Communications et procès-verbaux de la Société mathématique de Kharkow. Année 1887, 2-e livraison (XVIII du commencement de l'édition).

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1887 года.

II.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1888.

Отдѣльные оттиски изъ «Записокъ Императорскаго Харьковскаго Университета».

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Сообщенія:

Приложенія:

TABLE DES MATIÈRES.

Extraits des procès-verbaux:

Communications:

Additions:

ПРОТОКОЛЪ

ГОДИЧНАГО СОБРАНІЯ

ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА,

13 сентября 1887 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, М. Ѳ. Ковальскій, А. М. Ляпуновъ, А. А. Клюшниковъ, Г. В. Левицкій, И. К. Шейдтъ, В. П. Алексѣевскій, А. М. Флавицкій, А. В. Гречаниновъ и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

I. Прочитанъ секретаремъ общества отчетъ о состояніи и дѣятельности общества за истекшій 1886—87 академическій годъ.

II. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи книгъ:

1) Mathesis. №№ 5—9.
2) Jornal de math. pelo Teixeira. Vol. VII, №№ 5 и 6.
3) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. №№ 20—24 второго семестра и № 25 третьяго сем.
4) Физико-математическія науки. Іюль—Августъ. 1886.
5) Кіевскія университетскія извѣстія. №№ 4, 5 и 6.
6) Протоколы казанскаго математическаго общества. 1862—65.

7) Bulletin de la société math. de France. №№ 3, 4 и 5.

8) Bulletin de la société des naturalistes de Moscou. №№ 2, 3.

9) Записки новороссійскаго общества естествоиспытателей. Т. XII, вып. 1.

10) *Порѣцкій*, Историческій очеркъ развитія сферической тригонометріи (отъ автора).

III. Г. предсѣдатель сообщилъ, что новый уставъ Математическаго общества, дополненный согласно предложенію г. министра народнаго просвѣщенія, отправленъ на утвержденіе.

IV. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета.

Выбраны: 1) въ предсѣдатели проф. **К. А. Андреевъ**; 2) въ товарищи предсѣдателя: директоръ харьковскаго технологическаго института **В. Л. Кирпичевъ** и проф. **М. А. Тихомандрицкій**; 3) въ секретари — преподаватель 1-й харьковской гимназіи **А. П. Грузинцевъ**, и 4) въ библіотекари — стипендіатъ университета **А. А. Клюшниковъ**.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности Математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ,

за 1886—87 академическій годъ.

Въ 1886—87 академическомъ году харьковское Математическое общество продолжало свою дѣятельность въ томъ же направленіи, какъ и въ прежніе годы. Въ этомъ году оно состояло изъ 39 членовъ и имѣло 6 засѣданій, на которыхъ было сдѣлано 17 сообщеній по предметамъ чистой и прикладной математики, при чемъ большая часть сообщеній касалась вопросовъ чистой математики. Часть сообщеній состояла изъ докладовъ статей, присланныхъ с.-петербургскими учеными.

За истекшій годъ выпущено 2 книжки «Сообщеній», кои и были разосланы корреспондентамъ.

Средства общества, на которыя производились текущіе расходы и изданіе «Сообщеній», состояли изъ небольшихъ суммъ, составленныхъ добровольными взносами членовъ и отъ продажи изданія, а также изъ субсидіи отъ университета.

Протоколъ засѣданія 16 октября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, В. Л. Кирпичовъ, А. М. Ляпуновъ, Г. В. Левицкій, А. А. Клюшниковъ, В. И. Альбицкій, В. П. Алексѣевскій, А. В. Гречаниновъ, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

I. Предсѣдателъ прочиталъ письмо проф. *В. П. Ермакова*, содержащее задачу изъ интегральнаго исчисленія, которую онъ проситъ напечатать въ «Сообщеніяхъ Х. М. О.».

II. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи статьи *П. С. Флорова* «Объ уравненіи $\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$». Сообщить ея содержаніе взялъ на себя В. П. Алексѣевскій.

III. *А. П. Грузинцовъ* изложилъ содержаніе 1-ой части своей статьи «О преломленіи свѣтовыхъ лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями».

IV. А. М. Ляпуновъ передалъ содержаніе статьи, присланной *И. В. Мещерскимъ* изъ С.-Петербурга, «О дифференціальныхъ связяхъ въ случаѣ одной матеріальной точки».

V. Г. предсѣдатель доложилъ о выходѣ 17-го выпуска «Сообщеній» харьковскаго Математическаго общества. Книжка эта была роздана присутствующимъ членамъ общества.

VI. Онъ-же доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Протоколы математической секціи казанскаго общества естествоиспытателей. № 66 съ прилож.

2) Кіевскія университетскія извѣстія. Іюль. 1887 г.

3) Bulletin de la société des naturalistes de Moscou. № 3, 1887 г.

4) Bulletin de la société mathématique de France. T. V, № 6.

5) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. № 26 (№ 3-й за 1887 г.).

6) Rendiconti del circolo matematico di Palermo. № 1—4, 1886—87 г.

ЗАДАЧА,

предложенная проф. В. П. Ермаковымъ

(для молодыхъ ученыхъ)*.

Даны три функціи P, Q и R трехъ перемѣнныхъ координатъ x, y и z; требуется найти такую поверхность, что интегралъ

$$\int(Pdx + Qdy + Rdz), \tag{1}$$

взятый между двумя данными точками, по какой нибудь линіи, расположенной на искомой поверхности, не зависѣлъ бы отъ формы того пути, по которому берется интегралъ.

Полное рѣшеніе этой задачи можетъ быть приведено къ слѣдующимъ четыремъ вопросамъ.

1. Показать, что задача приводится къ интегрированію линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка, т. е. къ нахожденію двухъ функцій U и V, послѣ чего произвольная зависимость между этими функціями будетъ искомымъ рѣшеніемъ.

2. Задача обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ: если дана одна функція U, то нахожденіе другой функціи V приводится къ квадратурамъ.

---

* Извлеченіе изъ письма къ проф. К. А. Андрееву.

3. Задача становится вполнѣ опредѣленною, если дана кривая линія, чрезъ которую должна проходить искомая поверхность.

4. Положимъ, что мы преобразовываемъ данный интегралъ къ новымъ перемѣннымъ по формуламъ, содержащимъ одно произвольное постоянное; если это постоянное не входитъ явно ни въ данный интегралъ (1), ни въ преобразованный, то обѣ функціи U и V находятся при помощи дифференцированій и квадратуръ.

Одинъ или два удачно подобранныхъ примѣра были бы весьма умѣстны.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ СВЯЗИ

ВЪ СЛУЧАѢ ОДНОЙ МАТЕРІАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

И. В. Мещерскаго.

---

§ 1. Связи вообще.

Всякое данное уравненіе, конечное или дифференціальное, относительно координатъ матеріальной точки представляетъ, вообще говоря, аналитическую связь, ибо оно выражаетъ условіе, въ силу котораго точка совершаетъ не то движеніе, какое ей стремятся сообщить приложенныя силы.

Всѣ аналитическія связи могутъ быть раздѣлены на двѣ группы: связи конечныя, уравненія которыхъ содержатъ только координаты и время, и связи дифференціальныя, въ уравненія которыхъ входятъ производныя координатъ.

Среди конечныхъ связей обыкновенно различаютъ тѣ, въ уравненія которыхъ время явно не входитъ, и другія, уравненія которыхъ явно содержатъ время. Связи дифференціальныя можно различать по порядку наивысшей производной, которая въ уравненіи связи встрѣчается.

Въ аналитической механикѣ могутъ быть разсматриваемы движенія матеріальной точки при существованіи не только конечныхъ связей, но и связей дифференціальныхъ какого угодно порядка.

Конечныя связи легко осуществляются въ формѣ поверхностей и представляютъ наиболѣе простой случай аналитическихъ связей. Благодаря этому механика до послѣдняго времени занималась исключительно конечными связями, а между тѣмъ дифференціальныя связи, по крайней мѣрѣ 1-го порядка, какъ увидимъ ниже, могутъ быть реализованы въ такой формѣ, которая въ механикѣ разсматривается.

§ 2. Дифференціальныя связи 1-го порядка.

Общій видъ уравненія дифференціальной связи 1-го порядка для одной матеріальной точки будетъ:

$$F(x, y, z, x', y', z', t) = 0. \qquad (1)^*$$

Будемъ предполагать, что лѣвая часть этого уравненія не представляетъ полной производной, ибо въ противномъ случаѣ дифференціальная связь преобразуется въ связь конечную.

Если считать, что свободная матеріальная точка имѣетъ три степени свободы, то дифференціальная связь (1), подобно конечной связи, уничтожаетъ одну степень свободы.

Мы убѣдимся въ этомъ, присоединяя къ дифференціальной связи (1) двѣ конечныя связи:

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$
$$\psi(x, y, z, t) = 0,$$

тогда кинематическое состояніе точки въ каждый моментъ будетъ вполнѣ опредѣлено, независимо отъ приложенныхъ къ ней силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій:

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

* Ради краткости обозначаемъ вездѣ $\frac{dx}{dt}$ чрезъ x', $\frac{d^2x}{dt^2}$ чрезъ x'', $\frac{dy}{dt}$ чрезъ y' и т. д.

