УДК 517.54

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. VI*

В этой части работы продолжается исследование радиусов предельного круга Вейля (§ 12). Полученные результаты исполь-

---

* Первые пять частей статьи опубликованы в выпусках 37, 38, 41, 42 и 45 этого сборника.

зуются затем при описании регулярных расширений аналитических сжимающих матриц-функций (§ 13).

§ 12. Исследование радиусов предельного круга Вейля. Согласно теореме 11.1

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \varphi^*(\zeta)\,\varphi(\zeta), \tag{12.1}$$

где $\varphi(\zeta) = \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}})(I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F$. Здесь ортопроектор $I - P_{\text{н}}$ проектирует на подпространство $H_{\text{н}}^{(c)}$. Это подпространство инвариантно относительно сжатия T и сужение T на $H_{\text{н}}^{(c)}$ представляет собой максимальный односторонний сдвиг $V_{\text{н}}^{(c)}$ (см. часть III работы)*. Пусть L_0 — порождающее подпространство для $V_{\text{н}}^{(c)}$, а $P_{\text{н}}^{(0)}$ — ортопроектор в H на L_0. Тогда $H_{\text{н}}^{(c)} = L_0 \oplus T(L_0) \oplus \ldots \oplus T^n(L_0) \oplus \ldots$, $I - P_{\text{н}} = P_{\text{н}}^{(0)} + T P_{\text{н}}^{(0)} T^* + \ldots + T^n P_{\text{н}}^{(0)} T^{*n} + \ldots$

Прежде всего отметим, что

$$(I - P_{\text{н}}) F \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}}) = P_{\text{н}}^{(0)}.$$

Это следует из того, что оператор $K = (I - P_{\text{н}}) F \rho_{d,\infty}^{-\frac{1}{2}}(0, \theta) F^*(I - P_{\text{н}})$ удовлетворяет условиям $K^* = K$, $K^2 = K$, а его образ совпадает с L_0. Это позволяет (12.1) переписать в виде

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = F^*(I - \bar{\zeta} P_{\text{н}} T^*)^{-1} P_{\text{н}}^{(0)} (I - \zeta T P_{\text{н}})^{-1} F.$$

Учитывая, что $T^{*k}(L_0) \subset H_{\text{н}}$, получаем

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = F^*(I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P_{\text{н}}^{(0)} (I - \zeta T)^{-1} F. \tag{12.2}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \hat{\theta}) = G(I - \bar{\zeta} T)^{-1} P_{\text{у}}^{(0)} (I - \zeta T^*)^{-1} G^*, \tag{12.3}$$

где $P_{\text{у}}^{(0)}$ — ортопроектор на порождающее для одностороннего сдвига $V_{\text{у}}^{(c)}$ подпространство. Таким образом,

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \overset{*}{\varphi_0}(\zeta)\,\varphi_0(\zeta), \quad \rho_{d,\infty}(\xi, \hat{\theta}) = \psi_0(\bar{\zeta})\,\overset{*}{\psi_0}(\bar{\zeta}), \tag{12.4}$$

где

$$\varphi_0(\zeta) = P_{\text{н}}^{(0)} (I - \zeta T)^{-1} F; \tag{12.5}$$

$$\psi_0(\zeta) = G(I - \zeta T)^{-1} P_{\text{у}}^{(0)}. \tag{12.6}$$

Функции $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ будем называть дефектными функциями сжимающей аналитической функции.

---

* Заметим, что подпространства $H_{\text{н}}^{(c)}$ и $H_{\text{у}}^{(c)}$ вообще говоря не обязательно ортогональны друг другу. На это внимание автора обратил Д. З. Аров.

