ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АКУЛЬТЕТА ХГУ и ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXII

ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ[1]

А. М. Данилевский

(Харьков)

Естественным обобщением класса R_0 функций $f(z)$, однолистных уге $|z|<1$ и удовлетворяющих условиям

$$f(0)=0, \qquad |f'(0)|=1,$$

ется класс R_q $(0 \leqq q < 1)$ функций, однозначных и однолистных льце $q \leqq |z| < 1$ и переводящих окружность $|z|=q$ (без измене- направления обхода) в окружность $|w|=q$.

Настоящая статья посвящена обобщению на класс R_q некоторых ем и оценок, известных для класса R_0.

§ 1. Начнем с двух предложений, на которых основаны дальней- рассмотрения.

Теорема площадей. Пусть $f(z) \in R_q$. В таком случае площадь A той сти w-плоскости, на которую $f(z)$ отображает кольцо $q<|z|<1$, летворяет неравенству

$$A \geqq \pi(1-q^2),$$

ем знак равенства имеет место только в тривиальном случае

$$f(z) \equiv e^{i\alpha} z.$$

Доказательство. Если $A(f)$ — площадь той области плоскости w, торую отображается кольцо $q \leqq |z| < 1$ функцией $w=f(z) \in R_q$, чевидно, существует

$$\inf A(f) = A > 0.$$

Но семейство R_q — нормально; поэтому можно найти последова- ность

$$f_1(z),\ f_2(z), \dots,\ f_n(z), \dots,$$

[1] В архиве Харьковского математического института обнаружены черновики роски некоторых работ Александра Михайловича Данилевского, трагически шего в городе Харькове в феврале 1942 г. Некоторые из этих набросков ли во время консультаций, которые А. М. давал аспирантам Института. А. М. обладал обширными знаниями и разнообразными интересами. К нему лись инженеры за разъяснением серьезных вопросов теоретической электро- ки. Он давал консультации по математической физике и операционному исчи- . Под его непосредственным руководством писались диссертации по проблеме ов, по разложениям в ряды математической физики и другие. реди черновиков была найдена и настоящая статья А. М. К печати её подго- В. К. Балтага. *Ред.*

сходящуюся равномерно к функции $\varphi(z)$, регулярной и однозначной в кольце $q \leqq |z| < 1$.

Очевидно, что

$$\varphi(z) \in R_q$$

и

$$A(\varphi) = \inf A(f).$$

Таким образом, минимум $A(f)$ существует.

Для определения этого минимума, а также вида минимизирующей функции $\varphi(z)$, положим:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \qquad (q \leqq |z| < 1). \tag{1}$$

Тогда

$$A(f) = \lim_{r \to 1} \int_q^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| f'\left(\rho e^{i\varphi}\right) \right|^2 \rho \, d\varphi$$

и, следовательно,

$$A(f) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \left(1 - q^{2k}\right). \tag{2}$$

С другой стороны

$$\left| f\left(q e^{i\varphi}\right) \right| = q \qquad (0 \leqq \varphi < 2\pi).$$

Возвышая в квадрат и интегрируя по φ, получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 q^{2k} = q^2.$$

Если теперь положить $|c_k| = x_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то задача нахождения минимума $A(f)$ приводит к задаче о минимуме функции

$$A(f) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\left(1 - q^{2k}\right) x_k^2,$$

при условии:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{2k} x_k^2 = q^2,$$

т. е. к решению бесконечной системы уравнений:

$$x_k \left[k\left(1 - q^{2k}\right) + \lambda q^{2k} \right] = 0,$$

из которой следует, что:

$$k_0\left(1-q^{2k_0}\right)+\lambda q^{2k_0}=0, \qquad x_{k_0}\neq 0,$$

$$x_k=0, \qquad k\neq k_0,$$

а в таком случае минимизирующая функция имеет вид

$$\varphi(z)=c_{k_0}z^{k_0}.$$

Из однолистности функции $\varphi(z)$ следует, что $k_0=\pm 1$; а так как окружность $|z|=q$ переходит при отображении сама в себя с сохранением направления обхода, то $k_0=1$ и $c_1=e^{i\alpha}$, где α — вещественное.

