Назовемъ значеніе функціи X для $t=0$ черезъ X_0 и будемъ разсматривать только положительныя значенія t. Тогда изъ найденнаго сейчасъ неравенства выведемъ:

$$X \geqq X_0 e^{2\int_0^t \sqrt{p}\,dt}.$$

Отсюда, полагая

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sqrt{p}\,dt = \lambda,$$

заключаемъ, что если X_0 есть величина положительная, то функцію

$$X e^{-2(\lambda-\varepsilon)t},$$

какъ бы мало ни было данное положительное число ε, выборомъ достаточно большого t можно сдѣлать сколь угодно большою.

Пусть для системы (32) найдено $2n$ независимыхъ вещественныхъ рѣшеній, и пусть

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_{2n} \tag{34}$$

суть функціи, въ которыя обращается для нихъ выраженіе X.

Каковы бы ни были наши рѣшенія, ни одна изъ этихъ функцій не будетъ тожественно равною нулю, ибо такое равенство въ силу (33) было бы возможно только для функціи, относящейся къ рѣшенію

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

которое не входитъ въ число разсматриваемыхъ.

Мы можемъ при томъ всегда допустить, что рѣшенія наши выбраны такъ, чтобы для функцій (34) получались выраженія

$$X_1 = r_1^{\frac{2t}{\omega}} F_1(t), \qquad X_2 = r_2^{\frac{2t}{\omega}} F_2(t), \quad \ldots, \quad X_{2n} = r_{2n}^{\frac{2t}{\omega}} F_{2n}(t),$$

гдѣ $r_1, r_2, \ldots, r_{2n}$ суть модули корней характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго періоду ω, а $F_s(t)$ нѣкоторыя вещественныя функціи t, удовлетворяющія условію, чтобы для каждой изъ функцій

$$F_1(t), \quad F_2(t), \quad \ldots, \quad F_{2n}(t), \quad F_1(-t), \quad F_2(-t), \quad \ldots, \quad F_{2n}(-t)$$

характеристичное число было нулемъ.

Мы замѣчаемъ теперь, что всегда найдутся такія значенія t, при которыхъ ни одна изъ функцій (34) не будетъ нулемъ.

Чтобы остановиться на чемъ-либо опредѣленномъ, допустимъ, что этому условію удовлетворяетъ значеніе $t=0$. Допустимъ при томъ, что для $t=0$ функціи

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_m$$

дѣлаются положительными, а остальныя всѣ отрицательными.

На основаніи доказаннаго, мы можемъ тогда утверждать, что какъ бы мало ни было данное положительное число ε, функціи

$$X_1 e^{-2(\lambda-\varepsilon)t}, \quad X_2 e^{-2(\lambda-\varepsilon)t}, \quad \ldots, \quad X_m e^{-2(\lambda-\varepsilon)t}$$

при t достаточно большомъ сдѣлаются всѣ сколь угодно большими. А это при нашемъ предположеніи относительно вида функцій X_s возможно только въ случаѣ, если

$$r_1 \geqq e^{\lambda\omega}, \quad r_2 \geqq e^{\lambda\omega}, \quad \ldots, \quad r_m \geqq e^{\lambda\omega}$$

(число ω мы предполагаемъ положительнымъ).

Разсмотримъ теперь вмѣсто (32) систему, выводимую изъ нея замѣною t на $-t$.

Эта новая система, очевидно, будетъ удовлетворять всѣмъ предположеніямъ, сдѣланнымъ относительно прежней. Поэтому мы можемъ къ ней приложить предыдущія разсужденія, замѣняя функціи (34) слѣдующими:

$$X_1' = -r_1^{-\frac{2t}{\omega}} F_1(-t), \quad X_2' = -r_2^{-\frac{2t}{\omega}} F_2(-t), \quad \ldots, \quad X_{2n}' = -r_{2n}^{-\frac{2t}{\omega}} F_{2n}(-t).$$

Но изъ послѣднихъ функціи

$$X_{m+1}', \quad X_{m+2}', \quad \ldots, \quad X_{2n}'$$

при $t=0$ дѣлаются, согласно допущенному выше, положительными. Поэтому, подобно предыдущему, заключимъ, что

$$\frac{1}{r_{m+1}} \geqq e^{\lambda\omega}, \quad \frac{1}{r_{m+2}} \geqq e^{\lambda\omega}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{r_{2n}} \geqq e^{\lambda\omega}.$$

Такимъ образомъ (принимая въ разсчетъ, что число λ не нуль и положительно) приходимъ къ выводу, что при нашихъ допущеніяхъ характеристичное уравненіе системы (32) будетъ имѣть m корней съ модулями

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m,$$

бóльшими 1, и $2n-m$ корней съ модулями

$$r_{m+1}, \quad r_{m+2}, \quad \ldots, \quad r_{2n},$$

мéньшими 1.