Теорема 12.1. *Имеют место равенства*

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)-\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}P_{\text{н}}(I-\zeta T)^{-1}F, \tag{12.7}$$

$$I-\hat{\theta}^*(\zeta)\,\hat{\theta}(\zeta)-\rho_{d,\infty}(\zeta,\hat{\theta})=(1-|\zeta|^2)\,G(I-\bar{\zeta}T)^{-1}\,P_{\text{у}}(1-\zeta T^*)^{-1}G^*. \tag{12.8}$$

Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно установить равенство (12.8). Как показано в [2, с. 149],

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-\zeta T)^{-1}F.$$

Отсюда следует

$$I-\theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-P_{\text{н}})(I-\zeta T)^{-1}F+$$
$$+(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}P_{\text{н}}(I-\zeta T)^{-1}F,$$

и достаточно показать, что первое слагаемое в этой сумме равно $\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta)$. Действительно,

$$(1-|\zeta|^2)\,F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-P_{\text{н}})(I-\zeta T)^{-1}F=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\,F^*\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\zeta}^kT^{*k}\sum_{n=0}^{\infty}T^nP_{\text{н}}^{(0)}T^{*n}\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^lT^lF=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\bar{\zeta}^k\zeta^lF^*T^{*k-n}P_{\text{н}}^{(0)}T^{l-n}F=$$
$$=(1-|\zeta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\bar{\zeta}^{k+n}\zeta^{l+n}F^*T^{*k}P_{\text{н}}^{(0)}T^lF=$$
$$=F^*\sum_{k=0}^{\infty}\bar{\zeta}^kT^{*k}P_{\text{н}}^{(0)}\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^lT^lF=$$
$$=F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}P_{\text{н}}^{(0)}(I-\zeta T)^{-1}F=\rho_{d,\infty}(\zeta,\theta),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Функции* $\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ *и* $(\psi_0(\zeta),\theta(\zeta))$ *являются сжимающими внутри единичного круга.*

§ 13. Радиусы предельных кругов Вейля и расширение сжимающих матриц-функций. Пусть $\theta(\zeta)\in S_{p,q}$ и $\Delta=(H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ — простой унитарный узел, х. ф. которого является $\theta(\zeta)$. Триангуляции

$$T=\begin{pmatrix}V_{\text{н}}^{(c)} & *\\ 0 & T_{\text{н}}\end{pmatrix};\quad T=\begin{pmatrix}T_{\text{у}} & *\\ 0 & V_{\text{у}}^{(c)}\end{pmatrix} \tag{13.1}$$

порождают соответственно регулярные факторизации х. ф. $\theta(\zeta)$ (см. [2]):

$$\theta(\zeta)=\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta),\quad \theta(\zeta)=\theta_{\text{у}}(\zeta)\,\theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta). \tag{13.2}$$

Здесь $\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta)$ и $\theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta)$ — х. ф. операторов $V_{\text{н}}^{(c)}$ и $V_{\text{у}}^{(c)}$, а $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ и $\theta_{\text{у}}(\zeta)$ — х. ф. соответственно $T_{\text{н}}$ и $T_{\text{у}}$. Простой подсчет показывает, что

$$\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta) = (0_{p\alpha},\ U_{\text{н}});\ \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ U_{\text{у}} \end{pmatrix},$$

где α и β — кратности односторонних сдвигов $V_{\text{н}}^{(c)}$ и $V_{\text{у}}^{(c)}$ соответственно, 0_{kl} — нулевая матрица с k строками и l столбцами, а $U_{\text{н}}$ и $U_{\text{у}}$ — унитарные матрицы. При надлежащем выборе базисов можно считать, что

$$\theta_{\text{н}}^{(c)}(\zeta) = (0_{p\alpha},\ I_p);\ \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ I_q \end{pmatrix}.$$

Но тогда из (13.2) следует

$$\theta_{\text{н}}(\zeta) = \begin{pmatrix} \theta_d(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix},\ \ \theta_{\text{у}}^{(c)}(\zeta) = (\theta_g(\zeta),\ \theta(\zeta)).$$

Теорема 13.1. *Имеют место факторизации*

$$\rho_{d,\infty}(\zeta, \theta) = \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta);\ \rho_{d,\infty}(\zeta,\ \widehat{\theta}) = \theta_g(\bar{\zeta})\,\theta_g^*(\bar{\zeta}). \tag{13.3}$$

Достаточно доказать первое из этих равенств. Из вида $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ следует

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) - \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta). \tag{13.4}$$

С другой стороны, учитывая, что $\theta_{\text{н}}(\zeta)$ является х. ф. оператора $T_{\text{н}}$, получаем (см. [2, с. 149])

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,F^* P_{\text{н}}(I - \bar{\zeta}T_{\text{н}}^*)^{-1}(I - \zeta T_{\text{н}})^{-1} P_{\text{н}} F.$$