выразимъ x и y чрезъ z и t, а затѣмъ x' и y' чрезъ z, z', t, найденныя выраженія подставимъ въ уравненіе (1), тогда уравненіе это обратится въ дифференціальное уравненіе 1-го порядка относительно z; интегрируя его, получимъ z какъ опредѣленную функцію t. Подставивши эту функцію вмѣсто z въ выраженія x и y, получимъ x и y также какъ нѣкоторыя опредѣленныя функціи t*.

Дифференціальная связь можетъ быть осуществлена въ видѣ нѣкоторой среды, воздѣйствующей на матеріальную точку, въ ней находящуюся.

Эта среда должна обладать такими свойствами, что точка, подверженная ея вліянію и дѣйствію силъ задаваемыхъ, совершаетъ движеніе, удовлетворяющее данному уравненію дифференціальной связи.

Уравненіе дифференціальной связи 1-го порядка (1) можно разсматривать, какъ условіе, ограничивающее скорость точки; слѣдовательно, вліяніе среды выражается въ томъ, что она измѣняетъ скорость, которую стремятся сообщить точкѣ задаваемыя силы.

Причина, измѣняющая скорость, называется силой, слѣдовательно, вліяніе среды эквивалентно нѣкоторой силѣ, приложенной къ точкѣ.

Эта сила есть результатъ существованія дифференціальной связи (1). Мы можемъ назвать ее реакціей дифференціальной связи (1).

Обозначимъ проекціи на координатныхъ осяхъ реакціи связи (1) чрезъ L, M, N, а проекціи равнодѣйствующей силъ задаваемыхъ, приложенныхъ къ точкѣ, чрезъ X, Y, Z; пусть m будетъ масса точки, тогда уравненія движенія будутъ:

* То же разсужденіе, очевидно, примѣнимо къ случаю дифференціальной связи n-го порядка, и мы приходимъ къ заключенію, что связь какого угодно порядка уничтожаетъ одну степень свободы матеріальной точки.

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + L \\ my'' &= Y + M \\ mz'' &= Z + N \end{aligned}\right\} . \qquad (2)$$

Присоединяя сюда уравненіе (1), мы получимъ всего 4 уравненія, въ которыхъ 6 неизвѣстныхъ величинъ: x, y, z, L, M, N; поэтому изъ трехъ величинъ, опредѣляющихъ реакцію, двѣ можемъ считать произвольными. Мы сдѣлаемъ предположеніе, которое представляется наиболѣе естественнымъ, именно, что реакція связи направлена по линіи скорости точки. Величину реакціи обозначимъ чрезъ λ; тогда будемъ имѣть только 4 неизвѣстныхъ: x, y, z, λ, связанныхъ 4 уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X + \lambda \frac{x'}{v} \\ my'' &= Y + \lambda \frac{y'}{v} \\ mz'' &= Z + \lambda \frac{z'}{v} \end{aligned}\right\} , \qquad (3)$$

$$F(x, y, z, x', y', z', t) = 0. \qquad (1)$$

Знакъ той величины, которая получится для λ изъ уравненій (3)* и (1), покажетъ, направлена ли реакція въ ту же сторону, какъ и скорость точки (когда $\lambda > 0$), или въ сторону противоположную (когда $\lambda < 0$).

Въ послѣднемъ случаѣ дифференціальная связь осуществляется въ видѣ сопротивляющейся среды; сопротивленіе среды представляетъ реакцію связи.

Для того, чтобы опредѣлить движеніе точки, исключимъ изъ уравненія (3) $\frac{\lambda}{v}$; получимъ:

* v обозначаетъ скорость точки.

$$m(x'y''-y'x'')=x'Y-y'X,$$
$$m(y'z''-z'y'')=y'Z-z'Y.$$

Проинтегрировавъ эти уравненія вмѣстѣ съ ур. (1), найдемъ x, y, z какъ функціи t; постоянныя интегрированія опредѣлятся начальнымъ положеніемъ и начальною скоростью точки.

Составимъ затѣмъ выраженіе для v въ функціи t; тогда реакція связи λ опредѣлится изъ уравненія:

$$\lambda = m\frac{dv}{dt} - F\cos(Fv),$$

гдѣ F равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ, а (Fv) уголъ, который она образуетъ съ направленіемъ скорости.

Матеріальная точка можетъ быть одновременно подвержена двумъ связямъ, конечной и дифференціальной:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\ y,\ z,\ t)=0 \\ F(x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t)=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Въ этомъ случаѣ дифференціальную связь можно осуществить не только посредствомъ среды, но также въ видѣ шероховатости той поверхности, которая соотвѣтствуетъ конечной связи; треніе представляетъ тогда реакцію дифференціальной связи.

Обозначая реакцію конечной связи чрезъ μ, будемъ имѣть слѣдующія уравненія движенія:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= X+\lambda\frac{x'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ my'' &= Y+\lambda\frac{y'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ mz'' &= Z+\lambda\frac{z'}{v}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Проинтегрировавши вмѣстѣ съ ур. (4) то уравненіе, которое останется послѣ исключенія λ и μ изъ ур. (5), найдемъ реакціи λ и μ изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \frac{\mu}{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= m\frac{dv}{dt} - F\cos(Fv) \\ \frac{\lambda}{v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu.\Delta^2\varphi &= mK + F\cos(Fn) \end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

гдѣ $\Delta^2\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$

$$K = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z''\right),$$

и гдѣ n обозначаетъ направленіе внѣшней нормали къ поверхности $\varphi = 0$.

При рѣшеніи частныхъ вопросовъ указанный общій пріемъ не всегда приводитъ къ цѣли вслѣдствіе частныхъ затрудненій; мы должны избрать тогда иной путь, болѣе соотвѣтствующій характеру вопроса.

Аналитическая механика владѣетъ многими важными преобразованіями и предложеніями для случая конечныхъ связей, въ уравненія которыхъ время явно не входитъ; только весьма немногія изъ этихъ преобразованій и предложеній имѣютъ мѣсто и тогда, когда уравненія конечныхъ связей явно содержатъ время. При существованіи дифференціальной связи, какъ не трудно убѣдиться, они теряютъ свое значеніе; въ этомъ случаѣ нельзя ввести независимыхъ координатныхъ параметровъ; въ уравненія, соотвѣтствующія законамъ сохраненія живой силы и площадей, началамъ Д'Аламбера и Гамильтона, входитъ вмѣстѣ съ задаваемыми силами и реакція дифференціальной связи; принципъ послѣдняго множителя, вообще говоря, не имѣетъ мѣста.

§ 3. Примѣры.

Мы разсмотримъ только два примѣра, въ которыхъ движенiе матерiальной точки подчинено дифференцiальной связи 1-го порядка.

Эти примѣры покажутъ намъ, что дифференцiальная связь 1-го порядка можетъ осуществляться въ видѣ такой среды или такой шероховатости поверхности, которыя встрѣчаются въ извѣстныхъ задачахъ аналитической механики. Кромѣ того мы увидимъ, что рѣшенiе нѣкоторыхъ вопросовъ о движенiи точки и при существованiи дифференцiальной связи можетъ быть доведено до конца.

Примѣръ I. Точка притягивается къ неподвижному центру силою прямо пропорцiональною кубу разстоянiя: $F=k^2mr^3$; требуется опредѣлить движенiе этой точки при томъ условiи, чтобъ скорость ея была прямо пропорцiональна квадрату разстоянiя, именно: $v=kr^2$ (7).

Движенiе будетъ происходить, очевидно, въ плоскости, проходящей чрезъ притягивающiй центръ и начальное направленiе скорости.

Примемъ центръ за начало координатъ, тогда условное уравненiе представится въ видѣ:

$$x'^2+y'^2=k^2(x^2+y^2)^2. \qquad (7')$$

Это есть уравненiе дифференцiальной связи 1-го порядка и притомъ такой, которую нельзя преобразовать въ связь конечную.

Уравненiя движенiя будутъ:

$$\left.\begin{aligned} mx''&=-k^2mr^2x+\lambda\frac{x'}{v}\\ my''&=-k^2mr^2y+\lambda\frac{y'}{v}\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Умножаемъ первое изъ уравненій (8) на x', второе на y' и складываемъ:

$$m(x'x''+y'y'')=-k^2mr^2(xx'+yy')+\lambda v.$$

Отсюда $$m\frac{dv}{dt}=-k^2m\frac{r^3}{v}\frac{dr}{dt}+\lambda;$$

замѣняя v чрезъ kr^2, находимъ:

$$\lambda=3kmr\frac{dr}{dt}. \tag{9}$$

Умножаемъ затѣмъ первое изъ ур. (8) на x, второе на y и складываемъ:

$$m(xx''+yy'')=-k^2mr^4+\lambda\frac{xx'+yy'}{v}, \tag{10}$$

и такъ какъ имѣемъ:

$$xx''+yy''=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-v^2,$$

$$k^2mr^4=mv^2,$$

$$\frac{\lambda}{v}\left(xx'+yy'\right)=3m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

то послѣ подстановки въ ур. (10) получимъ:

$$r\frac{d^2r}{dt^2}=2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Уравненіе это интегрируется. Положимъ

$$r=\frac{1}{z};$$

тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$\frac{1}{z^3}\;\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

и по выполненіи интеграціи находимъ:

$$z = at + b,$$

слѣдовательно,

$$r = \frac{1}{at+b}, \tag{11}$$

гдѣ a и b постоянныя.