Таким образом:

$$\varphi(z)=e^{i\alpha}z$$

и, в силу формулы (2),

$$A=\min A(f)=\pi(1-q^2),$$

что и требовалось доказать.

Принцип Линделёфа для кольца. Пусть D (соотв. D_1) есть двусвязная область w-плоскости, ограниченная окружностью $|w|=q$ и лежащей вне её кривой Γ (соотв. Γ_1). Пусть функция $z=F(w)$ (соотв. $z=F_1(w)$) отображает D (соотв. D_1) на кольцо $q<|z|<R$ (соотв. $q<|z|<R_1$) z-плоскости таким образом, что окружность $|w|=q$ переходит в окружность $|z|=q$.

В таком случае, если D есть подобласть D_1, то

$$R<R_1.$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $R_1=1$.

Примем вначале, что областью D_1 является кольцо $q<|w|<1$. Функция $w=f(z)$, обратная по отношению к $z=F(w)$, отображает кольцо $q<|w|<R$ на область D, являющуюся частью кольца $q<|w|<1$. По теореме площадей площадь A области D удовлетворяет неравенству

$$A\geqq\pi(R^2-q^2),$$

а так как D есть часть кольца $q<|w|<1$, то

$$A<\pi(1-q^2).$$

Следовательно,

$$1>R_1$$

и значит для этого случая утверждение доказано.

Примем теперь, что внешней границей области D_1 является произвольная кривая Γ_1. Функция $\zeta=F_1(w)$ по условию отображает область D на подобласть Δ кольца $q<|\zeta|<1$, причем внутренней границей Δ является окружность $|\zeta|=q$. Пусть $w=G_1(\zeta)$ есть функция, обратная по отношению к $\zeta=F_1(w)$. Возьмем функцию

$$z=F(G_1(\zeta)),$$

которая отображает область Δ на кольцо $q<|z|<R$, причем окружность $|\zeta|=q$ переходит в окружность $|z|=q$. Так как Δ есть часть

кольца $q < |\zeta| < 1$, которое функцией $z = \zeta$ отображается на кольцо $q < |z| < 1$, то, по ранее доказанному, $R < 1$, r, и т. д.

§ 2. Докажем теперь одну важную теорему, которая является аналогом соответствующей теоремы М. А. Лаврентьева относительно однолистных функций в круге[1].

Теорема 1. Пусть D и D_1 — две двусвязные области w-плоскости, не имеющие общих точек, причем внутренней границей области D является окружность $|w| = q$, а внешней — некоторая кривая Γ, тогда как внутренней границей области D_1 является некоторая кривая Γ_1, а внешней — окружность $|w| = q_1$, $(q_1 > q)$. Пусть области D и D_1 отображены конформно на кольца $q_0 < |z| < R$, $q_0 < |z| < R_1$ таким образом, что окружности $|w| = q$, $|w| = q_1$ переходят в окружность $|z| = q_0$. В таком случае

$$\frac{R}{q_0} \cdot \frac{R_1}{q_0} \leqq \frac{q_1}{q}, \tag{3}$$

и знак равенства имеет место в том — и только том — случае, когда кривые Γ, Γ_1 совпадают с окружностью с центром в точке $w = 0$.

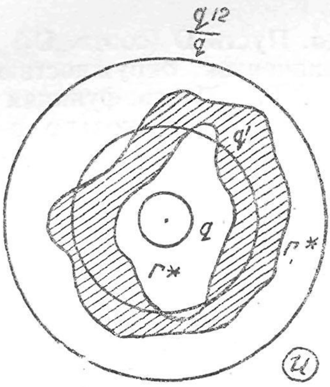

Рис. 1.

Доказательство. Воспользуемся некоторой модификацией метода Шмидта для доказательства известной теоремы Кёбе.

Предварительно заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда Γ, Γ_1 — аналитические кривые (рис. 1). Действительно, беря внутри кольца $q < |z| < R$ окружность $|z| = R - \varepsilon$, мы найдем, что при отображении кольца $q < |z| < R$ на область D окружность $|z| = R - \varepsilon$ перейдет в аналитическую кривую Γ, лежащую внутри D и аппроксимирующую кривую Γ.

Обозначим теперь через $w = f(z)$ функцию, которая отображает конформно кольцо $q_0 < |z| < R$ на область D так, как это указано в формулировке теоремы.