Покажемъ, что необходимо будетъ $m=n$.

Для этого прежде всего замѣчаемъ, что если бы коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ нашихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ удовлетворяли условію $p_{s\sigma} = p_{\sigma s}$ для всякихъ s и σ, взятыхъ изъ ряда $1, 2, \ldots, n$, то равенство $m = n$ несомнѣнно имѣло бы мѣсто. Дѣйствительно, изъ доказаннаго въ предыдущемъ параграфѣ слѣдуетъ, что характеристичное уравненіе системы (32) было бы тогда возвратнымъ.

Обращаясь теперь къ общему случаю, замѣняемъ въ системѣ (32) коэффиціенты $p_{s\sigma}$ слѣдующими выраженіями:

$$q_{s\sigma} = \frac{1}{2}(p_{s\sigma} + p_{\sigma s}) + \frac{\varepsilon}{2}(p_{s\sigma} - p_{\sigma s}), \qquad (s, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

разумѣя подъ ε произвольный вещественный параметръ.

Каково бы ни было число ε, будемъ имѣть

$$q_{s\sigma} + q_{\sigma s} = p_{s\sigma} + p_{\sigma s}.$$

Поэтому наша новая система при всякомъ ε будетъ удовлетворять предположеніямъ, сдѣланнымъ относительно системы (32).

На основаніи доказаннаго мы можемъ, слѣдовательно, утверждать, что характеристичное уравненіе этой новой системы не будетъ имѣть корней съ модулями, равными 1, ни при какихъ значеніяхъ ε.

Но въ такомъ случаѣ, принимая въ разсчетъ, что коэффиціенты A_s въ этомъ уравненіи

$$\varrho^{2n} + A_1\varrho^{2n-1} + \cdots + A_{2n-1}\varrho + A_{2n} = 0$$

будутъ непрерывными функціями ε для всѣхъ значеній послѣдняго (пар. 48), мы должны заключить, что число корней этого уравненія съ модулями, бóльшими 1 (или мéньшими 1) будетъ всегда одно и то же, каково бы ни было ε. Для опредѣленія этого числа достаточно, слѣдовательно, разсмотрѣть предположеніе $\varepsilon = 0$. А такъ какъ въ этомъ предположеніи $q_{s\sigma} = q_{\sigma s}$ при всякихъ s и σ, то въ силу замѣченнаго выше искомое число должно быть равнымъ n.

Теорему нашу мы можемъ поэтому считать доказанной, ибо полагая $\varepsilon = 1$, приходимъ къ системѣ (32).

Показавши, что характеристичное уравненіе этой системы имѣетъ n корней съ модулями, бóльшими 1, и такое же число корней съ модулями, меньшими 1, мы нашли вмѣстѣ съ тѣмъ низшій предѣлъ $e^{\lambda\omega}$ для модулей корней перваго рода и высшій предѣлъ $e^{-\lambda\omega}$ для модулей корней второго рода.

Можно замѣтить, что теорема I параграфа 49$^{\text{го}}$ заключается въ доказанной сейчасъ, какъ нѣкоторый частный случай.

Чтобы дать еще одинъ примѣръ, допустимъ, что для системы (1) удалось найти интегралъ, представляющій квадратичную форму перемѣнныхъ x_s съ постоянными или періодическими коэффиціентами. Допустимъ при томъ, что интегралъ этотъ представляетъ функцію знакоопредѣленную (пар. 15), такъ что при вещественныхъ $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$ не можетъ сдѣлаться численно менѣе функціи

$$N(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

въ которой N означаетъ нѣкоторую положительную постоянную.

Изъ существованія такого интеграла заключимъ, что во всякомъ вещественномъ рѣшеніи системы (1) всѣ функціи x_s будутъ всегда оставаться по числовымъ величинамъ менѣе нѣкотораго предѣла, каково бы ни было положительное или отрицательное t. А это возможно только при условіи, если всѣ корни характеристичнаго уравненія обладаютъ модулями, равными 1, и если при томъ въ рѣшеніяхъ типа (5), соотвѣтствующихъ кратнымъ корнямъ, всѣ функціи $f_s(t)$ остаются періодическими.

