ПРИЛОЖЕНИЯ

П1. Сингулярный интеграл с ядром Коши на всей оси.

П1.1. ***Определение.*** Пусть функция $F(x)$, $x \in R$ *локально гельдерова*: $F(x) \in C^{0,\alpha}[-N, N]$, $0 < \alpha \le 1$ для любого $N > 0$.

Тогда (см. пункт 2.3) для любых x_0 и $N > 0$ существует интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\int_{-N}^{N} \frac{F(x)dx}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_{-N}^{x_0 - \varepsilon} \frac{F(x)dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \varepsilon}^{N} \frac{F(x)dx}{x - x_0} \right\}.$$

Пусть, далее, существует предел

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{F(x)dx}{x - x_0},$$

тогда этот предел мы называем *сингулярным интегралом с ядром Коши на всей оси* и пишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)dx}{x - x_0} \equiv \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{F(x)dx}{x - x_0} \qquad (\text{П}1.1)$$

В частности, если $F(x) \equiv 1$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - x_0} \equiv 0 \qquad (\text{П}1.2)$$

С другой стороны, легко видеть, что введенный нами интеграл (1) можно записать и в таком виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)dx}{x - x_0} = \int_{0}^{\infty} \frac{F(x_0 + x) - F(x_0 - x)}{x} dx \qquad (\text{П}1.3)$$

Представлением (3) удобно пользоваться при вычислении сингулярных интегралов с ядром Коши на всей оси, к чему мы и переходим.

П1.2. ***Спектральные соотношения.*** Пусть теперь в (3) $F(x) = e^{i\lambda x}, \lambda \ne 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x-x_0}dx \equiv \int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(x_0+x)} - e^{-i\lambda(x_0-x)}}{x}dx = e^{i\lambda x_0} \cdot 2i \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}dx ,$$

и, используя известный интеграл Дирихле (см., например, *Зорич В.А. Математический анализ: Учебник. Ч.II. – М.: Наука,1984.– 640 с*. стр. 419),

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x}dx = \frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}, \ \lambda \in R \setminus \{0\},$$

окончательно получаем

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x-x_0}dx = i\frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda x_0} \\ \lambda \in R, \lambda \neq 0 \end{gathered}} \qquad (\text{П}1.4)$$

Далее, отделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x-x_0}dx = -\sin \lambda x_0 \\ \lambda \geq 0 \end{gathered}} \qquad (\text{П}1.5)$$

и

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x-x_0}dx = \cos \lambda x_0 \\ \lambda > 0 \end{gathered}} \qquad (\text{П}1.6)$$

П1.3. ***Связь с интегралом с ядром Гильберта для периодических функций.***

Пусть функция $F(x)$, $x \in R$ удовлетворяет условиям пункта П1.1 и, кроме того, является 2π-периодической

$$F(x+2\pi) \equiv F(x) .$$

Тогда при натуральном n

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)dx}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} \frac{F(x)dx}{x-x_0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)dx}{(x-x_0)+2\pi k} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \left\{ \frac{1}{x-x_0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{2(x-x_0)}{(x-x_0)^2 - (2\pi k)^2} \right\} dx .$$

Используя известное разложение функции котангенс на простейшие дроби (см., например, *Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.III, Ч.2.–М.: Наука, 1984. – 640с*. стр.246)

$$\pi ctg\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2},$$

окончательно имеем

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)dx}{x - x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) ctg\,\frac{x - x_0}{2}\,dx \\ F(x + 2\pi) = F(x)\end{gathered}} \qquad (\text{П}1.7)$$

Замечание. Полагая в (7) $F(x) = e^{inx}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ и используя (4) при $\lambda = n$, получаем еще одно доказательство *спектрального соотношения* для оператора Гильберта (формула (2.20)):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{inx} ctg\,\frac{x - x_0}{2}\,dx = i\,\frac{|n|}{n}\,e^{inx_0}.$$

П1.4. *Выражение интеграла с ядром Коши на всей оси через интеграл с ядром Гильберта*

Пусть функция $F(x), x \in R$ удовлетворяет условиям пункта П1.1.