Рассмотрим интеграл

$$I = R\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z| = Q} \ln\frac{f(z)}{z} \cdot \frac{dz}{z}\right\}, \tag{4}$$

который не зависит от Q, лежащего в интервале $[q_0, R]$.

Беря $Q = q_0$, получим

$$I = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{q}{q_0}\, d\vartheta = \ln\frac{q}{q_0}. \tag{5}$$

[1] М. А. Лаврентьев. К теории конформных отображений. Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. V, (1934).

С другой стороны, беря $Q = R$, найдем

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\rho}{R}\, d\vartheta, \tag{5'}$$

где

$$\rho = \left| f(Re^{i\vartheta}) \right|.$$

Из (5) и (5') вытекает, что

$$\ln R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \rho\, d\vartheta - \ln \frac{q}{q_0}, \tag{6}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_1 = \mathbf{R}\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = Q} \ln [f_1(z) \cdot z] \frac{dz}{z} \right\}, \tag{7}$$

где $w = f_1(z)$ — функция, осуществляющая указанное в формулировке теоремы конформное отображение кольца $q_0 < |z| < R_1$ на область D_1.

Легко видеть, что функция $\ln [f_1(z) \cdot z]$ в кольце $q_0 < |z| < R_1$ однозначна, и интеграл I_1 не зависит от значения Q в интервале $[q_0, R_1]$. Беря $Q = q_0$, получим

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln (q_1 \cdot q_0)\, d\vartheta = \ln (q_1 \cdot q_0). \tag{8}$$

С другой стороны, беря $Q = R_1$, найдем

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln (\rho_1 R_1)\, d\vartheta, \tag{8'}$$

где $\rho_1 = \left| f_1(R_1 e^{i\vartheta}) \right|$. Сравнение (8) и (8') дает

$$\ln R_1 = \ln (q_1 q_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \rho_1\, d\vartheta. \tag{9}$$

Если функция $f(z) = u + iv$ регулярна в односвязной области S, ограниченной спрямляемым контуром L и не есть константа, то

$$\int_L u\, dv = \iint_S \left(u_x^2 + u_y^2\right) dx\, dy > 0. \tag{10}$$

Пусть S — область, ограниченная замкнутыми кривыми γ и γ_1 w-плоскости, причем точка $w = 0$ лежит внутри кривой γ, а кривая γ лежит внутри γ_1. Функция $\ln w$ регулярна, но не однозначна в S. Однако, если положить $w = Pe^{i\Psi}$ и $\ln w = \ln P + i\Psi$, то $\ln P$ и $d\Psi$ однозначны в S, и неравенство (10) может быть написано. Из него вытекает, что

$$\int_{\gamma_1} \ln P\, d\Psi > \int_{\gamma} \ln P\, d\Psi. \tag{10'}$$

Возьмем теперь однозначную и регулярную в кольце $q_0 < |z| < R$ функцию $\ln \frac{f(z)}{z}$. Принимая это кольцо за область S, получим

$$\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \frac{\rho}{R} d(\psi - \vartheta) - \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \frac{q}{q_0} d(\psi - \vartheta) \geqq 0.$$

Но

$$\int_{\vartheta=0}^{2\pi} d(\psi - \vartheta) = 0.$$

Поэтому

$$\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \rho\, d(\psi - \vartheta) \geqq 0,$$

где

$$\rho = \left| f(Re^{i\vartheta}) \right|, \quad \psi = \arg f(Re^{i\vartheta}).$$

Иначе говоря

$$\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \rho\, d\psi \geqq \int_{0}^{2\pi} \ln \rho\, d\vartheta. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с (6), получаем

$$\ln R \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \rho\, d\psi - \ln \frac{q}{q_0}, \tag{12}$$

причем знак равенства в (12), как показывает (10), имеет место тогда — и только тогда, когда

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \text{const}.$$

Поступая аналогично с функцией $\ln [f_1(z) \cdot z]$ в кольце $q_0 < |z| < R_1$, получим, что

$$\ln R_1 \leqq \ln (q_1 q_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \ln \rho_1\, d\psi_1, \tag{13}$$