И такъ
$$v = \frac{k}{(at+b)^2}.$$

Изъ формулы (11):

$$\frac{dr}{dt} = -ar^2;$$

подставляя это въ формулу (9), получимъ:

$$\lambda = -3kamr^3$$

или
$$\lambda = -\frac{3am}{kr} v^2. \tag{12}$$

Остается опредѣлить уголъ θ, который радіусъ-векторъ точки образуетъ съ осью x-овъ.

Изъ ур. (8) слѣдуетъ:

$$m(xy'' - yx'') = \frac{\lambda}{v}(xy' - yx').$$

Принимая во вниманіе формулы (7) и (9), интегрируемъ и находимъ:

$$xy' - yx' = 2cr^3,$$

гдѣ c постоянная.

Отсюда
$$\frac{d\theta}{dt} = cr$$

или
$$d\theta = \frac{c\,dt}{at+b};$$

следовательно, $$\theta-\alpha=\frac{c}{a}\lg(at+b),\tag{13}$$

гдѣ α постоянная.

Траекторія точки будетъ логариѳмическая спираль. Уравненіе ея получаемъ, исключая t изъ формулъ (11) и (13):

$$r=e^{-\frac{a}{c}(\theta-\alpha)}.$$

Постоянныя a, b, c, α опредѣляются начальными значеніями r, θ и угла φ, составляемаго скоростью съ радіусомъ-векторомъ:

$$a=k\cos\varphi_0\,,\qquad c=k\sin\varphi_0\,,$$

$$b=\frac{1}{r_0}\,,\qquad \alpha=\theta_0-\operatorname{tg}\varphi_0\lg\frac{1}{r_0}\,.$$

При $\varphi_0<90^\circ$ имѣемъ $\lambda<0$. Слѣдовательно, реакція дифференціальной связи направлена противоположно скорости точки; величина этой реакціи:

$$-\lambda=\frac{3m\cos\varphi_0}{r}v^2.$$

Мы имѣемъ, слѣдовательно, въ настоящемъ примѣрѣ тотъ случай движенія въ сопротивляющейся средѣ, который въ механикѣ разсматривается, именно, когда сопротивленіе $=\dfrac{3m\cos\varphi_0}{r}v^2$.

Примѣръ II. Опредѣлить движеніе тяжелой точки по наклонной плоскости, которое должно удовлетворять условію:

$$a^2x'^{1-k}-x'^{1+k}-2ay'=0.\tag{14}$$

Уравненіе это составлено въ томъ предположеніи, что наклонная плоскость принята за плоскость xy-овъ, ось x-овъ горизонтальна, а ось y-овъ направлена внизъ по линіи наибольшаго ската.

Дифференціальная связь 1-го порядка (14) не можетъ быть замѣнена конечною связью.

Пусть α есть уголъ наклоненія плоскости къ горизонту, тогда уравненія движенія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= \lambda \frac{x'}{v} \\ my'' &= mg\sin\alpha + \lambda \frac{y'}{v} \\ mz'' &= -mg\cos\alpha + \mu = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Изъ третьяго ур. (15) получается реакція плоскости

$$\mu = mg\cos\alpha.$$

Опредѣлимъ реакцію λ дифференціальной связи.

Исключая λ изъ ур. (15), получимъ:

$$x'y'' - y'x'' = g\sin\alpha . x'$$

или

$$x' . \frac{d}{dt} . \frac{y'}{x'} = g\sin\alpha,$$

но изъ ур. (14):

$$\frac{y'}{x'} = \frac{a^2x'^{-k} - x'^k}{2a},$$

слѣдовательно,

$$\frac{x'}{2a}\frac{d}{dt}\left(a^2x'^{-k} - x'^k\right) = g\sin\alpha$$

или

$$\frac{k}{2a}x''\left(a^2x'^{-k} + x'^k\right) = -g\sin\alpha. \qquad (16)$$

Изъ ур. (14) слѣдуетъ:

$$v = ax'^{1-k} - y' = \frac{x'}{2a}\left(a^2x'^{-k} + x'^k\right),$$

откуда

$$\frac{a^2x'^{-k} + x'^k}{2a} = \frac{v}{x'}.$$

Подставляя это выраженіе въ формулу (16), получимъ:

$$k\frac{x''}{x'}v = -g\sin\alpha.$$

Но въ силу перваго изъ ур. (15):

$$\lambda = m\frac{x''}{x'}v,$$

слѣдовательно:

$$\lambda = -\frac{1}{k}mg\sin\alpha. \qquad (17)$$

Мы получили $\lambda < 0$. Это значитъ, что реакція дифференціальной связи (14) направлена противоположно скорости точки; величина реакціи $\frac{1}{k}mg\sin\alpha$.

Точно также выражается величина тренія при движеніи тяжелой точки по наклонной плоскости, составляющей уголъ α съ горизонтомъ, если коеффиціентъ тренія будетъ $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}$.

Такимъ образомъ, въ примѣрѣ II мы имѣемъ извѣстный случай движенія тяжелой точки по негладкой наклонной плоскости; формулы для этого случая можно найти во многихъ курсахъ аналитической механики.

Протоколъ засѣданія 20 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, В. Л. Кирпичевъ, М. А. Тихомандрицкій, А. М. Ляпуновъ, В. П. Алексѣевскій, А. А. Клюшниковъ, А. В. Гречаниновъ, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель объявилъ объ утвержденіи новаго Устава харьковскаго математическаго общества и передалъ гг. членамъ печатные экземпляры его.

2. В. П. Алексѣевскій изложилъ содержаніе статьи, присланной *П. С. Флоровымъ*, «Объ уравненіи $\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$».

3. *А. М. Ляпуновъ* доложилъ первую половину своей статьи— «О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости».

4. Г. предсѣдатель доложилъ о полученныхъ книгахъ:

1) Mathésis №№ 10 et 11.
2) Вѣстникъ опытн. физики и эл. мат. №№ 27—30.
3) Кіевскія университетскія извѣстія. №№ 8 и 9.
4) Математическій сборникъ. Т. XIII, вып. 3.
5) Физико-математическія науки. Т. II, № 3.

ОБЪ УРАВНЕНІИ

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega.$$

П. С. Флорова.

1. Для отысканія полнаго интеграла уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega$$

необходимо знать n частныхъ его значеній не связанныхъ между собою линейною зависимостью. Эти частныя значенія можно представить въ двухъ формахъ: въ формѣ безконечныхъ рядовъ и въ формѣ опредѣленныхъ интеграловъ. Мы осуществимъ сначала первую изъ этихъ двухъ формъ, а затѣмъ покажемъ, какимъ образомъ функціи, опредѣляемыя уравненіемъ:

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega,$$

могутъ быть выражены въ опредѣленныхъ интегралахъ.

2. Начнемъ свои разсужденія разсмотрѣніемъ безконечнаго ряда:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

въ которомъ r означаетъ какое нибудь цѣлое положительное число, и докажемъ сходимость этого ряда для всѣхъ вещественныхъ значеній ξ. Остановимъ свое вниманіе сначала на томъ случаѣ, когда $r=0$. Рядъ

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n}+\frac{e^{\xi}}{\Gamma(2)^n}+\frac{e^{2\xi}}{\Gamma(3)^n}+\frac{e^{3\xi}}{\Gamma(4)^n}+\ldots\ldots,$$

соотвѣтствующій допущенію $r=0$, будетъ, очевидно, сходящимся для всякаго значенія ξ, потому что отношеніе послѣдующаго члена этого ряда къ предыдущему имѣетъ своимъ предѣломъ нуль. Легко опредѣлить то мѣсто разсматриваемаго ряда, начиная съ котораго члены его послѣдовательно убываютъ. Всегда можно найти такое цѣлое положительное число a, которое удовлетворитъ условіямъ:

$$n\lg a \overline{\gtrless} \xi < n\lg(1+a).$$

И очевидно, что при измѣненіи p отъ нуля до a, члены ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}$$

непрерывно возрастаютъ, а при измѣненіи p отъ a до ∞ они послѣдовательно убываютъ.

Установивъ это, перейдемъ къ доказательству сходимости ряда:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right). \qquad (1)$$

Предположимъ, что рядъ этотъ будетъ сходящимся для $r=k$, и пусть функція

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

при измѣненіи независимаго перемѣннаго p отъ цѣлаго положительнаго числа a_k до ∞, будетъ непрерывно уменьшаться, оставаясь всегда положительною. Докажемъ, что, при измѣненіи p отъ a_{k+1}, числа, которое больше a_k, до безконечности, функція

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

будетъ непрерывно убывать, сохраняя постоянно знакъ плюсъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ, что рядъ (1) будетъ сходящимся для $r = k+1$.