Съ указаннымъ сейчасъ случаемъ мы напр. встрѣчаемся, когда коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ системѣ (1) удовлетворяютъ условію

$$p_{s\sigma} + p_{\sigma s} = 0$$

при всякихъ s и σ, взятыхъ изъ ряда $1, 2, \ldots, n$. Система эта обладаетъ тогда интеграломъ

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

53. До сихъ поръ мы разсматривали только вещественныя значенія перемѣннаго t. Но если разсматривать и мнимыя его значенія (изображая ихъ, какъ это принято, точками на нѣкоторой плоскости), а относительно коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$ сдѣлать надлежащія предположенія, то для рѣшенія различныхъ вопросовъ относительно системы (1) и въ частности — вопроса объ опредѣленіи инваріантовъ A_s можно будетъ воспользоваться общими принципами теоріи особенныхъ точекъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Пусть въ плоскости комплексной перемѣнной t проведены двѣ прямыя, параллельныя вещественной оси, съ той и другой стороны ея въ разстояніяхъ отъ нея, равныхъ h, и пусть коэффиціенты $p_{s\sigma}$ (которые по прежнему предполагаемъ періодическими съ вещественнымъ періодомъ ω) даны для всѣхъ точекъ части плоскости, лежащей между означенными прямыми, какъ функціи комплексной перемѣнной t, не имѣющія особенныхъ точекъ на этой части плоскости, включая и самыя прямыя *).

При этомъ условіи, если провести окружность радіуса h съ центромъ въ точкѣ $t = 0$, то для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри этой окружности или на ней самой, коэффиціенты $p_{s\sigma}$, а также и функціи x_s, удовлетворяющія уравненіямъ (1), можно будетъ представлять рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t.

Поэтому, если $\omega \leqq h$ (ω мы предполагаемъ положительнымъ), то пользуясь такими рядами, можно будетъ опредѣлять значенія функцій x_s для $t = \omega$ по даннымъ значе-

---

*) Безконечно-удаленныхъ точекъ мы не разсматриваемъ.

ніямъ ихъ для $t=0$. А ряды, которыми выразятся эти значенія, доставятъ тотчасъ же и ряды для вычисленія инваріантовъ A_s.

Когда $\omega > h$, употребленіе такихъ рядовъ, конечно, не всегда будетъ законно. Но тогда для вычисленія инваріантовъ можно получить нѣкоторые ряды другого рода, пользуясь напр. пріемами, указанными Hamburger'омъ и Poincaré. *)

Мы не будемъ останавливаться здѣсь на разсмотрѣніи этихъ и вообще какихъ бы то ни было рядовъ, которые могутъ быть предложены для вычисленія инваріантовъ. Но укажемъ одинъ изъ простѣйшихъ случаевъ, когда инваріанты могутъ быть опредѣляемы безъ помощи рядовъ.

Случай этотъ выводится изъ извѣстной теоремы Фукса, относящейся къ условіямъ для такъ называемой *правильности* рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій вблизи критическихъ точекъ.

Положимъ

$$e^{i\frac{2\pi t}{\omega}} = z. \qquad (i=\sqrt{-1})$$

Принимая вмѣсто t за независимую перемѣнную z, преобразуемъ систему (1) въ слѣдующую:

$$\left.\frac{2\pi i}{\omega} z \frac{dx_s}{dz} = p_{s1}(z)x_1 + p_{s2}(z)x_2 + \cdots + p_{sn}(z)x_n. \quad (s=1,2,\ldots,n)\right\} \qquad (35)$$

Согласно сдѣланнымъ уже предположеніямъ, коэффиціенты $p_{s\sigma}(z)$ будутъ здѣсь функціями комплексной перемѣнной z, не имѣющими особенныхъ точекъ на части плоскости, лежащей между двумя концентрическими окружностями радіусовъ $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$ и $e^{-\frac{2\pi h}{\omega}}$ съ общимъ центромъ въ точкѣ $z=0$, и въ этой области будутъ однозначными.

Но теперь мы будемъ предполагать, что коэффиціенты эти не имѣютъ особенныхъ точекъ на всей части плоскости, ограниченной окружностью радіуса $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$ съ центромъ въ точкѣ $z=0$.

При такомъ предположеніи система (35) будетъ удовлетворять условіямъ Фуксовой теоремы для точки $z=0$.