где

$$\rho_1 = \left| f_1(R_1 e^{i\vartheta}) \right|, \quad \psi_1 = \arg f_1(R_1 e^{i\vartheta}).$$

При этом знак равенства в (13) имеет место в том — и только том — случае, когда

$$|f_1(z) \cdot z| = \text{const}.$$

Неравенство (12) можно переписать в виде

$$\ln R \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \ln P d\psi - \ln\frac{q}{q_0}, \tag{12'}$$

а неравенство (13) — в виде

$$\ln R_1 \leqq \ln(q_1 q_0) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1} \ln P\, d\psi, \tag{13'}$$

так как при изменении ϑ от 0 до 2π, точка $\rho_1 = e^{i\psi_1}$ описывает Γ_1 в отрицательном направлении.

Складывая (12'), (13'), получаем

$$\ln(RR_1) \leqq \ln\frac{q_1 q_0^2}{q} - \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{\Gamma_1} \ln P\, d\psi - \int\limits_{\Gamma} \ln P\, d\psi\right\}, \tag{14}$$

но выражение в фигурных скобках в силу (10') не отрицательно. Значит

$$\ln(RR_1) \leqq \ln\frac{q_1 q_0^2}{q}.$$

Остается выяснить, когда здесь имеет место знак равенства. Это будет в том — и только том — случае, когда имеет место знак равенства в (12), (13) и когда равняется нулю выражение в фигурных скобках в (14). Последнее возможно лишь в том случае, когда кривые Γ, Γ_1 совпадают. Чтобы имел место знак равенства в (12) или (13), эта кривая должна быть окружностью с центром в точке O.

Следствие. Если кривые Γ, Γ_1 таковы, что одна из них переходит в другую посредством преобразования

$$w' = \frac{qq_1}{w},$$

то $R = R_1$ и, значит, неравенство (3) будет иметь вид

$$\frac{R}{q_0} \leqq \sqrt{\frac{q_1}{q}}, \tag{15}$$

причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда кривые Γ, Γ_1 совпадают с окружностью

$$|w| = \sqrt{qq_1}.$$

§ 3. Докажем теперь одно предложение, которое для класса R_q, играет такую же роль, как теорема Кёбе для класса R_0.

Теорема 2. Если $w = f(z) \in R_q\,(0 \leqq q < 1)$, то ближайшая к точке $w = 0$ точка a внешней границы области, на которую $f(z)$ отображает кольцо $q < |z| < 1$, удовлетворяет неравенству

$$|a| \geqq k,$$

где k зависит только от q (k есть константа Кёбе для класса R_q).

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем предположить, что для взятой функции $w = f(z) \in R_q$ указанная в формулировке теоремы точка a лежит на положительной половине вещественной оси. Возьмем в w-плоскости (рис 2) двусвязную область D', граница которой состоит из окружности $|w| = q$ и бесконечного интервала вещественной оси $[a, \infty]$.

Рис. 2.

Отобразим конформно область D' на кольцо $q < |u| < q'$ так, чтобы луч $[a, \infty]$ перешел в окружность $|u| = q'$ и чтобы точке $w = \infty$ отвечала точка $u = -q'$, а точке $w = a$ точка $u = q'$. Отображающую функцию обозначим $u = \varphi(w)$.

Если продолжить по принципу симметрии функцию $\varphi(w)$ через окружность $|w| = q$ в область D'', ограниченную отрезком $\left[O, \frac{q^2}{a}\right]$ вещественной оси и окружностью $|w| = q$, то области D'' в u-плоскости будет отвечать кольцо $\frac{q^2}{q'} < |u| < q$.

Функция $\varphi(w)$ определена в плоскости w, разрезанной вдоль отрезков $\left[O, \frac{q^2}{a}\right]$, $[a, \infty]$ вещественной оси, и отображает эту область на кольцо $\frac{q^2}{q'} < |u| < q'$. Это позволит построить $\varphi(w)$.

Мы могли бы, отправляясь от области D', продолжить функцию $\varphi(w)$ через разрез $[a, \infty]$. Это сводится к построению второго экземпляра области D' и соединению берегов разрезов таким образом, что получится двухлистная риманова поверхность. Функция $u = \varphi(w)$ отображает ее на кольцо $q < |u| < \frac{q'^2}{q}$.