Если функція

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

съ возрастаніемъ p отъ a_k, уменьшается, то ея первая производная по p, для $p > a_k$, будетъ отрицательна. Такъ какъ $a_{k+1} > a_k$, то на основаніи сказаннаго, для $p > a_{k+1}$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) > 0.$$

Изъ предположенія о сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

слѣдуетъ, что, начиная съ нѣкотораго мѣста его, разность

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) - (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right)$$

съ возрастаніемъ p убываетъ. Мы предположимъ, что это убываніе начинается съ того момента, когда p, возрастая, дѣлается равнымъ a_{k+1}. Это предположеніе, которымъ мы хотимъ опредѣлить число a_{k+1}, находится, очевидно, въ согласіи съ допущеніемъ $a_{k+1} > a_k$. Первая производная разности

$$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) - (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right),$$

для всѣхъ значеній p большихъ a_{k+1}, должна быть отрицательна. Слѣдовательно, для $p > a_{k+1}$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$(-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) > (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n}\right).$$

На основаніи доказаннаго выше каждая часть этого неравенства больше нуля.

Отсюда приходимъ къ тому заключенію, что абсолютныя величины членовъ ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

убываютъ, начиная съ того мѣста ряда, для котораго $p = a_{k+1}$.

Такимъ образомъ, предыдущій рядъ удовлетворяетъ условіямъ теоремы Коши, которою, слѣдовательно, можно воспользоваться для испытанія его сходимости. Если относительно p проинтегрируемъ функцію

$$\frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

въ предѣлахъ отъ a_{k+1} до ∞, то получимъ

$$\frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=a_{k+1}} - \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=\infty}.$$

Первое изъ этихъ слагаемыхъ имѣетъ конечную величину вслѣдствіе предположенія о сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

и по той же причинѣ второе слагаемое равняется нулю. Изъ этого видимъ, что условія сходимости ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^{k+1}}{dp^{k+1}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)$$

осуществлены; слѣдовательно, рядъ этотъ долженъ быть сходящимся одновременно съ рядомъ

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Сообразивъ все сказанное до сихъ поръ, приходимъ къ тому, что всѣ наши допущенія, относящіяся къ случаю $r=k$, оказываются имѣющими мѣсто и для $r=k+1$. И такъ какъ для $r=0$ эти допущенія безусловно справедливы, то они имѣютъ мѣсто и при всякомъ r. Такимъ образомъ, мы удостовѣрили сходимость ряда (1) для всѣхъ значеній ξ, заключенныхъ между $-\infty$ и $+\infty$. Что касается случаевъ:

$$\xi=+\infty,\quad \xi=-\infty,$$

то въ первомъ изъ нихъ рядъ (1) будетъ расходящимся при всякомъ r, а ко второму изложенный анализъ не приложимъ, потому что функція

$$\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}-\frac{e^{(1+p)\xi}}{\Gamma(2+p)^n},$$

при $\xi = -\infty$, обращается въ нуль и, слѣдовательно, съ измѣненіемъ p не мѣняется. Непосредственное разсмотрѣніе случая $\xi = -\infty$ приводитъ къ тому, что, при $r=0$, рядъ (1) обращается въ единицу, а для всѣхъ другихъ значеній r онъ дѣлается расходящимся. Если положимъ $e^{\xi} = z$, то получимъ рядъ

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

расходящійся только для $z=0$ и для $z=\infty$. При всѣхъ другихъ значеніяхъ z этотъ рядъ будетъ, очевидно, сходящимся.

3. Сумма ряда (1) представляетъ собою функцію ξ. Обозначимъ эту функцію черезъ $\omega_r(e^{\xi})$, то есть положимъ

$$\omega_r(e^{\xi}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

и покажемъ зависимость, существующую между ω_r и ω_{r+1}. Назовемъ для краткости e^{ξ} черезъ z и займемся выраженіемъ

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{cn}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\alpha^p\,d\alpha,$$

въ которомъ c означаетъ Эйлерову постоянную и величину котораго для даннаго p обозначимъ черезъ $\vartheta(p)$. Если предѣлами интегрированія сдѣлаемъ 0 и 1, то найдемъ:

$$\vartheta(p) = \frac{d}{dz}\int_0^1 (\alpha z)^p \lg(\alpha z)\,d(\alpha z) +$$

$$+\, n\frac{d}{dz}\int_0^1 \Big(\lg(1-\alpha) - \lg\alpha + c\Big)(\alpha z)^p\,d(\alpha z).$$

Будемъ искать значенія находящихся здѣсь опредѣленныхъ интеграловъ. Если продифференцируемъ относительно q обѣ части равенства

$$\int_0^1 (1-\alpha)^q \alpha^p \, d\alpha = \frac{\Gamma(1+p)\Gamma(1+q)}{\Gamma(2+p+q)}$$

и если положимъ въ результатѣ $q=0$, то получимъ

$$\int_0^1 \alpha^p \lg(1-\alpha)\, d\alpha = \frac{-1}{p+1}\left(c + \frac{d}{dp}\lg\Gamma(2+p)\right).$$

Для отысканія интеграла

$$\int_0^1 \alpha^p \lg\alpha \, d\alpha$$

положимъ

$$\alpha = e^{-(1+p)\beta};$$

тогда въ силу равенства

$$\int_0^1 \beta e^{-\beta} d\beta = \Gamma(2)$$

найдемъ

$$\int_0^1 \alpha^p \lg\alpha \, d\alpha = \frac{-1}{(p+1)^2}.$$

На основаніи сказаннаго можемъ написать:

$$\vartheta(p) = -nz^p \frac{d}{dp}\lg\Gamma(1+p) + z^p \lg z.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на $\Gamma(1+p)^n$, найдемъ

$$\frac{\vartheta(p)}{\Gamma(1+p)^n}=\frac{d}{dp}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Замѣнивъ здѣсь $\vartheta(p)$ его значеніемъ, получимъ тождество

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\frac{\alpha^p}{\Gamma(1+p)^n}\,d\alpha\,,$$

дифференцированіе котораго r разъ относительно p приводитъ къ тождеству болѣе общему

$$\frac{d^{r+1}}{dp^{r+1}}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{\alpha^p}{\Gamma(1+p)^n}\right)d\alpha.$$

Если покроемъ обѣ части этого равенства знакомъ суммы распространенной на всѣ цѣлыя положительныя значенія p отъ 0 до ∞, то, въ силу положенія

$$\omega_r(z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{z^p}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

найдемъ

$$\omega_{r+1}(z)=\frac{d}{dz}\int_0^z \lg\left(e^{nc}\alpha^{1-n}(z-\alpha)^n\right)\omega_r(\alpha)\,d\alpha.$$

Эта формула даетъ возможность вычислить функцію $\omega_r(e^\xi)$ посредствомъ функціи $\omega_0(e^\xi)$; но мы не имѣемъ надобности въ этомъ вычисленіи.

4. Покажемъ, что функція $\omega_r(e^\xi)$, при $r<n$, удовлетворяетъ условію

$$\frac{d^n\omega_r}{d\xi^n}=e^\xi\omega_r.$$

Если продифференцируемъ n разъ относительно ξ обѣ части равенства

$$\omega_r = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right),$$

то получимъ

$$\frac{d^n \omega_r}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega_r + \frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{p^n e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right)_{p=0}.$$

Второе слагаемое правой части этого равенства, при r равномъ любому числу ряда

$$0,\ 1,\ 2\ldots\ldots n-1,$$

обращается, очевидно, въ нуль, а при r большемъ $n-1$, она отлична отъ нуля. Слѣдовательно, при $r<n$, функція $\omega_r\,(e^{\xi})$ удовлетворяетъ условію

$$\frac{d^n\omega_r}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega_r,$$

какъ мы утверждали.

На основаніи сказаннаго можно доказать, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$$

выражается отношеніемъ

$$\omega = C_0\omega_0 + C_1\omega_1 + \ldots + C_{n-1}\omega_{n-1},$$

гдѣ нумерованныя C суть произвольныя постоянныя.

Разсмотримъ детерминантъ

$$\begin{vmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \ldots\ldots \omega_{n-1} \\ \omega'_0 & \omega'_1 & \omega'_2 & \ldots\ldots \omega'_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots\ldots \omega_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

въ которомъ верхніе указатели опредѣляютъ число дифференцированій по ξ. Если между функціями

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$$

существуетъ линейная зависимость, то взятый нами детерминантъ, величину котораго назовемъ черезъ Δ, равняется нулю. Если же функціи

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$$

не связаны между собою линейною зависимостью, то, на основаніи теоремы Ліувилля, Δ равняется числу, не зависящему отъ ξ и отличному отъ нуля. Слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ Δ есть величина постоянная, и если мы докажемъ, что Δ не есть нуль, то вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ нашу теорему.