Сделаем в интеграле (1) замену переменных

$$x = tg\,\frac{\varphi}{2},\ F(x) = u(\varphi), -\pi < \varphi < \pi;\ x_0 = tg\,\frac{\varphi_0}{2}, -\pi < \varphi_0 < \pi.$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)dx}{x - x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\frac{1 + tg^2\,\frac{\varphi}{2}}{tg\,\frac{\varphi}{2} - tg\,\frac{\varphi_0}{2}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi)\frac{\left(1 + tg\,\frac{\varphi}{2}\,tg\,\frac{\varphi_0}{2}\right) + tg\,\frac{\varphi}{2}\left(tg\,\frac{\varphi}{2} - tg\,\frac{\varphi_0}{2}\right)}{tg\,\frac{\varphi}{2} - tg\,\frac{\varphi_0}{2}}\,d\varphi,$$

откуда окончательно получаем

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)dx}{x-x_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\varphi)ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi+C,\\ \text{где}\\ C=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}u(\varphi)tg\frac{\varphi}{2}d\varphi,\ \ u(\varphi)=F(tg\frac{\varphi}{2})\end{array}} \qquad (П1.8)$$

Этот результат получен в работе автора *).

П1.5 ***Квадратурная формула для интеграла с ядром Коши на всей оси.***

Используем полученный в предыдущем пункте результат (формула (8)) для построения квадратурной формулы.

Так же как и в пункте 1.7 введем равноотстоящие узлы на интервале $(-\pi,\pi)$

$$\varphi_k^n=\frac{2\pi k}{2n+1},\ k=0,1,...,2n$$

и обозначим

$$x_k^n=tg\frac{\varphi_k^n}{2}=tg\frac{\pi k}{2n+1}.$$

Подставляя в (8) квадратурную формулу для сингулярного интеграла с ядром Гильберта (3.9), в введенных обозначениях имеем

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)dx}{x-x_0}=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\left[F(x_k^n)-F(x_0)\right]ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_0}{2}+r_n(\varphi_0)+C,\\ \text{где}\\ C=\dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left[F(x_k^n)-F(\infty)\right]ctg\frac{\pi-\varphi_k^n}{2}+r_n(\pi)\end{array}} \qquad (П1.9)$$

В предположении, что

$$F\left(tg\frac{\varphi}{2}\right)=u(\varphi)\in C^{r,\alpha}(R),0<\alpha\le 1$$

---

* *ГандельЮ.В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений на всей оси* // Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума “Метод дискретных особенностей в задачах математической физики”.– Харьков, 1987. – С. 49-51.

для остаточного члена $r_n(\varphi_0)$ имеет место оценка (3.29).

Квадратурная формула (9) существенно упрощается, если, как и в пункте 3.2, положить

$$\varphi_0 \in \left\{\varphi_{0j}^n\right\}_{j=0}^{2n},$$

$$\varphi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi \qquad (П1.10)$$

Обозначая

$$x_{0j}^n = tg\frac{2j+1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad (П1.11)$$

получаем

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)dx}{x-x_{0j}^n} = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}F(x_k^n)ctg\frac{\varphi_k^n-\varphi_{0j}^n}{2} + C + r_n(\varphi_{0j}^n) \\ j = 0,1,...,2n\end{gathered}} \qquad (П1.12)$$

Если функция $F(x)$ стремится к нулю на бесконечности $F(\infty)=0$, так что

$$u(\pi) = 0, \qquad (П1.13)$$

то в этом случае для вычисления интеграла с ядром Гильберта можно воспользоваться квадратурной формулой с равноотстоящими узлами (10). Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)dx}{x-x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[u(\varphi)-u(\varphi_0)\right]ctg\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi + C =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}\left[u(\varphi_{0j}^n)-u(\varphi_0)\right]ctg\frac{\varphi_{0j}^n-\varphi_0}{2} + r_n(\varphi_0) + C =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{2n}\left[F(x_{0j}^n)-F(x_0)\right]ctg\frac{\varphi_{0j}^n-\varphi_0}{2} - \frac{F(x_0)}{2n+1}tg\frac{\varphi_0}{2} + r_n(\varphi_0) + C$$

Эта формула существенно упрощается, когда $x_0 \in \left\{x_k^n\right\}_{k=0}^{2n}$. Имеем

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(x)dx}{x-x_k^n} = \frac{1}{2n+1}\sum_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{2n}F(x_{0j}^n)ctg\frac{\varphi_{0j}^n-\varphi_k^n}{2} + r_n\left(\varphi_k^n\right) + C,\ k = 0,1,...,2n, \\ \text{где} \\ C = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}F(x_k^n)tg\frac{\varphi_k^n}{2} + r_n(\pi)\end{gathered}} \qquad (П1.14)$$

Этот результат был получен в цитированной работе автора (см. сноску на стр. 84) и использован для численного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на всей оси.