Возьмем на верхнем листе римановой поверхности точку, для которой $w = \alpha$. Ей в u-плоскости отвечает точка $u = \alpha^*$, лежащая в кольце $q < u < q'$. Перейдя на римановой поверхности через луч $[a, \infty]$ в симметричную точку, для которой $w = \bar{\alpha}$, мы попадем на нижний лист римановой поверхности. В u-плоскости мы получим точку α_0^*, симметричную точке α^* относительно окружности $|u| = q'$.

Если бы мы перешли от точки $\bar{\alpha}$ к точке α, оставаясь всё время на нижнем листе, то в u-плоскости получили бы точку $u = \bar{\alpha}_0^*$, симметричную α_0^* относительно вещественной оси. Таким образом, точкам римановой поверхности, которые лежат одна над другой, в u-плоскости отвечают точки, которые переходят одна в другую с помощью преобразования

$$\zeta_1 = \frac{q'^2}{\zeta}. \tag{16}$$

Займемся теперь доказательством нашей теоремы.

Расположим область D так, чтобы её граница $|w| = q$ лежала на верхнем листе рассмотренной римановой поверхности. При этом части области могут находиться как на верхнем, так и на нижнем листе. Полученная таким образом область D на римановой поверхности не будет иметь точек, лежащих одна над другой, так как исходная область D была однолистная.

Беря вместе с каждой точкой области D точку римановой поверхности с тем же w, получим на римановой поверхности вторую область D_1; её граница $|w| = q$ лежит уже на нижнем листе. Областям D и D_1 отвечают в w-плоскости две области D^* и D_1^* (которые не пересекаются), ограниченные соответственно окружностью $|u| = q$ и кривой Γ^*, лежащей вне этого круга, и окружностью $|u| = \frac{q'^2}{p}$ и кривой Γ_1^*, лежащей внутри последнего круга. При этом кривые Γ^*, Γ_1^* переходят одна в другую посредством преобразования (16).

Пусть $z = g(w)$ есть функция, обратная по отношению к $w = f(z)$, а $w = \psi(u)$ — обратная по отношению к $u = \varphi(w)$. В таком случае функция

$$z = g(\psi(u))$$

отображает область D^* на кольцо $q < |z| < 1$.

Учитывая следствие § 2, получаем неравенство

$$\frac{1}{q} \leqq \sqrt{\frac{q'^2}{q^2}} = \frac{q'}{q},$$

откуда

$$\frac{1}{q'} \leqq 1. \tag{17}$$

В соотношении (17) знак равенства достигается лишь в том случае, когда кривые Γ^*, Γ_1^* сливаются в окружность с центром в точке $w = 0$. Радиус этой окружности будет равен 1. Мы видим, что наименьшее значение q', равное 1, получится при совпадении области D с областью D'.

Положим теперь, что кольцо $q < |z| < 1$ отображено на область D' плоскости w, ограниченную окружностью $|w| = q$ и лучом $[a, \infty)$. В таком случае a есть некоторая функция от q. Покажем, что при однолистном отображении класса R_q a будет ближайшей точкой внешней границы (в смысле Кёбе).

Пусть $w = f(z)$ — произвольная, но фиксированная функция класса R_q — отображает кольцо $q < |z| < 1$ на область D с внешней границей Γ и пусть $a_f > 0$ — ближайшая к $w = 0$ точка Γ. Предположим, что

$$a_f < a = a(q).$$

Рассмотрим двусвязную область $D'' \subset D'$, ограниченную окружностью $|w| = q$ и лучом $[a_f, \infty)$. Эта область однолистно отображается некоторой функцией $w = \varphi(z)$ на кольцо $q < |z| < q'$, где q' зависит от a_f, и так как D'' — подобласть области D', отображаемой на кольцо $q < |z| < 1$, то по принципу Линделёфа

$$q' < 1,$$

что невозможно, ибо наименьшее возможное значение q', как мы только что видели, равно 1.

Теорема доказана.