Будемъ приближать ξ къ $-\infty$.

Чтобы получить понятіе объ элементѣ

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\,\omega_r\,(e^\xi)$$

при $\xi = -\infty$, обратимся къ равенству

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\frac{d^r}{dp^r}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right) = r!\sum_{i=0}^{r}\frac{[k]^i\,p^{k-i}}{i!\,(r-i)!}\frac{d^{r-i}}{dp^{r-i}}\left(\frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^n}\right).$$

Разсмотрѣніе этого равенства приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ. Если $k > r$, то

$$\frac{d^k\omega_r}{d\xi^k} = \xi^r\,e^\xi\alpha;$$

если $k = r$, то

$$\frac{d^k\omega_k}{d\xi^k} = k!\,\omega_0 + \xi^k\,e^\xi\beta;$$

если $k < r$, то

$$\frac{d^k \omega_r}{d\xi^k} = \frac{r!}{(r-k)!}\,\omega_{r-k} + \xi^r e^{\xi} \gamma.$$

Здѣсь α, β и γ суть функціи ξ, сохраняющія конечныя значенія при $\xi = -\infty$. Для этого же значенія ξ функція ω_0 равняется единицѣ, а ω_{r-k} безконечности порядка $r-k$. Замѣтивъ это, развернемъ Δ по элементамъ перваго столбца; получимъ

$$\Delta = \omega_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0} - \omega'_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega'_0} + \ldots + (-1)^{n-1} \omega_0^{\,n-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0^{\,n-1}}.$$

Каждое изъ выраженій

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega'_0},\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega''_0}, \ldots \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0^{\,n-1}}$$

при $\xi = -\infty$ обращается въ безконечность. Изъ строя элемента $\omega_r^{\,k}$ при $r > k$ видно, что порядки безконечностей, къ которымъ стремятся опредѣлители

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega'_0},\ \frac{\partial \Delta}{\partial \omega''_0}, \ldots \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0^{\,n-1}},$$

суть цѣлыя положительныя числа. Замѣтивъ это и принявъ во вниманіе строй элемента $\omega_r^{\,k}$ при $r < k$, заключаемъ, что предѣлы выраженій

$$\omega'_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega'_0},\ \omega''_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega''_0}, \ldots \omega_0^{\,n-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0^{\,n-1}}$$

при $\xi = -\infty$ суть нули. Такимъ образомъ при $\xi = -\infty$ имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\lim \Delta = \lim \left(\omega_0 \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0} \right).$$

Такъ какъ предѣлъ ω_0 есть единица, то можно написать

$$\lim \Delta = \lim \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0}.$$

Совершенно такимъ же образомъ получаются равенства

$$\lim \frac{\partial \Delta}{\partial \omega_0} = 1! \lim \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1}$$

$$\lim \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1} = 2! \lim \frac{\partial^3 \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \partial \omega''_2}$$

. . . .

$$\lim \frac{\partial^{n-1} \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-2}_{n-2}} = (n-1)! \lim \frac{\partial^n \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-1}_{n-1}}.$$

Перемноживъ предыдущія равенства и замѣтивъ, что

$$\frac{\partial^n \Delta}{\partial \omega_0 \partial \omega'_1 \ldots \partial \omega^{n-1}_{n-1}} = 1,$$

найдемъ

$$\lim \Delta = 1!\, 2!\, 3! \ldots (n-1)!$$

Такимъ образомъ, убѣждаемся, что, по мѣрѣ приближенія ξ къ $-\infty$, детерминантъ Δ стремится къ произведенію своихъ діагональныхъ элементовъ. Но и при всякомъ другомъ значеніи ξ этотъ детерминантъ имѣетъ ту же величину, какую онъ имѣетъ при $\xi = -\infty$. Слѣдовательно, каково бы ни было ξ, детерминантъ Δ опредѣлится равенствомъ

$$\Delta = 1!\; 2!\; 3! \ldots (n-1)!$$

Правая часть этого равенства ни при какомъ n не равняется нулю. Отсюда заключаемъ, что отношеніе

$$\omega = C_0 \omega_0 + C_1 \omega_1 + , \ldots + C_{n-1} \omega_{n-1}$$

выражаетъ полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi} \omega.$$

5. Предыдущіе результаты мы получили первоначально, принимая уравненіе

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^u}=e^{\xi}\omega$$

за предѣльное состояніе уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n}=x^{-n+\frac{n}{k}}u$$

при $k=0$. Мы предпочли дать этимъ результатамъ прямыя доказательства, найдя ихъ болѣе простыми. Но вопросъ, къ которому мы подошли теперь, требуетъ выясненія упомянутой выше точки зрѣнія. Итакъ, будемъ искать состояніе, къ которому стремится уравненіе

$$\frac{d^n u}{dx^n}=x^{-n+\frac{n}{k}}u$$

при $k=0$. Съ этою цѣлью измѣнимъ перемѣнное x по формулѣ:

$$x=\left(\frac{n-nk}{k}\right)^k\left(1+\frac{k\xi}{n-nk}\right);$$

результатомъ преобразованія явится уравненіе

$$\frac{d^n u}{d\xi^n}=\left(1+\frac{k\xi}{n-nk}\right)^{\frac{n-nk}{k}}u.$$

Положивъ здѣсь $k=0$, получимъ

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n}=e^{\xi}\omega,$$

гдѣ ω означаетъ предѣлъ u при $k=0$.

Введемъ новое перемѣнное z и свяжемъ его съ x посредствомъ формулы:

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}},$$

тогда очевидно будемъ имѣть

$$kx^{\frac{1}{k}} = nz^{\frac{1}{n}} = (n - kn)\left(1 + \frac{k\xi}{n - kn}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Положивъ здѣсь $k = 0$, получимъ

$$\lim\left(kx^{\frac{1}{k}}\right) = nz^{\frac{1}{n}} = ne^{\frac{\xi}{n}}.$$

Такимъ образомъ, мы подтвердили нашу мысль и кромѣ того нашли, что для вычисленія ω нужно функцію u выразить въ перемѣнномъ z по формулѣ

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}},$$

въ результатѣ нужно положить $k = 0$ и затѣмъ замѣнить z посредствомъ e^{ξ}.

Легко однако видѣть, что въ какомъ бы изъ частныхъ интеграловъ уравненія

$$\frac{dk^n}{dx^n} = x^{-n + \frac{u}{k}} n$$

мы ни полагали $k = 0$, результатомъ такого положенія всякій разъ окажется функція ω_0, сопровождаемая тѣмъ или другимъ постояннымъ множителемъ. И въ самомъ дѣлѣ, при положительномъ k полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n + \frac{u}{k}} u$$

выражается отношеніемъ

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n,$$

въ которомъ положено

$$u_r = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{p + \frac{k(n-r)}{n}}}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(1 + p + \frac{ki - kr}{n}\right)}$$

$$nz^{\frac{1}{n}} = kx^{\frac{1}{k}}.$$

Ясно, что при $k = 0$ всѣ функціи

$$u_1, \; u_2 \dots u_n$$

дѣлаются порознь равными $\omega_0(e^{\xi})$, какъ мы и утверждали. Отсюда видно, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$$

можно получить не иначе, какъ по способу Даламбера. Слѣдовательно, мы должны отыскать предѣлъ, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{u_r - u_\varrho}{k}$$

при $k = 0$. Такъ какъ каждое изъ чиселъ r и ϱ сопровождается множителемъ k, то предѣлъ отношенія

$$\frac{u_r - u_\rho}{k}$$

не зависитъ ни отъ r, ни отъ ρ. Поэтому вмѣсто предыдущаго отношенія можно взять такое

$$\frac{u_2 - u_1}{k}.$$

Если, развивая идею Даламбера, составимъ выраженіе

$$\frac{u_r - u_\rho}{k} - \frac{u_\rho - u_\sigma}{k},$$

которое уничтожается при $k = 0$ и которое ни при какомъ, даже весьма маломъ, k не перестаетъ удовлетворять уравненію

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n + \frac{u}{k}} u,$$

то поймемъ, что предѣлъ, къ которому стремится отношеніе

$$\frac{u_r - 2u_\rho + u_\sigma}{k^2},$$

будетъ, подобно предѣлу отношенія

$$\frac{u_2 - u_1}{k},$$

интеграломъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi} \omega.$$

Такъ какъ предыдущее выраженіе не зависитъ въ предѣлѣ ни отъ r, ни отъ ρ, ни отъ σ, то мы можемъ взять вмѣсто него такое

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{k^2}.$$

Разсматривая это выраженіе, легко уже перейти къ общему заключенію, которое, очевидно, состоитъ въ слѣдующемъ. Предѣлы отношеній

$$u_1, \qquad \frac{1}{k}(u_2 - u_1), \qquad \frac{1}{k^2}(u_3 - 2u_2 + u_1),$$

$$\frac{1}{k^n}\left(u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}u_{n-2} + \dots + (-1)^n u_1\right)$$

суть такіе частные интегралы уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega,$$

изъ которыхъ можно составить полный его интегралъ. Общій видъ перечисленныхъ выше отношеній выражается формулой

$$\frac{1}{k^\rho}\left(u_\rho - \rho u_{\rho-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}u_{\rho-2} + \dots + (-1)^\rho u_1\right),$$

которая при $k = 0$ пріобрѣтаетъ слѣдующее значеніе

$$\frac{1}{\rho!}\frac{d^\rho}{dk^\rho}\left(u_\rho - \rho u_{\rho-1} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}u_{\rho-2} + \dots + (-1)^\rho u_1\right)_{k=0}.$$

Считаемъ неизлишнимъ замѣтить, что въ этой формулѣ вмѣсто функцій

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \dots \dots u_\rho$$

можно взять функціи

$$C_1u_1,\ C_2u_2, \dots \dots C_\rho u_\rho,$$

гдѣ независящія отъ z числа

$$C_1,\ C_2, \ldots\ldots C_\rho$$

равны между собою при $k=0$.