Мы можемъ поэтому утверждать, что если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравненія

---

*) Hamburger, *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen* et c. (J. für Mathematik, Bd. 83).

Poincaré, *Sur les groupes des équations différentielles linéaires* (Acta mathematica, tome 4).

См. также недавно появившійся мемуаръ Mittag-Leffler'а: *Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène* (Acta mathematica, tome 15).

$$\begin{vmatrix} p_{11}(0) - \varkappa & p_{12}(0) & \dots & p_{1n}(0) \\ p_{21}(0) & p_{22}(0) - \varkappa & \dots & p_{2n}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(0) & p_{n2}(0) & \dots & p_{nn}(0) - \varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

то числа

$$e^{\chi_1 \omega}, \quad e^{\chi_2 \omega}, \quad \dots, \quad e^{\chi_n \omega} \tag{36}$$

суть корни характеристичнаго уравненія системы (35), соотвѣтствующаго обходу точки $z = 0$ по окружности достаточно малаго радіуса съ центромъ въ этой точкѣ. А такъ какъ при нашихъ предположеніяхъ радіусъ этой окружности можно сдѣлать равнымъ 1, то числа (36) представятъ и корни интересующаго насъ характеристичнаго уравненія системы (1), соотвѣтствующаго измѣненію вещественнаго t на величину періода ω.

Впрочемъ въ справедливости такого результата весьма нетрудно убѣдиться, и не прибѣгая къ теоремѣ Фукса.

Для этого, разумѣя подъ ε нѣкоторый параметръ, разсматриваемъ вмѣсто (35) систему

$$\frac{2\pi i}{\omega} z \frac{dx_s}{dz} = p_{s1}(\varepsilon z)\, x_1 + p_{s2}(\varepsilon z)\, x_2 + \dots + p_{sn}(\varepsilon z)\, x_n, \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

выводимую изъ нея замѣною z на εz.

Изъ самаго способа полученія этой системы слѣдуетъ, что инваріанты ея, соотвѣтствующіе обходу точки $z = 0$ по окружности радіуса 1 съ центромъ въ этой точкѣ, будутъ оставаться неизмѣнными, какова бы ни была отличная отъ нуля величина ε, лишь бы только модуль ея не превосходилъ числа $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$, бóльшаго 1. А изъ теоремы параграфа 48[го] нетрудно вывести, что дѣлая модуль ε достаточно малымъ, инваріанты эти можно сдѣлать сколь угодно мало отличающимися отъ соотвѣтственныхъ инваріантовъ системы

$$\frac{2\pi i}{\omega} z \frac{dx_s}{dz} = p_{s1}(0)\, x_1 + p_{s2}(0)\, x_2 + \dots + p_{sn}(0)\, x_n. \quad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{37}$$

Поэтому инваріанты системы (35), соотвѣтствующіе обходу точки $z = 0$ по означенному выше контуру, необходимо будутъ тожественны съ соотвѣтственными инваріантами системы (37).

Послѣдняя же интегрируется извѣстнымъ образомъ, и корни ея характеристичнаго уравненія опредѣляются именно такъ, какъ было указано выше. *)

Для главной задачи нашего изслѣдованія могутъ представлять интересъ только такія системы уравненій, въ которыхъ коэффиціенты можно предполагать веществен-

*) Пріемъ, которымъ мы сейчасъ воспользовались, легко прилагается и къ доказательству самой теоремы Фукса.

ными для всѣхъ вещественныхъ значеній t. Системы же, удовлетворяющія разсмотрѣнному сейчасъ условію, если въ нихъ коэффиціенты не суть постоянныя величины, очевидно, не принадлежатъ къ числу такихъ. Но къ нимъ путемъ извѣстныхъ преобразованій могутъ, конечно, приводиться и системы съ вещественными коэффиціентами.

Разсмотримъ напр. слѣдующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \dots + p_{sn}x_n - q_{s1}y_1 - q_{s2}y_2 - \dots - q_{sn}y_n , \\ \frac{dy_s}{dt} &= q_{s1}x_1 + q_{s2}x_2 + \dots + q_{sn}x_n + p_{s1}y_1 + p_{s2}y_2 + \dots + p_{sn}y_n , \\ & \qquad (s=1, 2, \dots, n) \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

въ которой коэффиціенты $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$ будемъ предполагать періодическими функціями t съ вещественнымъ періодомъ ω, не имѣющими особенныхъ точекъ ни на вещественной оси, ни въ разстояніяхъ отъ нея, равныхъ или меньшихъ нѣкотораго предѣла h. Кромѣ того, будемъ предполагать, что коэффиціенты эти удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$\int_0^\omega p_{s\sigma} \cos\frac{2\pi mt}{\omega}\, dt = \int_0^\omega q_{s\sigma} \sin\frac{2\pi mt}{\omega}\, dt ,$$

$$\int_0^\omega p_{s\sigma} \sin\frac{2\pi mt}{\omega}\, dt = -\int_0^\omega q_{s\sigma} \cos\frac{2\pi mt}{\omega}\, dt \; *)$$

при всякомъ цѣломъ положительномъ m.

