерывное слабо п. п. представление не более чем со счетным унитарным a-спектром является а. п. п. Действительно, как мы уже отмечали, спектральная двойственность для слабо п. п. представлений имеет место. В частности, имеет место такое

Следствие 1. *Если в рефлексивном пространстве представление T равномерно непрерывно и его унитарный а-спектр не более чем счетен, то оно является а. п. п.*

Сформулируем теперь критерий асимптотической устойчивости, вытекающий из теоремы 2 (ср. [1, 6]).

Следствие 2. *Пусть представление T равномерно непрерывно и его унитарный а-спектр не более чем счетен. Для того чтобы все орбиты $\{T(s) x\}$ сходились к нулю, необходимо и достаточно, чтобы не существовало весовых функционалов $f \in B^*$, отвечающих унитарным характерам.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна (для любого представления): если $T^*(s) f = \chi(s) f$, то $f(T(s) x) = \chi(s) f(x)$ для всех x, откуда $f(x) = 0$, $(x \in B)$, ибо $f(T(s) x) \to 0$, а $|\chi(s)| = 1$. Для доказательства достаточности заметим, что условие спектральной двойственности в данном случае выполнено тривиальным образом. По теореме 2 представление T является а. п. п. Но тогда по теореме 1 гранично подпространство равно нулю, т. е. $B = B_0$, чем и доказывается требуемое утверждение.

Замечание. Для любого представления необходимым условием сходимости всех орбит к нулю является также отсутствие весовых векторов $x \in B$, отвечающих унитарным характерам. Этого и достаточно, если пространство рефлексивно, а представление T равномерно непрерывно и его унитарный a-спектр не более чем счетен.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 (без (3), если пространство рефлексивно). Для того чтобы система весовых векторов представления была полна, необходимо и достаточно, чтобы все орбиты* $\{T(s)x\}$, $x \neq 0$, *были отделены от нуля.*

Этот факт вытекает из теоремы 2 и теоремы об отщеплении граничного спектра. При этом представление п. п., все $T(s)$ — обратимые изометрии и, более того, представление продолжается на группу Гротендика полугруппы S (см. [3]).

Нарушение спектральной двойственности в нерефлексивном пространстве может привести к нарушению полноты (см. [7]).

Список литературы: 1. *Ву Куок Фонг, Любич Ю. И.* Спектральный критерий почти периодичности для однопараметрических полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1987. — Вып. 47. — С. 36—41. 2. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп.— Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985.—142 с. 3. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1986. — Вып. 45.— С.69—84. 4. *De Leeuw K., Glicksberg I.* Applications of almost periodic compactifications // Acta Math. — 1961.— **105.** — P.63—97. 5. *Jacobs K.* Ergodentheorie und Fastperiodische Funktionen auf Halbgruppen // Math. Z.— 1956. — **64**. — P. 298—338. 6. *Скляр Г. М., Ширман В. Я.* Об асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1982.— Вып. 37.— С.127—132. 7. *Любич Ю. И.* Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора // Успехи мат. наук.— 1963.— **18**. № 1. — С.165—171.

Поступила в редколлегию 19.05.86