6. Отъ формы функцій

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots\ldots u_n$$

зависитъ форма интеграловъ уравненія

$$\frac{d^n\omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega.$$

Желая осуществить форму опредѣленныхъ интеграловъ, мы должны выразить въ этой же формѣ и функціи

$$u_1,\ u_2, \ldots\ldots u_n.$$

Чтобы сдѣлать это, обратимся къ выраженію

$$\frac{z^{p+\frac{k(n-r)}{n}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(1+p+\frac{ki-kr}{n}\right)},$$

представляющему общій членъ того ряда, которымъ опредѣляется u_r. Отбрасывая множителей независящихъ ни отъ p, ни отъ x, мы можемъ привести предыдущее выраженіе къ слѣдующему виду

$$\frac{n^{np+1} z^{p+\frac{k(n-r)}{n}}}{\Gamma(1+np)} \prod_{i=1}^{n-r} \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p+\frac{ki}{n}\right)} \prod_{i=1}^{r-1} \frac{\Gamma\left(p+\frac{r-i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)}.$$

Отсюда, принимая во вниманіе формулы А. В. Лѣтникова

$$\frac{\Gamma\left(1+p-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)}=z^{-p-\frac{ki}{n}}D_z^{-\frac{(k+1)i}{n}}z^{p-\frac{i}{n}},$$

$$\frac{\Gamma\left(p+\frac{r-i}{n}\right)}{\Gamma\left(1+p-\frac{k(r-i)}{n}\right)}=$$

$$=z^{-p+\frac{k(r-i)}{n}}D_z^{\frac{(k+1)(r-1)}{n}-1}z^{\frac{r-i}{n}+p-1},$$

гдѣ дифференцированіе начинается отъ $z=0$, и отбрасывая постоянныхъ множителей относительно p и x, получимъ

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}}\prod_{i=1}^{n-r}\left(D_z^{-\frac{i(k+1)}{n}}z^{-\frac{(k+1)i+k}{n}}\right)z^k\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r-1}\left(D_z^{\frac{(k+1)(r-i)}{n}-1}z^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1}\right)\frac{n^{np+1}z^p}{\Gamma(1+np)}.$$

Сообщивъ здѣсь цѣлому положительному числу p всѣ значенія отъ 0 до ∞ и взявъ сумму полученныхъ результатовъ, найдемъ

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}}\prod_{i=1}^{n-r}\left(D_z^{-\frac{i(k+1)}{n}}\,z^{-\frac{(k+1)\,i+k}{n}}\right)z^k\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r-1}\left(D_z^{-\frac{(k+1)(r-i)}{n}-1}\,z^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1}\right)\theta(z)$$

гдѣ, обозначая черезъ λ первообразный корень уравненія $\lambda^n=1$, для краткости положено

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{np+1}\,z^p}{\Gamma(1+np)}=\theta(z)=\sum_{p=0}^{n-1}e^{n\lambda^p z^{\frac{1}{n}}}.$$

До сихъ поръ мы разумѣли подъ k положительное число. Введемъ теперь новое условіе, именно положимъ

$$0<k<\frac{1}{n-1}.$$

Тогда всѣ указатели дифференцированій въ предыдущей формулѣ будутъ отрицательны и формулу эту, опуская множитель, независящій отъ z, можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$z^{\frac{k(n-r-1)}{n}}\prod_{i=1}^{n-r}\left(\int_0^{\alpha_{i-1}}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{(k+1)i}{n}-1}\,\alpha_i^{-\frac{(k+1)i+k}{n}}\,d\alpha_i\right)\alpha^k_{n-r}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{r-1}\left(\int_0^{\beta_{i-1}}(\beta_{i-1}-\beta_i)^{\frac{(k+1)(i-r)}{n}}\,\beta_i^{\frac{(k+1)(r-i)-k}{n}-1}\,d\beta_i\right)\theta(\beta_{r-1})$$

гдѣ положено

$$\alpha_0 = z \qquad \beta_0 = \alpha_{n-r}.$$

Такъ выражается частный интегралъ уравненія

$$\frac{d^n u}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{k}} u,$$

отличающійся отъ u_r такимъ постояннымъ множителемъ C_r, который при $k=0$ перестаетъ зависѣть отъ r. По смыслу формулы, выведенной въ предыдущемъ параграфѣ, мы должны теперь найти значеніе выраженія

$$\frac{d^\rho C_r u_r}{dk^\rho}$$

при $k=0$. Если всѣ логариѳмы, вводимыя дифференцированіями, будемъ ставить подъ знаки послѣднихъ интегрированій и если послѣ каждаго дифференцированія сумму логариѳмовъ будемъ замѣнять логариѳмомъ произведенія, то, положивъ $k=0$ по совершеніи ϱ дифференцированій, найдемъ:

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(\int_0^{\alpha_{i-1}} (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1} \alpha_i^{-\frac{i}{n}} d\alpha_i\right) \theta(\alpha_{n-1}) \times$$

$$\times \log^\rho \alpha_{n-r}\alpha_{n-r+1}\ldots\alpha_{n-1}\, z^{\frac{n-r-1}{n}} \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1}-\alpha_i)^{\frac{i}{n}-1} \alpha_i^{-\frac{i+1}{n}}.$$

Поставивъ это выраженіе на мѣсто

$$\lim\left(\frac{d^{\varrho} C_r u_r}{dk^{\varrho}}\right)_{k=0}$$

въ формулу

$$\sum_{r=1}^{\varrho} \frac{(-1)^{\varrho}}{(\varrho-r)!} \lim\left(\frac{d^{\varrho} C_r u_r}{dk^{\varrho}}\right)_{k=0},$$

мы окончательно разрѣшимъ нашу задачу.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя ϱ черезъ числа ряда

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n-1,$$

мы получимъ изъ упомянутой формулы n частныхъ интеграловъ уравненія

$$\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega,$$

посредствомъ которыхъ можемъ отыскать потомъ и полный его интегралъ.

7. Если отнесемъ изложенный анализъ къ тому случаю, когда $n = 2$, то увидимъ, что полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} = e^{\xi}\omega$$

выражается отношеніемъ

$$\omega = C\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) d\alpha +$$

$$+ C'\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) \lg\left(z^{-\frac{1}{2}}(z-\alpha)\right) d\alpha,$$

гдѣ $z = e^{\xi}$, а C и C' суть постоянныя произвольныя. На этомъ примѣрѣ легко провѣрить истинность общихъ умозаключеній, высказанныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

Такъ какъ интегралъ

$$\int_0^z \left(z-\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right) d\alpha\,,$$

очевидно, представляетъ сумму ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{e^{p\xi}}{\Gamma(1+p)^2}\,,$$

то для повѣрки достаточно разсмотрѣть множитель при C'.

Если развернемъ

$$\operatorname{Csh}\left(2\alpha^{\frac{1}{2}}\right)$$

по степенямъ α и сдѣлаемъ предѣлами интегрированія 0 и 1, то представимъ упомянутый множитель въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p} z^p}{\Gamma(1+2p)} \int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}} \left(\lg z^{\frac{1}{2}} + \lg(1-\beta)\right) d\beta.$$

Отсюда въ силу равенствъ

$$\int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}} d\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)}\,,$$

$$\int_0^1 (1-\beta)^{-\frac{1}{2}} \beta^{p-\frac{1}{2}} \lg(1-\beta)\, d\beta =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \left(\lg 4 - c - \frac{d}{dp} \lg \Gamma(1+p)\right)$$

найдемъ, отбрасывая π, такую формулу

$$\left(\lg 4z^{\frac{1}{2}} - c\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(1+p)^2} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{\Gamma(1+p)} \frac{d}{dp} \lg \Gamma(1+p).$$

Эта формула представляетъ собою частный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} = e^{\xi}\omega,$$

что и нужно было доказать.

Урюпинская станица
1887 года Октября 6 дня.

Приложеніе I.

На основаніи § 145 Высочайше утвержденнаго 23-го августа 1884 года Устава Императорскихъ Россійскихъ университетовъ утвержденъ г. министромъ народнаго просвѣщенія, 9-го октября 1887 года.

УСТАВЪ
ХАРЬКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

§ 1.