Эти соотношенія выражаютъ, что если разложенія функцій $p_{s\sigma}$ въ ряды синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей $\frac{2\pi t}{\omega}$ суть слѣдующія:

$$p_{s\sigma} = a_{s\sigma}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{s\sigma}^{(m)} \cos\frac{2\pi mt}{\omega} - b_{s\sigma}^{(m)} \sin\frac{2\pi mt}{\omega} \right),$$

то разложенія функцій $q_{s\sigma}$ будутъ вида:

$$q_{s\sigma} = b_{s\sigma}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{s\sigma}^{(m)} \sin\frac{2\pi mt}{\omega} + b_{s\sigma}^{(m)} \cos\frac{2\pi mt}{\omega} \right).$$

Извѣстно, что при разсматриваемыхъ здѣсь предположеніяхъ представленіе коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$ такими рядами возможно для всѣхъ значеній t, которыя изображаются точками, отстоящими отъ вещественной оси въ разстояніяхъ, меньшихъ h.

Обращаясь теперь къ нашей системѣ уравненій, мы замѣчаемъ, что если за неизвѣстныя функціи принять величины

$$u_s = x_s + iy_s , \qquad v_s = x_s - iy_s , \qquad (s=1, 2, \dots, n)$$

---

*) Пути интегрированій предполагаются здѣсь прямолинейными.

разумѣя подъ i $\sqrt{-1}$, то система эта распадется на двѣ

$$\frac{du_s}{dt} = (p_{s1} + iq_{s1})\,u_1 + (p_{s2} + iq_{s2})\,u_2 + \dots + (p_{sn} + iq_{sn})\,u_n,$$
$$(s = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = (p_{s1} - iq_{s1})\,v_1 + (p_{s2} - iq_{s2})\,v_2 + \dots + (p_{sn} - iq_{sn})\,v_n,$$
$$(s = 1, 2, \dots, n)$$

интегрирующіяся отдѣльно.

При томъ каждую изъ этихъ послѣднихъ можно считать удовлетворяющею условіямъ системы, разсмотрѣнной выше, и первую (если $\omega > 0$) — для независимой перемѣнной t, вторую — для независимой перемѣнной $-t$.

Дѣйствительно, если положимъ

$$e^{i\frac{2\pi t}{\omega}} = z,$$

то коэффиціенты первой системы представятся рядами

$$p_{s\sigma} + iq_{s\sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{s\sigma}^{(m)} + ib_{s\sigma}^{(m)})\, z^m,$$

не содержащими отрицательныхъ степеней z и потому при нашихъ предположеніяхъ опредѣляющими функціи комплексной перемѣнной z, не имѣющія особенныхъ точекъ на всей площади круга радіуса $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$ съ центромъ въ точкѣ $z = 0$. Точно также, если положимъ

$$e^{-i\frac{2\pi t}{\omega}} = \zeta,$$

то коэффиціенты второй системы представятся рядами

$$p_{s\sigma} - iq_{s\sigma} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{s\sigma}^{(m)} - ib_{s\sigma}^{(m)})\, \zeta^m,$$

не содержащими отрицательныхъ степеней ζ и слѣдовательно опредѣляющими функціи комплексной перемѣнной ζ, не имѣющія особенныхъ точекъ на площади круга радіуса $e^{\frac{2\pi h}{\omega}}$ съ центромъ въ точкѣ $\zeta = 0$.

Вслѣдствіе этого мы можемъ утверждать, что корни характеристичнаго уравненія системы (38) найдутся такъ:

Полагая

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p_{s\sigma}\, dt = a_{s\sigma}, \qquad \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} q_{s\sigma}\, dt = b_{s\sigma},$$

замѣняемъ коэффиціенты $p_{s\sigma}$, $q_{s\sigma}$ въ этой системѣ величинами $a_{s\sigma}$, $b_{s\sigma}$ и для получаемой такимъ путемъ системы съ постоянными коэффиціентами составляемъ опредѣляющее уравненіе. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{2n}$ суть корни этого уравненія. Тогда числа

$$e^{\varkappa_1 \omega}, \quad e^{\varkappa_2 \omega}, \ldots, \quad e^{\varkappa_{2n} \omega}$$

будутъ искомыми корнями характеристичнаго уравненія, соотвѣтствующаго періоду ω.

