УДК 517

Г. Р. БЕЛИЦКИЙ

КОНЕЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ РОСТКОВ C^∞-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

1°. Цель настоящей работы — доказать, что конечная определенность ростка C^∞-диффеоморфизма эквивалентна его формальной конечной определенности. Все формально конечно-определенные диффеоморфизмы можно описать по аналогии с формальными векторными полями [1]*.

Мы используем технику [2] для решения возникающих при доказательстве основного результата функциональных уравнений.

Напомним, что росток C^∞-отображения $F:(\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ называется *k-определенным*, если каждый другой росток G, k-струя которого равна k-струе F, сопряжен с F в классе C^∞. Росток называется *конечно-определенным*, если он k-определен при некотором $k < \infty$, и *ω-определенным*, если он k-определен при $k = \infty$. Понятие конечной определенности имеет очевидный формальный аналог.

Пусть $F(x) = \Lambda x + f(x)$, $f(x) = 0(x)$, так что $\Lambda = F'(0)$ — линейное приближение ростка F. Обозначим через L_c так называемое цент-

* Аналог соответствующей теоремы для диффеоморфизмов недавно получил и сообщил автору М. Я. Житомирский.

ральное многообразие линейного приближения, т. е. инвариантное подпространство, отвечающее унитарной части спектра. Существует такое формальное преобразование $\Phi:(\boldsymbol{R}^n, 0)\to(\boldsymbol{R}^n, 0)$, что L_c инвариантно относительно $\hat{\Phi}\hat{F}\hat{\Phi}^{-1}$ (здесь $\hat{F}$ — формальный ряд Тейлора в нуле). Поэтому без ограничения общности можно сразу считать, что L_c инвариантно относительно $\hat{F}$.

Теорема. *Пусть сужение $\hat{F}/L_c$ конечно определено. Тогда росток F ω-определен.*

Следствие. *Росток C^∞-отображения F конечно определен тогда и только тогда, когда формальное отображение $\hat{F}$ конечно определено.*

2°. Из конечной определенности сужения $\hat{F}_c=\hat{F}/L_c$ следует, что $\dim L_c\leqslant 2$. При этом если $\dim L_c=1$, то $\hat{F}_c\neq 0$. Если же $\dim L_c=2$, то $\operatorname{spec}\Lambda_c=\{e^{\pm\mu i}\}$; здесь μ — иррационально и, кроме того, $\hat{F}_c$ является либо квазисжатием, либо квазирастяжением. Обозначим через $L_\pm$ инвариантные подпространства линейного приближения Λ, отвечающие собственным числам, по модулю большим и соответственно меньшим единицы. Из квазигиперболичности сужения $\hat{F}/L_c$ следует (см. [2], с. 128) существование такого C^∞-преобразования Φ, что подпространства $L_+ + L_c$, $L_- + L_c$ инвариантны относительно $\Phi F\Phi^{-1}$. Поэтому считаем, что это условие инвариантности выполнено для F.

Пусть теперь $G=F+g$, $\hat{g}=0$. Мы должны доказать, что росток G сопряжен с F в классе C^∞. Существует такое преобразование $\Phi(x)=x+\varphi(x)$, $\hat{\varphi}=0$, что $L_\pm+L_c$ инвариантны относительно $\Phi G\Phi^{-1}$ (см. [2], с. 128). Так как разность $F-\Phi G\Phi^{-1}$ по-прежнему имеет нулевой ряд Тейлора при $x=0$, то можно считать, что $L_\pm + L_c$ инвариантны относительно G. Наконец, так как сужение $F_c=F/L_c$ ω-определено, то можно считать, что $F_c=G_c$.

В силу [3] для доказательства сопряженности F и G достаточно доказать существование такого C^∞-преобразования Φ, что разность $F-\Phi^{-1}G\Phi$ — плоская на L_c (т. е. равна на L_c нулю вместе со всеми производными). С учетом теоремы Уитни о восстановлении C^∞-отображения по значениям его производных (в данном случае на L_c) достаточно, в свою очередь, доказать существование такого преобразования $\Phi(x)=x+\varphi(x)$, $\hat{\varphi}=0$, что

$$(\Phi(Fx)-G(\Phi(x))^{(k)}|_{x\in L_c}=0\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (1)_k$$

Так как $F_c=G_c$, то можно положить $\varphi\,|\,L_c=0$. Тогда все уравнения $(1)_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ линейны относительно производных $\varphi^{(k)}(x)$, $x\in L_c$ и имеют вид

$$\Psi(Fx)=Q(x)\Psi(x)+\gamma(x)\ \ (x\in L_c), \qquad (2)$$

где $Q(0)$ — невырожденная матрица.