Харьковское математическое общество состоитъ при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ и имѣетъ цѣлью содѣйствовать разработкѣ какъ чисто научныхъ, такъ и педагогическихъ вопросовъ изъ области математическихъ наукъ.

§ 2.

Общество состоитъ изъ: а) дѣйствительныхъ членовъ, б) членовъ-корреспондентовъ и в) почетныхъ членовъ.

§ 3.

Дѣйствительными членами считаются, безъ избранія, профессора и преподаватели математическихъ наукъ въ университетѣ и въ другихъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ г. Харькова.

§ 4.

Преподаватели математическихъ наукъ въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ г. Харькова, какъ казенныхъ, такъ и частныхъ, а также лица, спеціально занимающіяся тою или другою отраслью математическихъ наукъ, избираются въ дѣйствительные члены общества закрытою подачей голосовъ.

§ 5.

Членами-корреспондентами избираются, также закрытою подачей голосовъ, лица, принимающія участіе въ занятіяхъ общества, но не живущія въ г. Харьковѣ.

§ 6.

Почетными членами избираются извѣстные ученые, оказавшіе содѣйствіе развитію дѣятельности общества.

§ 7.

Дѣлами общества завѣдуетъ распорядительный комитетъ, состоящій изъ предсѣдателя, двухъ его товарищей и секретаря.

§ 8.

Распорядительный комитетъ ежегодно избирается закрытою баллотировкой изъ дѣйствительныхъ членовъ въ особомъ засѣданіи, для этого назначенномъ, всѣми присутствующими членами.

Примѣч. 1. Для производства избраній въ распорядительный комитетъ требуется присутствіе въ засѣданіи не менѣе одной пятой ($^1/_5$) всего числа находящихся въ Харьковѣ дѣйствительныхъ членовъ общества.

Примѣч. 2. Если въ засѣданіе, назначенное для избраній въ распорядительный комитетъ, не прибудетъ указанное въ предыдущемъ примѣчаніи число членовъ, то назначается для той же цѣли второе засѣданіе, при чемъ члены общества увѣдомляются о причинѣ, по которой не состоялось предыдущее засѣданіе, и это второе засѣданіе должно считаться состоявшимся при всякомъ числѣ членовъ, въ него прибывшихъ.

Примѣч. 3. Предсѣдатель и одинъ изъ товарищей должны быть избраны изъ числа профессоровъ университета.

§ 9.

На распорядительномъ комитетѣ лежитъ обязанность руководить дѣлами общества, входить въ сношенія съ другими учеными обществами и учрежденіями, завѣдывать библіотекой общества и изданіемъ его трудовъ. При этомъ предсѣдатель наблюдаетъ за исполненіемъ устава общества и дѣлаетъ распоряженія о печатаніи и выпускѣ въ свѣтъ его изданій, а секретарь ведетъ переписку и завѣдуетъ кассой общества.

Примѣчаніе. Изданія общества, какъ состоящаго при университетѣ, въ силу § 138 Общаго устава Императорскихъ Россійскихъ университетовъ, выходятъ въ свѣтъ безъ предварительной цензуры.

§ 10.

Очередныя засѣданія общества назначаются періодически, въ заранѣе опредѣленные сроки. Предсѣдатель или, за его отсутствіемъ, одинъ изъ его товарищей открываетъ и закрываетъ засѣданіе и руководитъ порядкомъ онаго. Протоколы засѣданій ведутся секретаремъ.

§ 11.

Въ засѣданіяхъ общества: а) выслушивается протоколъ предыдущаго засѣданія, который при этомъ и подписывается присутствовавшими въ этомъ засѣданіи членами, б) слушаются и обсуждаются сообщенія членовъ о собственныхъ научныхъ изслѣдованіяхъ и выводахъ въ области высшей и элементарной математики, какъ чистой, такъ и прикладной, а также сообщенія объ усовершенствованіяхъ или даже видоизмѣненіяхъ пріемовъ полученія научныхъ выводовъ, в) слушаются сообщенія изъ области математической литературы, какъ научной, такъ и педагогической, г) обсуждаются вопросы, относящіеся къ преподаванію математическихъ наукъ.

§ 12.

Въ засѣданіяхъ общества могутъ принимать участіе, съ разрѣшенія предсѣдателя, также и постороннія лица или въ качествѣ референтовъ, или въ качествѣ слушателей.

§ 13.

Опредѣленныхъ денежныхъ взносовъ отъ членовъ общества не требуется. Матеріальныя же средства общества могутъ составляться: а) изъ добровольныхъ пожертвованій какъ самихъ членовъ, такъ и постороннихъ лицъ, б) изъ суммъ, выручаемыхъ отъ продажи изданій общества и в) изъ пособій отъ университета. На эти средства издаются труды общества и пополняется библіотека общества.

§ 14.

Общество имѣетъ свою печать и бланки съ надписью «Харьковское математическое общество».

§ 15.

Общество можетъ просить объ измѣненіи Устава сообразно указаніямъ опыта, о чемъ и должно представить черезъ попечителя харьковскаго учебнаго округа на утвержденіе г. министра народнаго просвѣщенія.

Приложенiе II.

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ

ПОМѢЩЕННЫХЪ

ВЪ ПЕРВЫХЪ 18 ВЫПУСКАХЪ

СООБЩЕНIЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1879—1887.

I. АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ
АВТОРОВЪ.

цахъ изотропныхъ срединъ. -80, II, 81 — 127. — Объ одномъ частномъ случаѣ приведенія уравненія 4-ой степени къ биквадратному -81, II, 116 — 120. — О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ. -82, I, 3 — 82. — Рѣшеніе основныхъ уравненій теоріи кристаллической поляризаціи. -82, II, 124 — 138. — Распространеніе способа Абулъ-Джуда для опредѣленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ. -84, I, 37 — 40. — Опытъ изученія стаціонарнаго состоянія упругой изотропной среды. -84, II, 97 — 121. — О приложеніяхъ закона сохраненія энергіи. -84, III. 215 — 221. — Къ электромагнитной теоріи поляризаціи свѣта. -84, III, 233 — 239. — Физическія замѣтки. -85, I, 59 — 66. — Объ одномъ частномъ законѣ поглощенія свѣта. -85, I, 67 — 81. — О теоріи дисперсіи Фойхта. -86, I, 17 — 30. — О minimum-ѣ отклоненія свѣтоваго луча призмою. -87, I, 53 — 57.

Graindorge J. Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\operatorname{ctg} x . \frac{dy}{dx} - y = 0$. -80, I, 46—47.

Деларю Д. М. Замѣтка объ одномъ предложеніи изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ. -79, 19 — 24.

Ермаковъ В. П. Замѣна перемѣнныхъ, какъ способъ для разысканія интегрирующаго множителя дифференціальнаго уравненія и какъ средство для пониженія порядка системы дифференціальныхъ уравненій. -81, I, 3 — 19. — Задача (для молодыхъ ученыхъ). -87, II, 66 — 67.

Жуковскій Н. Е. О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями. -87, I, 31 — 46.

Имшенецкій В. Г. Опредѣленіе силы движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи ея координатъ. -79, 5 — 15. — Задача: раздѣлить площадь данной трапеціи на *n* равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ. -79, 25—31. — Каноническія дифференціальныя уравненія гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны, въ случаѣ потенціала силъ. -80, I, 18—33, 53—74.— Линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка; интегрируемыя посредствомъ множителя. -80, I, 48—52. — «Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіемъ» М. Е. Ващенко-Захарченко. -80, II. 129—135. — Замѣтка о функціяхъ комплекснаго перемѣннаго. -80, II, 173—187. — О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій. -82, II, 99—109.

Клюшниковъ А. А. О приведеніи уравненій относительнаго движенія системы матерьяльныхъ точекъ къ каноническому виду. -80, I, 3—17.

Коркинъ А. Н. О кривизнѣ поверхностей. -87, I, 3—10.

Левицкій Г. В. Замѣтка по поводу статьи проф. Гюнтера. Объ одной задачѣ сферической астрономіи. -81, I, 80—83.

Ляпуновъ А. М. Нѣкоторое обобщеніе формулы Лежень-Дирихле для потенціальной функціи эллипсоида на внутреннюю точку. -85, II, 120—130. — О тѣлѣ наибольшаго потенціала. -86, II, 63—73.

Марковъ А. А. Опредѣленіе наибольшаго и наименьшаго значенія нѣкоторой величины. -83, II, 95—104. — Доказательство нѣкоторыхъ неравенствъ П. Л. Чебышева. -83, II, 105—114. — Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе уклоняться отъ нуля. -84, I, 83—92. — Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей. -85, I, 29—33. — О распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій. -85, II, 89—98.— О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда. -86, II, 51—62, 95—113.

Мещерскій И. В. Дифференціальныя связи въ случаѣ одной матеріальной точки. -87, II, 68—79.

Новиковъ П. М. Особенный случай *maximum*'а и *minimum*'а функціи со многими перемѣнными. -83, I, 43 — 46. — О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй варіаціи опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія. -84, I, 65 — 72.