Названное здѣсь опредѣляющее уравненіе будетъ вида $\Delta\Delta' = 0$, гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + ib_{11} - \varkappa & a_{12} + ib_{12} & \ldots & a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} - \varkappa & \ldots & a_{2n} + ib_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} + ib_{n1} & a_{n2} + ib_{n2} & \ldots & a_{nn} + ib_{nn} - \varkappa \end{vmatrix},$$

а Δ' получается изъ Δ замѣною величинъ $a_{s\sigma} + ib_{s\sigma}$ величинами $a_{s\sigma} - ib_{s\sigma}$.

Изслѣдованіе дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

54. Пусть изслѣдуемыя дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія имѣютъ обычный видъ:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s, \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{39}$$

гдѣ X_s суть функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, разлагающіяся въ ряды

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не содержащіе членовъ ниже второго измѣренія.

Мы будемъ здѣсь разсматривать эти уравненія въ предположеніи, что всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ суть періодическія функціи t съ однимъ и тѣмъ же вещественнымъ періодомъ ω.

При томъ, разсматривая здѣсь исключительно только вещественныя значенія t, мы будемъ предполагать, что коэффиціенты эти остаются опредѣленными, непрерывными и вещественными для всѣхъ такихъ значеній t, и что ряды, которыми выражаются функціи X_s, представляютъ голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t (пар. 33, примѣч.).

При условіи періодичности коэффиціентовъ въ этихъ рядахъ, послѣднее предположеніе, конечно, есть только иное выраженіе предположенія параграфа 4$^{\underline{аго}}$ или, если угодно, предположенія параграфа 11$^{\underline{аго}}$.

Вмѣсто системы (39) мы будемъ часто разсматривать различныя ея преобразованія и между прочимъ — преобразованія посредствомъ линейныхъ подстановокъ съ періодическими коэффиціентами.

Эти послѣднія преобразованія всегда будутъ таковы, что коэффиціенты въ преобразованной системѣ будутъ обладать всѣми перечисленными выше свойствами.

Названныя подстановки можно будетъ при томъ выбирать такъ, чтобы для преобразованной системы коэффиціенты въ членахъ перваго измѣренія выходили постоянными, и такое преобразованіе будетъ возможно съ сохраненіемъ вещественности всѣхъ коэффиціентовъ, если только періодъ ω выбранъ такъ, чтобы число $\frac{\omega}{2}$ было также періодомъ для коэффиціентовъ системы (39) (стр. 182).

Мы будемъ часто говорить о характеристичномъ уравненіи системы дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія, разумѣя подъ этимъ характеристичное уравненіе системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, относящейся къ первому приближенію. При томъ всегда будемъ предполагать, что рѣчь идетъ о характеристичномъ уравненіи, соотвѣтствующемъ періоду ω. Послѣдній же, чтобы имѣть въ виду нѣчто опредѣленное, всегда будемъ считать положительнымъ.

Разсмотримъ ряды, которые получаются при интегрированіи системы (39) по способу, изложенному въ параграфѣ 3$^{\underline{емъ}}$.

Пусть $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ суть корни характеристичнаго уравненія этой системы.

Останавливаясь на какихъ-либо опредѣленіяхъ логариѳмовъ, положимъ

$$\frac{1}{\omega}\log\varrho_1 = \varkappa_1, \quad \frac{1}{\omega}\log\varrho_2 = \varkappa_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{\omega}\log\varrho_n = \varkappa_n.$$

Тогда, если

$$x_1^{(m)}, \quad x_2^{(m)}, \quad \dots, \quad x_n^{(m)}$$

суть совокупности членовъ въ этихъ рядахъ $m^{\underline{аго}}$ измѣренія относительно постоянныхъ произвольныхъ, по степенямъ которыхъ производится разложеніе, то для величинъ $x_s^{(m)}$ получатся выраженія вида

$$x_s^{(m)} = \sum T_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \dots + m_n\varkappa_n)t}, \tag{40}$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа $m_1, m_2, \dots, m_n$, подчиненныя условію

$$0 < m_1 + m_2 + \dots + m_n \leqq m,$$

и гдѣ всѣ $T_s^{(m_1, \dots, m_n)}$ означаютъ или періодическія функціи t, или суммы конечнаго числа членовъ, представляющихъ произведенія изъ періодическихъ функцій на нѣкоторыя цѣлыя неотрицательныя степени t. *)

Въ этомъ убѣдимся, разсматривая ближе выраженія $x_s^{(m)}$, данныя въ параграфѣ 3$^{\text{емъ}}$, и принимая въ разсчетъ нижеслѣдующія формулы.