Докажем разрешимость уравнения [2] при любых комплекснозначных C^∞-отображениях $Q: L_c\to C^{m^2}$, $\gamma: L_c\to \boldsymbol{C}^m$, $\hat{\gamma}=0$, $\det Q(0)\neq 0$. Тем самым будет доказана и наша теорема.

3°. Пусть сначала $\dim L_c = 1$. Тогда $F_c'(0) = \pm 1$. Рассмотрим случай $F_c'(0) = 1$ и докажем существование плоского в нуле C^∞-отображения $\Psi: \boldsymbol{R}_+ \to C^m$, удовлетворяющего (2) при $x \geqslant 0$. Аналогично может быть доказано существование плоского в нуле решения этого уравнения при $x \leqslant 0$.

Пусть $\varkappa$ — алгебраическое замыкание поля отношений кольца $\mathbb{C}[[x]]$ формальных рядов от одной переменной.

Лемма 1. *Пусть* $\det Q(0) \neq 0$. *Существует такая обратимая над полем* $\varkappa$ *матрица* $\hat{T}(x)$, *что матрица* $\hat{\hat{Q}}(x) = (\hat{T}(\hat{F}_c x))^{-1} \hat{Q}(x) \times \hat{T}(x)$ *треугольна.*

Доказательство. Воспользуемся аналогом этого утверждения для дифференциальных уравнений [4].

Непосредственно проверяется, что формальный диффеоморфизм $\hat{\Phi}(x, y) = (\hat{F}(x), \hat{Q}(x) y)$ включается в формальный поток $\hat{\Phi}^t(x, y) = (\hat{F}^t(x), \hat{A}^t(x), y)$. Тогда $\hat{F} = \hat{F}^t|_{t=1}$, $\hat{Q}(x) = \hat{A}^t(x)|_{t=1}$. Пусть $a(x) = \left.\frac{d\hat{A}^t(x)}{dt}\right|_{t=0}$. Согласно [4], существует такое обратимое над $\varkappa$ преобразование $\hat{T}(x)$, что матрица

$$\hat{\hat{a}}(x) = (\hat{T}(x))^{-1}(a(x)\hat{T}(x) - v(x)\hat{T}(x)), \quad v = \left.\frac{dF^t}{dt}\right|_{t=0}$$

жорданова над $\varkappa$. Но тогда матрица $\hat{\hat{A}}^t(x) = (\hat{T}(\hat{F}^t(x))^{-1}\hat{A}^t(x)\hat{T}(x)$ треугольна над $\varkappa$. Полагая $t = 1$, получим утверждение леммы.

В силу леммы 1 можно считать, что матрица Q в уравнении (2) имеет вид $Q(x) = D(x) + N(x) + \tau(x)$, где $\hat{\tau} = 0$; N — нильтреугольная матрица, а $D(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \ldots, \mu_m(x))$. Здесь $\mu_j(x) = \exp \lambda_j(x^{\frac{1}{m_j}})$, где λ_j — полиномы, а $m_j \geqslant 1$ — целые числа (см. [4]).

Так как считаем $x \geqslant 0$ и (2) решается в плоских отображениях, то допустимы преобразования вида $\varphi(x) = T(x)\Psi(x)$, где T — C^∞-матрица при $x \neq 0$, которая становится гладкой в нуле после замены $x \to x^q$ и умножения на x^l при некоторых $q, l \in \boldsymbol{R}$.

Лемма 2. *Существует такое допустимое преобразование, которое приводит матрицу* Q *к треугольному виду.*

Доказательство. Пусть для определенности $F_c(x) = x(1 + \alpha x^r + \ldots)$, $\alpha > 0$. Преобразованием вида $T(x) = \operatorname{diag}(1, x^{p_1}, \ldots, x^{p_{n-1}})$ можно добиться, чтобы $N(x) = o(x^q)$ при любом наперед заданном $q > 0$. Нам достаточно выбрать $q = r$.