Поссе К. А. О дополнительномъ членѣ въ формулѣ П. Л. Чебышева для приближеннаго выраженія одного опредѣленнаго интеграла черезъ другіе, взятые въ тѣхъ-же предѣлахъ. -83, I, 5 — 17. — Къ вопросу о предѣльныхъ значеніяхъ интеграловъ или суммъ. -85, I, 35 — 58. — О функціяхъ, подобныхъ функціямъ Лежандра. -85, II, 155 — 169.

Пташицкій И. Л. О разложеніи въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій со многими перемѣнными. -84, I, 73 — 79.

Сомовъ П. О. О деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній. -86, II, 74 — 94.

Тихомандрицкій М. А. Замѣтка о введеніи Θ-функцій въ теорію эллиптическихъ функцій. -83, I, 47 — 67. — Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи. -83, II, 79 — 94. — Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ. -84, III, 187 — 196. — Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ. -85, I, I — XXII (приложеніе). — Отдѣленіе алгебраической части гиперэллиптическихъ интеграловъ. -85, II, 99 — 114. — Къ теоріи радіуса кривизны. -86, I, 33 — 41. — Разность n-го порядка логариѳмической функціи. -86, I, 42 — 44.

Тороповъ К. А. Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. -84, III, 199—213. — Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ. -85, I, 3 — 27.

Флоровъ П. С. Замѣтка объ уравненіи $\frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha e^x + 2)\frac{dy}{dx} + y = 0$. -83, II, 127 — 128. — Объ условіяхъ интегрируемости уравненія $\frac{d^3u}{dx^3} + x^m u = 0$. -83, II, 129—133.—Объ уравненіяхъ Рикатти. -84, I, 5—36.—Къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. -84, II, 143—177.—Объ уравненіи $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$. -85, II, 131—154.—Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ. -86, I, 3—14.—Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціальнаго уравненія. -86, I, 31—32.—Объ интегрирующемъ множителѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. -87, I, 47—51.—Объ уравненіи $\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$. -87. II, 81—140.

Фроловъ О. П. Замѣтка объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія. -80, I, 36—43.

Чебышевъ П. Л. О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ-же предѣлахъ. -82, II, 93—98.

II. АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ.

Д.

О движенiи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями — *Жуковскаго.* -87, I, 31 — 46. — О деформацiи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣренiй — *Сомова.* -86, II, 74 — 94. — О теорiи дисперсiи Фойхта — *Грузинцева.* -86, I, 17 — 30. — Линейныя дифференцiальныя уравненiя 2-го порядка, интегрируемыя посредствомъ множителя — *Имшенецкаго.* -80, I, 48 — 52.

Ж.

О движенiи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями — *Жуковскаго.* -87, I, 31 — 46.

З.

Задача (для молодыхъ ученыхъ) *Ермакова.* -87, II, 66 — 67.

И.

О дополнительномъ членѣ въ формулѣ П. Л. Чебышева для приближеннаго выраженiя одного опредѣленнаго интеграла черезъ другiе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ — *Поссе.* -83, I, 5 — 17. — Нѣсколько словъ по поводу теоремъ П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкаго объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ произведенiя функцiй — *Андреева.* -82, II, 110 — 123. — Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференцiальнаго уравненiя — *Флорова.* -86, I, 31 — 32. — О приближенныхъ выраженiяхъ однихъ интеграловъ черезъ другiе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ — *Чебышева.* -82, II, 93 — 98. — Къ вопросу о предѣльныхъ значенiяхъ интеграловъ или суммъ — *Поссе.* -85, I, 35 — 58. — Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} - y = 0$ — *Грэндоржа.* -80, I, 46—47. — Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій — *Торопова.* -84, III, 199—213. — Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ — *его-же.* -85, I, 3—27. — Объ интегрированіи уравненія $x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^{\mu}y = 0$ — *Алексѣевскаго.* -83, II, 115—126. — Объ интегрированіи уравненія $\frac{d^ny}{dz^n} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \beta = 0$ — *его-же.* -84, I, 41—64. — Объ интегрированіи одного линейнаго уравненія n-го порядка — *его-же.* -84, III, 222—232. — Къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій — *Флорова.* -84, II, 143—177. — Объ условіяхъ интегрируемости уравненія $\frac{d^3u}{dx^3} + x^mu = 0$ — *его же.* -83, II, 129—133. — Замѣна перемѣнныхъ, какъ способъ для розысканія интегрирующаго множителя дифференціальнаго уравненія и какъ средство для пониженія порядка системы дифференціальныхъ уравненій — *Ермакова.* -81, I, 3—19. — Объ интегрирующемъ множителѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій — *Флорова.* -87, I, 47—51.

К.

Каноническія дифференціальныя уравненія гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны, въ случаѣ потенціальныхъ силъ — *Имшенецкаго.* -80, I, 18—33, 53—74. — О приведеніи уравненій относительнаго движенія системы матерьяльныхъ точекъ къ каноническому виду — *Клюшникова.* -80, I, 3—17. — Къ теоріи радіуса кривизны — *Тихомандрицкаго.* -86, I, 33—41. — О кривизнѣ поверхностей — *Коркина.* -87, I, 3—10.

Л.

Вычисленіе хода лучей въ двояко преломляющемъ кристаллѣ— *Грузинцева.* -79, 32 50.—О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ—*его-же.* -82, I, 3—82.

М.

О многоугольникахъ Понселе—*Андреева.* -81, II, 91—112. -84, II, 123—142.—Распространеніе способа Абулъ-Джуда для опредѣленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ—*Грузинцева.* -84, I, 37—40.— Особенный случай maximum'а и minimum'а функціи со многими перемѣнными—*Новикова.* -83, I, 43—46.

Н.

«Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіемъ» М. Е. Ващенко-Захарченко—*В. И.* -80, II, 129—135.—Опредѣленіе наибольшаго и наименьшаго значенія нѣкоторой величины—*Маркова.* -83, II, 95—104.— Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей—*его-же.* -85, I, 29—33.—О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій—*Имшенецкаго.* -82, II, 99—109.—Доказательство нѣкоторыхъ неравенствъ П. Л. Чебышева—*Маркова.* -83, II, 105—114.

О.

О minimum-ѣ отклоненія свѣтоваго луча призмою—*Грузинцева.* -87, I, 53—57.—Математическая теорія отраженія и преломленія поляризованнаго свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ—*его-же.* -80, II, 81—127. Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ—*Тихомандрицкаго.* -85, I, I—XXII.

нечныхъ рядовъ. — *Флорова.* -86, I, 3 — 14. — Замѣтка объ одномъ предложеніи изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ — *Деларю.* -79, 19 — 24.

Т.

Задача: Раздѣлить площадь трапеціи на *n* равновеликихъ частей прямыми, параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ — *Имшенецкаго.* -79, 25 — 31. — Гидродинамическая теорія тренія хорошо смазаннаго шипа въ подшипникѣ — *Гречанинова.* -87, I, 11 — 36.

У.

Опытъ изученія стаціонарнаго состоянія упругой изотропной среды — *Грузинцева.* -84, II, 97 — 121. — Замѣтка объ уравненіи: $\frac{d^2y}{dx^2} - (\alpha e^x + 2)\frac{dy}{dx} + y = 0$ — *Флорова.* -83, II, 127 — 128. — Объ уравненіи $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$ — *его-же.* -85, II, 131 — 154. — Объ уравненіи $\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$ — *его-же.* -87, II, 81 — 104. — О распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій — *Маркова.* -85, II, 89 — 98. — Объ одномъ частномъ случаѣ приведенія уравненія 4-й ст. къ биквадратному — *Грузинцева.* -81, II, 116 — 120. — Замѣтка объ обобщеніи уравненія Рикатти — *Алексѣевскаго.* -84, I, 80 — 82. — Объ уравненіяхъ Рикатти — *Флорова.* -84, I, 5 — 36.

Ф.

Физическія замѣтки — *Грузинцева.* -85, I, 59 — 66. — Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе уклоняться отъ нуля — *Маркова.* -84, I, 83 — 92. — Замѣтка о введенiи Θ-функцiй въ теорiю эллиптическихъ функцiй — *Тихомандрицкаго.* -83, I, 47 — 67. — Замѣтка о функцiяхъ комплекснаго перемѣннаго — *Имшенецкаго.* -80, II, 173 — 187. — О функцiяхъ, подобныхъ функцiямъ Лежандра — *Поссе.* -85, II, 155 — 169.

Ш.

Мишель Шаль — *Андреева.* -81, I, 23 — 77. — Карлъ-Георгъ-Христiанъ фонъ-Штаудтъ — *его-же.* -80, II, 167 — 172.

Э.

Выводъ основныхъ предложенiй теорiи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функцiи — *Тихомандрицкаго.* -83, II, 79 — 94. — Обращенiе эллиптическихъ интеграловъ — *его же.* -84, III, 187 — 196. — О приложенiяхъ закона сохраненiя энергiи — *Грузинцева.* -84, III, 215 — 221.

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 557
Математики і Механіки ХДУ