Пусть $f(t)$ есть періодическая функція t съ періодомъ ω, m цѣлое положительное число или нуль и $\varkappa$ постоянная, для которой число $\varkappa\omega$ не представляется подъ видомъ $2\pi N\sqrt{-1}$ ни при какомъ вещественномъ цѣломъ N. Тогда будемъ имѣть:

$$\int e^{\varkappa t} t^m f(t)\,dt = e^{\varkappa t}[t^m f_0(t) + t^{m-1} f_1(t) + \dots + f_m(t)] + \text{Const.},$$

$$\int t^m f(t)\,dt = \frac{h}{m+1}\, t^{m+1} + t^m \varphi_0(t) + t^{m-1}\varphi_1(t) + \dots + \varphi_m(t),$$

гдѣ всѣ $f_s(t)$, $\varphi_s(t)$ означаютъ нѣкоторыя періодическія функціи t съ періодомъ ω, а h слѣдующую постоянную:

$$h = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(t)\,dt.$$

Если при составленіи разсматриваемыхъ рядовъ вычисленія ведутся такъ, чтобы всѣ $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m > 1$, при $t = 0$ дѣлались нулями, то ряды эти, когда модули постоянныхъ, по степенямъ которыхъ они располагаются, достаточно малы, будутъ, какъ мы знаемъ, дѣйствительно представлять функціи, удовлетворяющія нашимъ уравненіямъ, по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣняемости t.

Но отбрасывая указанное сейчасъ условіе, вычисленія можно вести такъ, чтобы въ выраженіяхъ (40) исчезали всѣ члены, для которыхъ

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n < m,$$

и чтобы выраженія $T_s^{(m_1, \dots, m_n)}$ выходили вида

$$T_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} = K_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}\, \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n},$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ произвольныя постоянныя, а $K_s^{(m_1, \dots, m_n)}$ независящія отъ нихъ функціи t.

Если получаемые при этомъ ряды разсматривать, какъ расположенные по степенямъ величинъ

---

*) Періодическія функціи, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, обладаютъ періодомъ ω и остаются опредѣленными и непрерывными для всѣхъ вещественныхъ значеній t. Вообще всѣ періодическія функціи t, съ которыми мы встрѣтимся далѣе, будутъ обладать такими же свойствами. Но каждый разъ упоминать объ этомъ для сокращенія рѣчи не будемъ.

$$\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}, \quad \alpha_2 e^{\varkappa_2 t}, \quad \ldots, \quad \alpha_n e^{\varkappa_n t},$$

то коэффиціенты въ нихъ будутъ суммами конечнаго числа періодическихъ и вѣковыхъ членовъ *).

Относительно сходимости этихъ рядовъ вообще мы не можемъ дѣлать никакихъ опредѣленныхъ заключеній. Но въ случаѣ, когда между числами $\varkappa_s$ находятся такія

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_k, \tag{41}$$

вещественныя части которыхъ отличны отъ нуля и всѣ одного и того же знака, и когда ряды эти составляются въ предположеніи

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_n = 0,$$

для нихъ будетъ справедлива теорема, вполнѣ аналогичная той, которая была формулирована въ параграфѣ 23[емъ].

Въ этомъ случаѣ, при произвольно выбранныхъ значеніяхъ постоянныхъ α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$, разсматриваемыми рядами будетъ опредѣляться нѣкоторое рѣшеніе системы (39) или для всякаго t, бóльшаго нѣкотораго предѣла (зависящаго отъ выбора названныхъ постоянныхъ), когда вещественныя части чиселъ (41) всѣ отрицательны, или для всякаго t, мéньшаго нѣкотораго предѣла, когда вещественныя части этихъ чиселъ всѣ положительны.

55. Изъ предыдущаго тотчасъ же выводятся нѣкоторыя предложенія, относящіяся къ условіямъ устойчивости въ занимающемъ насъ теперь случаѣ.