§ 4. Из доказательства теоремы 2 следует, что для определения константы Кёбе $k(q)$ класса R_q мы должны построить функцию $u = \varphi(w)$, реализующую конформное отображение двусвязной области D', ограниченной окружностью $|w| = q$ и лучом $[a_1 \infty)$ на кольцо $q < |u| < 1$. Функция $u = \varphi(w)$, как мы видели, отображает двусвязную область плоскости w, ограниченную разрезами $\left[0, \frac{q^2}{a}\right]$ и $[a, \infty)$ на кольцо

$$q^2 < |u| < 1.$$

При таком отображении

$$a = k(q).$$

Возьмем функцию

$$\zeta = -\alpha + \frac{1 - \alpha^2}{2\,\mathrm{sn}^2 \frac{K' \ln u}{\pi} - \alpha - 1}, \tag{18}$$

где

$$\mathrm{sn}\, u = \mathrm{sn}(u; \varkappa), \quad \varkappa^2 = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}, \; 0 < \alpha < 1,$$

$$0 < \varkappa < 1, \text{ а } K, \; K'$$

полные эллиптические интегралы первого рода для модуля $\varkappa$ и дополнительного модуля $\varkappa'$.

Эта функция, как известно[1], отображает кольцо

$$e^{-\pi \frac{K}{K'}} < |u| < 1$$

на двусвязную область плоскости ζ, ограниченную разрезами

$$[-1, \; -\alpha] \text{ и } [\alpha, \; 1].$$

Положив

$$\alpha = \frac{a - q}{a + q},$$

откуда

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{q^2}{a^2}, \quad \varkappa' = \frac{q}{a}, \tag{19}$$

[1] См., напр., Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, ОГИЗ, 1948, стр. 196 — 197.

мы найдем, что функция $w = L(\zeta)$, определяемая равенством

$$\frac{w}{w-\frac{q^2}{a}} : \frac{a}{a-\frac{q^2}{a}} = \frac{\zeta-\alpha}{\zeta-1} : \frac{1+\alpha}{2}, \tag{20}$$

дает отображение двусвязной области вне разрезов $[-1, -\alpha]$, $[\alpha, 1]$, на область D', ограниченную соответственно разрезами

$$[a, \infty) \text{ и } \left[O, \frac{q^2}{a}\right].$$

Если, поэтому, потребовать, чтобы

$$e^{-\pi\frac{K}{K'}} = q^2, \tag{21}$$

то формулы (18) и (20) и дадут функцию

$$w = a\,\mathrm{dn}^2\,\frac{K' \ln u}{\pi} = \Psi(u, q), \tag{22}$$

осуществляющую искомое однолистное отображение; значение же константы Кёбе $k(q) = a$ для класса R_q определится из уравнения (21).

Для решения этого уравнения положим, как обычно, $\frac{iK'}{K} = \tau$, и введем число τ' по формуле

$$\frac{K}{K'} = -i\tau',$$

что сводится к преобразованию Якоби

$$\tau' = -\frac{1}{\tau};$$

положив еще $q' = e^{\pi i \tau'}$, приведем уравнение (21) к виду

$$q' = q^2. \tag{21'}$$

Так как

$$\sqrt{\varkappa'} = \frac{\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau')}{\vartheta_3(0\,|\,\tau')},$$ [1]

то, принимая во внимание (21′) и известные разложения нулевых значений функций ϑ, получим:

$$\frac{1}{\varkappa'} = \frac{1}{4q}\left(\frac{1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots}{1+q^4+q^{12}+q^{24}+\cdots}\right)^2,$$

откуда, в силу (19);

$$k(q) = a = \frac{1}{4}\left(\frac{1+2q^2+2q^8+2q^{18}+\cdots}{1+q^4+q^{12}+q^{24}\cdots}\right)^2. \tag{23}$$

Очевидно, что последнее равенство можно переписать и в форме:

$$k(q) = \frac{1}{4}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^4 = \frac{1}{4}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{4k-2}}{1+q^{4k}}\right)^4 \tag{23'}$$

[1] См., напр., Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций.

Из формулы (23), весьма удобной для вычисления $k(q)$ и (23′) следует, что $k(q) > \frac{1}{4}$; при $q \to 0$ $k(q) \to \frac{1}{4}$; т. е. как раз к значению константы Кёбе для класса R_0. При этом $k(q)$ монотонно убывает вместе с q, во всяком случае для $q < \sqrt{\sqrt{2}-1} = 0{,}643\ldots$

Легко видеть, что функция (22) при $q \to 0$ имеет пределом функцию Кёбе

$$w = \frac{u}{(1+u)^2},$$

однолистно отображающую круг $|u| < 1$ на область, ограниченную разрезом $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.