Равенства

$$T_{\text{н}}^n P_{\text{н}} F = P_{\text{н}} T^n F,\ F^* P_{\text{н}} T_{\text{н}}^{*m} = F^* T^{*m} P_{\text{н}}$$

позволяют переписать последнее равенство в виде

$$I - \theta_{\text{н}}^*(\zeta)\,\theta_{\text{н}}(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)\,F^*(I - \bar{\zeta}T^*)^{-1} P_{\text{н}}(I - \zeta T)^{-1} F.$$

Учитывая (13.4), имеем

$$I - \theta^*(\zeta)\,\theta(\zeta) - \theta_d^*(\zeta)\,\theta_d(\zeta) =$$
$$= (1 - |\zeta|^2)\,F^*(I - \bar{\zeta}T^*)^{-1} P_{\text{н}}(I - \zeta T)^{-1} F,$$

и первое из равенств (13.3) следует теперь из равенства (12.7).

Как и в работе [3], договоримся считать аналитические сжимающие матрицы-функции $\theta_i(\zeta) \in S_{p,q}$ $(i = 1,\ 2)$ совпадающими, если существуют такие унитарные матрицы τ и τ', что $\theta_1(\zeta) = \tau\theta_2(\zeta)\,\tau'$. Тогда из (12.4) и (13.3) вытекает

Следствие. *Имеют место равенства* $\theta_d(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$, $\theta_g(\zeta) = \psi_0(\zeta)$, *т. е. факторизации*

$$\theta(\zeta) = (0_{p\alpha},\ I_p)\begin{pmatrix} \varphi_0(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix},\ \theta(\zeta) = (\psi_0(\zeta),\ \theta(\zeta))\begin{pmatrix} 0_{\beta q} \\ I_q \end{pmatrix}$$

являются регулярными и соответствуют триангуляциям (13.1)

В связи с изложенным представляют интерес следующие простые утверждения.

Лемма 13.1. *Пусть х. ф.* $\theta(\zeta)$ *простого унитарного узла* $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ *допускает регулярную факторизацию*

$$\theta(\zeta) = (O_{p\alpha'}, I_p)\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}. \qquad (13.5)$$

Тогда сжатие T *содержит максимальный односторонний сдвиг, кратность которого не меньше* α'.

Лемма 13.2. *Пусть х. ф.* $\theta(\zeta)$ *простого унитарного узла* $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ *допускает регулярную факторизацию*

$$\theta(\zeta) = (\theta_2(\zeta), \theta(\zeta))\begin{pmatrix}O_{\beta' q}\\ I_q\end{pmatrix}. \qquad (13.6)$$

Тогда сжатие T^* *содержит максимальный односторонний сдвиг, кратность которого не меньше* β'.

Определение. *Будем говорить, что аналитическая сжимающая матрица-функция* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *допускает регулярное расширение вверх на* α *строк (влево на* β *столбцов), если существует аналитическая сжимающая матрица-функция*

$$\theta_1(\zeta) \in S_{\alpha,q} \quad (\theta_2(\zeta) \in S_{p,\beta}),$$

такая, что матрица-функция $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ $((\theta_2(\zeta), \theta(\zeta)))$ *является сжимающей, при этом почти всюду на единичной окружности выполняется равенство*

$$\operatorname{rang}(I - \theta^*(e^{it})\theta(e^{it})) = \alpha + \operatorname{rang}(I - \theta^*(e^{it})\theta(e^{it}) - \theta_1^*(e^{it})\theta_1(e^{it}))$$
$$(\operatorname{rang}(I - \theta(e^{it})\theta^*(e^{it})) = \beta + \operatorname{rang}(I - \theta(e^{it})\theta^*(e^{it}) - \theta_2(e^{it})\theta_2^*(e^{it}))).$$

В работе [2, с. 165] даны аналитические признаки регулярности факторизаций. Из четвертого из этих признаков следует

Теорема 13.2. *Для того чтобы факторизация* (13.5), (13.6) *была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы матрица-функция* $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$ $((\theta_2(\zeta), \theta(\zeta)))$ *являлась регулярным расширением* $\theta(\zeta)$.

Проведенные выше рассуждения позволяют доказать следующие утверждения.