Упорядочим собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, чтобы $|\mu_1(x)| \geqslant \ldots \geqslant |\mu_m(x)|$ при малых $x > 0$. Будем искать преобразование матрицы Q к верхнетреугольной в виде $T(x) = E + \Psi(x)$, где Ψ — нижняя нильтреугольная C^∞-матрица, плоская в нуле. Положим $Q(x) = D(x) + x^r G(x)$. Тогда для элементов $\Psi_{kj}(x)$ получим уравнения

$$\Psi_{kj}(F_c x) = (\mu_k(x)\mu_j^{-1}(x))\Psi_{kj}(x) + \mu_j^{-1}(x)x^r \sum_l G_{kl}(x)\Psi_{lj}(x) - \\ - \mu_j^{-1}(x)x^r \sum_l \Psi_{kl}(F_c x)n_{lj}(x) - \mu_j^{-1}(x)\tau_{kj}(x) \quad (k \geqslant j). \qquad (3)$$

Элементы Ψ_{kj} последовательно при $j = 1, 2, \ldots$ находятся из этих уравнений с учетом равенств $\Psi_{kj} = 0\,(k < j)$, $n_{kj} = 0\,(k \geqslant j)$. Элементы n_{kj} при $k < j$ определяются из равенств

$$-\sum_{l} \Psi_{kl}(F_c x)\, n_{lj}(x) + x^r \sum G_{kl}(x)\, \Psi_{lj}(x) = n_{kj}(x) + \\ + \sum_{l<j} \Psi_{kl}(x)\, n_{lj}(x) + \tau_{kj}(x).$$

Для нахождения Ψ_{kj} при фиксированном j положим $g(x) = (\Psi_{j+1,j} \times \times (x), \ldots, \Psi_{mj}(x))$. Тогда (3) запишется в виде $g(F_c x) = \Delta(x)\, g(x) + + x^r L(x)\, g(x) + \theta(x)$ (4). Здесь Δ — диагональная матрица, $\|\Delta(x)\| \leqslant 1$, L — некоторая C^∞-матрица, а θ — плоское в нуле. Так как F_c — квазигиперболично порядка r, то уравнение (4), согласно ([2], с. 124), имеет некоторое плоское в нуле решение g. Лемма доказана.

Итак, в случае $\dim L_c = 1$, $F_c'(0) = 1$ матрицу Q в уравнении (2) можно считать треугольной. Поэтому (2) сводится к серии одномерных уравнений вида $\Psi(F_c x) = (d_0 + d_1 x^\rho + o(x^\rho))\, \Psi(x) + \delta(x)$ с комплексными d_0, d_1 и $\rho > 0$. Разрешимость таких уравнений установлена там же.

Пусть теперь $F_c'(0) = -1$. Для доказательства разрешимости уравнений (2) в этом случае положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Psi(x) & (x \geqslant 0); \\ Q(F^{-1}x)\, \Psi(F^{-1}x) + \gamma(F^{-1}x) & (x \leqslant 0), \end{cases}$$

где Ψ — решение уравнения $\Psi(F^2 x) = Q(Fx)\, Q(x)\, \Psi(x) + Q(Fx)\, \gamma(x)$ (существующее согласно доказанному выше). Тогда φ — решение уравнения (2).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось рассмотреть случай $\dim L_c = 2$. Можно считать, что F_c имеет нормальную форму, так что в комплексных координатах $F_c(z, \bar z) = z\,(e^{i\mu} + h(|z|^2))$, $z \in \mathbb{C}$. В этих условиях имеет место

Лемма 3. *Существует C^∞-преобразование $T(x)$, приводящее матрицу Q к виду $(T(F(x)))^{-1} Q(x)\, T(x) = P(x) + \tau(x)$, $\hat\tau = 0$, где P имеет нормальную форму: $P(\Lambda_c x)\, D = DP(x)$, D — полупростая часть матрицы $Q(0)$.*

Доказательство. Существует формальное преобразование $\hat T$, приводящее $\hat Q$ к нормальной форме $\hat P$ (это — вариант теоремы Пуанкаре — Дюляка). Пусть P — матрица с рядом Тейлора $\hat P$, имеющая нормальную форму (см. [2], с. 141). Тогда матрицы Q и $Q_1(x) = = T(Fx)\, P(x)\, (T(x))^{-1}$ имеют одинаковые ряды Тейлора: $Q = Q_1 + \gamma$, $\hat\gamma = 0$. Поэтому $(T(Fx))^{-1} Q(x)\, T(x) = P(x) + \tau(x)$, $\tau(x) = (T(Fx))^{-1} \times \times \gamma(x)\, T(x)$. Лемма доказана.

Переходя теперь к комплексным координатам, положим $\hat P(x) = = \hat B(z, \bar z) = (B_{lj}(z, \bar z))_{l,j}$ $(x \in \boldsymbol{R}^2, z \in \boldsymbol{C})$. Введем в множестве $\operatorname{spec} D = = \{\lambda_k\}$ отношение эквивалентности, положив $\lambda_k \sim \lambda_j \leftrightarrow \lambda_k \lambda_j^{-1} = e^{is\mu}$, $s \in \mathbf{Z}$. Пусть $M_1, \ldots, M_p$ — классы эквивалентности. Занумеруем числа λ_k так, чтобы $\lambda_l \in M_\nu\,(k_{\nu-1} + 1 \leqslant l \leqslant k_\nu$, $\nu = 1, \ldots, p)$, $k_0 = 0$.