§ 5. При отображении кольца

$$q \leqq |u| < 1$$

функциями $w = f(u)$ класса R_q имеет место следующая теорема, регулирующая искажение.

Теорема 3. Какова бы ни была функция

$$w = f(u) \in R_q,$$

справедливо неравенство

$$|f(u_0)| \geqq \Psi(|u_0|, q),$$

где u_0 — любая точка кольца $q \leqq |u| < 1$, а функция $\Psi(u, q) = k(q)\,\mathrm{dn}^2 \frac{K' \ln u}{\pi}$ реализует однолистное отображение этого кольца на двусвязную область D', ограниченную окружностью $|w| = q$ и лучом $[k(q), +\infty)$; неравенство переходит в равенство в том — и только том — случае, когда $f(u) \equiv \Psi(u, q)$.

Доказательство.

Пусть $k(q)$ — константа Кёбе для R_q. Тогда любая точка w_0, для которой $|w_0| < k(q)$, есть внутренняя точка всех областей D, на которые отображается кольцо

$$q < |u| < 1 \tag{24}$$

функциями из R_q.

Фиксируем какую-нибудь из этих точек w_0, и пусть u_0 ее оригинал на кольце (24) при отображении последнего функцией $w = f(u)$ класса R_q на некоторую область D, внешней границей которой служит кривая Γ. Не нарушая общности, можно принять, что $w_0 > 0$.

Функцию, обратную для $f(u)$ обозначим через

$$u = F(w).$$

Теперь проведем радиальный разрез γ_u от точки u_0 до окружности $|u| = 1$; функция $w = f(u)$ отображает надрезанное кольцо на область D_1; последняя получается из области D выбрасыванием точек кривой γ_w (изображения γ_u), соединяющей w_0 с Γ.

Отобразим кольцо с надрезом γ_u на кольцо

$$q' < |z| < 1$$

с помощью функции

$$z = \Phi(u);$$

в силу принципа Линделёфа, q' тем меньше, чем больше $|u_0|$.

С другой стороны, функция

$$z = \Phi[F(w)]$$

отображает область D_1 тоже на кольцо $q' < |z| < 1$, и, как мы видели, q' имеет наименьшее значение в том — и только том — случае, когда внешней границей D_1 служит надрез $[w_0, +\infty)$ вдоль положительной части вещественной оси.

Поэтому наибольшее расстояние от начала точек u_0, отображаемых в w_0 функциями класса R_q, достигается в том — и только том — случае, когда отображающая функция совпадает с экстремальной (в смысле Кёбе) функцией $\Psi(u, q)$, переводящей однолистно кольцо

$$q < |u| < 1$$

в область D', внешней границей которой служит луч $[k(q), +\infty)$; на продолжении этого луча и лежит точка w_0.

Пусть теперь u_0 — произвольная точка кольца (24). Положим, что

$$\Psi(|u_0|, q) = w^*; \tag{25}$$

тогда все точки u, отображаемые на w^* с помощью функций класса R_q, лежат на кольце

$$q < |u| \leqq |u_0|.$$

Предположим, вопреки утверждению теоремы 3, что хоть для одной функции $f(u) \in R_q$

$$|f(u_0)| = |w_0| < w^*;$$

наиболее удаленный от $u = 0$ оригинал w_0 (обозначаем его через u_0') соответствует, как мы видели, функции

$$w = \Psi(u, q);$$

но тогда должно быть

$$|\Psi(u'_0, q)| = |w_0| < w^* = \Psi(|u_0|, q),$$

т. е.

$$|\Psi(u_0', q)| < \Psi(|u_0|, q),$$

откуда, в силу конформности,

$$|u_0'| < |u_0|,$$

а это невозможно, так как точка u_0 должна лежать на кольце

$$q < |u| \leqq |u_0'|.$$

Итак, для любой

$$f(u) \in R_q,$$

$$|f(u_0)| \geqq \Psi(|u_0|, q),$$

какова бы ни была точка u_0 кольца (24). Теорема доказана.