Теорема 13.3. *Среди всех регулярных расширений вверх (влево) матрицы-функции* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ *имеется максимальное*

$$\begin{pmatrix}\theta_{1M}(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\theta_{2M}(\zeta), \theta(\zeta)))$$

в том смысле, что для любого другого регулярного расширения

$$\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\theta_2(\zeta),\ \theta(\zeta)))$$

имеет место неравенство

$$\theta_1^*(\zeta)\,\theta_1(\zeta)\leqslant\theta_{1M}^*(\zeta)\,\theta_{1M}(\zeta)\quad(\theta_2(\zeta)\,\theta_2^*(\zeta)\leqslant\theta_{2M}(\zeta)\,\theta_{2M}^*(\zeta)).$$

Максимальное расширение определяется единственным образом и имеет вид

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\psi_0(\zeta),\ \theta(\zeta))),$$

где $\varphi_0(\zeta)$, $(\psi_0(\zeta))$ — *дефектная функция, определяемая равенством* (12.5), (12.6).

Доказательство. Рассмотрим произвольное регулярное расширение $\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}$, т. е. факторизация

$$\theta(\zeta)=(0_{p\alpha'},\ I_p)\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\tag{13.7}$$

является регулярной. Матрица-функция $(0_{p\alpha'},\ I_p)$ является х. ф. одностороннего сдвига кратности α'. Пусть $\Delta=(H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ — простой унитарный узел, х. ф. которого является $\theta(\zeta)$. Регулярность факторизации (13.7) означает, что сжатие T содержит односторонний сдвиг кратности α'. Пусть α — кратность максимального одностороннего сдвига, входящего в T. Максимальный односторонний сдвиг порождает факторизацию

$$\theta(\zeta)=(0_{p\alpha},\ I_p)\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}.\tag{13.8}$$

Так как произвольный односторонний сдвиг содержится в максимальном, то из регулярности факторизаций (13.7) и (13.8) следует (см. [2]) существование такой сжимающей аналитической матрицы-функции $\tilde\theta(\zeta)$, что имеют место регулярные факторизации

$$(0_{p\alpha},\ I_p)=(0_{p\alpha'},\ I_p)\,\tilde\theta(\zeta),\quad\begin{pmatrix}\theta_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}=\tilde\theta(\zeta)\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}.$$

Из вида множителей, входящих в первую факторизацию, сразу следует, что $\tilde\theta(\zeta)=\begin{pmatrix}\theta'(\zeta) & 0\\ 0 & I_p\end{pmatrix}$, при этом $\theta'(\zeta)\in S_{\alpha',\alpha}$ и почти всюду на единичной окружности выполняется равенство

$$\operatorname{rang}(I-\theta'^*(e^{it})\,\theta'(e^{it}))=\alpha-\alpha'.$$

Из вида второй факторизации получаем $\theta_1(\zeta)=\theta'(\zeta)\,\varphi_0(\zeta)$. Таким образом, $\theta_1^*(\zeta)\,\theta_1(\zeta)\leqslant\varphi_0^*(\zeta)\,\varphi_0(\zeta)$. Равенство в этом неравенстве будет достигаться в том и только в том случае, если $\theta'(\zeta)$ является постоянной унитарной матрицей, то есть тогда и только тогда, когда $\theta_1(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$. Следовательно, $\theta_{1M}(\zeta) = \varphi_0(\zeta)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Замечание. Доказанная теорема вскрывает связь между радиусами предельных кругов Вейля и функцией $\theta(\zeta)$.

Теорема 13.4. *Пусть* $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$ и $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ — *простой унитарный узел, х. ф. которого совпадает с* $\theta(\zeta)$. *Пусть максимальный односторонний сдвиг* $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$, *входящий в сжатие* T (T^*), *имеет кратность* α (β), *т. е. максимальное регулярное расширение* $\theta(\zeta)$ *вверх (влево) есть расширение на* α *строк* (β *столбцов*). *Тогда для любого целого числа* α', $0 < \alpha' \leqslant \alpha$ $(\beta', 0 < \beta' \leqslant \beta)$ *имеется регулярное расширение* $\theta(\zeta)$ *вверх (влево) на* α' *строк* (β' *столбцов*). *Каждое такое расширение имеет вид* $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}((q(\zeta),\ \theta(\zeta)))$, *где*

$$p(\zeta) = P_0(I - \zeta T)^{-1} F\,(q(\zeta) = G(I - \zeta T)^{-1} Q_0), \qquad (13.9)$$

а $P_0(Q_0)$ — *ортопроектор на блуждающее относительно одностороннего сдвига* $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$ *подпространство размерности* α' (β'). Равенство (13.9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между регулярными расширениями вверх (влево) функции $\theta(\zeta)$ и блуждающими относительно $V_{\text{н}}^{(c)}$ $(V_{\text{у}}^{(c)})$ подпространствами.