Здесь k_ν — число элементов в M_ν. Тогда $\hat{B}_{lj}(z, \bar{z}) = 0$ $(\lambda_l \not\sim \lambda_j)$ и $\hat{B}_{lj} \times$ $\times (z, \bar{z}) = \hat{b}_{lj}(|z|^2)\, \bar{z}^{s_j^\nu - s_l^\nu}$ $(\lambda_l, \lambda_j \in M_\nu)$, где

$$s_j^\nu = \frac{\ln \lambda_{k_{\nu-1}+1} - \ln \lambda_j}{i\mu} \quad (k_{\nu-1} + 1 \leqslant j \leqslant k_\nu),$$

а $\hat{b}_{lj}$ — некоторые ряды от одной переменной. Таким образом, $\hat{P}(x) = T(\bar{z})\, b(|z|^2)\, T^{-1}(\bar{z})$, $T(\bar{z}) = \operatorname{diag}(\bar{z}^{s_1^1} \ldots z^{s_{k_p}^p})$. Сделав преобразование $\tilde{\varphi}(x) = T(\bar{z})\,\varphi(x)$, приведем (2) к уравнению с матрицей $\tilde{Q}(x) = B(x) + \tau(x)$, $\hat{\tau} = 0$, $B(x) = D^{-1}(|z|^2)\, b(|z|^2)$. Здесь

$$D(|z|^2) = \operatorname{diag}\{(e^{-\mu i} + \bar{h}(|z|^2))^{s_1^1}, \ldots, (e^{-\mu i} + h(|z|^2))^{s_{k_p}^p}\}.$$

Таким образом, доказана

Лемма 4. *При* $\dim L_c = 2$ *существует допустимое преобразование, приводящее (2) к уравнению с матрицей* $\tilde{Q}(x) = B(|z|^2) + \tau(x)$, $\hat{\tau} = 0$.

Будем теперь считать, что матрица $Q(x)$ в (2) имеет вид, указанный в лемме 4.

Лемма 5. *Существует допустимое преобразование, приводящее матрицу* Q *в (2) к виду* $\tilde{Q}(x) = D(\|x\|^2) + N(x)$, *где* N — *верхняя нильтреугольная* C^∞*-матрица, а* $D(t)$ $(t \in \boldsymbol{R}_+)$ — *диагональная матрица над полем* $\varkappa$.

Доказательство. Преобразование $\varphi(x) = T(\|x\|^2)\,\tilde{\varphi}(x)$ переводит $B(|z|^2)$ в матрицу $\tilde{B}(|z|^2)$, где $\tilde{B}(t) = T(t \cdot |e^{i\mu} + h(t)|))^{-1} \times$ $\times B(t)\, T(t)$. Так как $|e^{i\mu} + h(t)| = 1 + \gamma(t)$, $\hat{\gamma} \neq 0$, то, в силу леммы 2 (при $F_c(x) = x(1 + \gamma(x))$, существует такое допустимое преобразование, что матрица $\tilde{B}(t)$ треугольна и ее диагональные элементы лежат в поле $\varkappa$. Поэтому можно считать, что $Q(x) = B(\|x\|^2) + \tau(x)$, $\hat{\tau} = 0$, где $B(t)$ — треугольная матрица над $\varkappa$. Остается «избавиться» от плоской добавки τ. Это делается так же, как и при доказательстве леммы 2.

В силу леммы 5 уравнение (2) при $\dim L_c = 2$ также сводится к серии одномерных уравнений вида $\varphi(F_c x) = (d_0 + d_1 \|x\|^\rho + o(\|x\|^\rho)\,\varphi(x) + \gamma(x)$, где $d_0, d_1 \in \boldsymbol{C}$, $\rho > 0$. Доказательство их разрешимости ничем не отличается от случая $\dim L_c = 1$. Таким образом, наша теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. *Ichikava F.* Finitely determined sinqularities of formal vector fields // Invent. math.— 1982.— **66**.— P. 199—214. 2. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. — К.: Наук. думка, 1979.— 170 с. 3. *Белицкий Г. Р.* О сопряженности локальных диффеоморфизмов // Докл. АН СССР, 1970, **191**, № 3. — С. 515—518. 4. *Кузнецов А. М.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функцион. анализ.— 1972.—6, № 2. —с. 41—51.

Поступила в редколлегию 04.10.85