Доказательство. Пусть целое число α' удовлетворяет условию $0 < \alpha' \leqslant \alpha$. Поскольку кратность максимального одностороннего сдвига $V_{\text{н}}^{(c)}$ равна α, то T содержит и односторонний сдвиг кратности α'. Рассматривая факторизацию $\theta(\zeta)$, порождаемую одним из этих односторонних сдвигов, получаем регулярную факторизацию

$$\theta(\zeta) = (0_{p\alpha'},\ I_p)\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}, \qquad (13.10)$$

и первое утверждение теоремы следует теперь из теоремы 13.2.

Рассмотрим теперь произвольное регулярное расширение $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}$ функции $\theta(\zeta)$ на α' строк вверх. Тогда факторизация (13.10) является регулярной и, значит, порождается триангуляцией вида $T = \begin{pmatrix} V_{\alpha'} & * \\ 0 & T' \end{pmatrix}$, где $V_{\alpha'}$ — односторонний сдвиг кратности α'. Так как $\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix}$ является х. ф. оператора T', то (см. [2, с. 149])

$$I - (p^*(\zeta),\ \theta^*(\zeta))\begin{pmatrix} p(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{pmatrix} = (1 - |\zeta|^2) F^* P' (I - \bar{\zeta} T'^*)^{-1} \times$$

$$\times (I - \zeta T)^{-1} P' F = (1 - |\zeta|^2) F^* (I - \bar{\zeta} T^*)^{-1} P' (I - \zeta T)^{-1} F.$$

Так как

$$I-\theta^*(\zeta)\theta(\zeta)=(1-|\zeta|^2)F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-\zeta T)^{-1}F,$$

то из последних двух равенств находим

$$p^*(\zeta)p(\zeta)=(1-|\zeta|^2)F^*(1-\bar{\zeta}T^*)^{-1}(I-P')(I-\zeta T)^{-1}F.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 12.1, получаем

$$p^*(\zeta)p(\zeta)=F^*(I-\bar{\zeta}T^*)^{-1}P_0(I-\zeta T)^{-1}F,$$

где P_0 — ортопроектор на подпространство, порождающее для одностороннего сдвига $V_{\alpha'}$. Таким образом

$$p(\zeta)=P_0(I-\zeta T)^{-1}F$$

и равенство (13.9) доказано. Доказательство остальных утверждений теоремы теперь не представляет труда.

Множество всех регулярных расширений вверх (влево) аналитической сжимающей матрицы-функции $\theta(\zeta)$ можно естественным образом сделать частично упорядоченным, а именно будем считать, что

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}\prec\begin{pmatrix}\varphi_2(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\varphi_1(\zeta),\ \theta(\zeta))\prec(\psi_2(\zeta),\ \theta(\zeta))),$$

если

$$\overset{*}{\varphi_1}(\zeta)\varphi_1(\zeta)\leqslant\overset{*}{\varphi_2}(\zeta)\varphi_2(\zeta)\quad(\psi_1(\zeta)\overset{*}{\psi_1}(\zeta)\leqslant\psi_2(\zeta)\overset{*}{\psi_2}(\zeta)).$$

Очевидно, максимальное расширение

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\zeta)\\ \theta(\zeta)\end{pmatrix}((\varphi_0(\zeta),\ \theta(\zeta)))$$

играет в этом множестве роль максимального элемента.

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1982, вып. 37, с. 14—26; 1982, вып. 38, с. 32—40; 1984, вып. 41, с. 55—64; 1984, вып. 42, с. 46—57; вып. 45, с. 16—27.
2. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. — Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 4 (202), с. 144—168. 3. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970.—325 с.

Поступила в редколлегию 01. 12. 83.