Такъ изъ теоремы II параграфа 13[го] выводится слѣдующая:

Теорема I. — *Всякій разъ, когда характеристичное уравненіе системы дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія имѣетъ корни съ модулями, мéньшими 1, невозмущенное движеніе обладаетъ извѣстною условною устойчивостью, и между возмущеніями находятся такія, при которыхъ возмущенныя движенія асимптотически приближаются къ невозмущенному. Если число названныхъ корней есть k, то при этихъ возмущеніяхъ могутъ оставаться произвольными k изъ начальныхъ значеній величинъ, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость.*

Что касается устойчивости безусловной, то изъ теоремы I указаннаго сейчасъ параграфа и изъ замѣченнаго въ параграфѣ 26[омъ] (примѣч.) въ этомъ отношеніи выводится слѣдующее предложеніе:

Теорема II. — *Когда характеристичное уравненіе обладаетъ только корнями, модули которыхъ меньше 1, невозмущенное движеніе устойчиво и при томъ — такъ, что*

---

*) Мы будемъ называть вѣковыми всякіе члены вида $t^m f(t)$, гдѣ m цѣлое положительное число и $f(t)$ періодическая функція.

всякое возмущенное движенiе, достаточно къ нему близкое, приближается къ нему асимптотически. Когда же въ числѣ корней названнаго уравненiя находятся такiе, модули которыхъ больше 1, движенiе это неустойчиво.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что сомнительными по отношенiю къ устойчивости остаются только тѣ случаи, когда характеристичное уравненiе, не имѣя корней съ модулями, бо́льшими 1, имѣетъ корни съ модулями, равными 1.

Однако для многихъ вопросовъ такiе случаи суть единственные, въ которыхъ возможна безусловная устойчивость.

Таковы напр. всѣ вопросы, для которыхъ система дифференцiальныхъ уравненiй возмущеннаго движенiя имѣетъ каноническую форму.

Мы знаемъ (пар. 51), что для такой системы всѣ корни характеристичнаго уравненiя распадаются на пары такихъ, произведенiя которыхъ равны 1. Поэтому безусловная устойчивость для вопросовъ этой категорiи возможна только въ случаѣ, когда всѣ корни характеристичнаго уравненiя обладаютъ равными 1 модулями.

Вообще вопросы объ устойчивости въ указанныхъ сомнительныхъ случаяхъ уже для движенiй установившихся представляются весьма трудными. Для движенiй же перiодическихъ затрудненiя дѣлаются, конечно, еще болѣе серьезными. Однако въ извѣстныхъ случаяхъ этого рода (при условiи, что систему линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй, соотвѣтствующую первому приближенiю, удалось проинтегрировать) для названныхъ вопросовъ могутъ быть предложены нѣкоторыя общiя методы изслѣдованiя.

Подобно тому, какъ въ предыдущей главѣ, мы разсмотримъ здѣсь послѣдовательно два такихъ случая: 1) когда характеристичное уравненiе имѣетъ одинъ равный 1 корень при остальныхъ корняхъ съ модулями, ме́ньшими 1, и 2) когда уравненiе это имѣетъ два мнимыхъ сопряженныхъ корня съ модулями, равными 1, а остальные всѣ, какъ и въ первомъ случаѣ, съ модулями, ме́ньшими 1.

Мы не указали здѣсь случая, когда характеристичное уравненiе имѣетъ корень, равный -1, при остальныхъ корняхъ съ модулями, ме́ньшими 1, такъ какъ случай этотъ приведется къ первому изъ сейчасъ указанныхъ, если за перiодъ принять число, вдвое бо́льшее прежняго.

1ый случай: одинъ равный единицѣ корень.

56. Допустимъ, что характеристичное уравненiе разсматриваемой системы (которая пусть будетъ $n+1$аго порядка) имѣетъ одинъ равный 1 корень и n корней съ модулями, ме́ньшими 1.

Въ силу изложеннаго въ параграфѣ 47омъ мы можемъ предположить, что посредствомъ линейной подстановки съ перiодическими коэффицiентами система наша преобразована къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X,\\ \frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s,\\ &\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(42)}$$

гдѣ X, X_s, представляющія голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, не содержатъ въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія.

Коэффиціенты въ этихъ разложеніяхъ, равно какъ и коэффиціенты p_s суть нѣкоторыя періодическія функціи t. Коэффиціенты же $p_{s\sigma}$ будемъ предполагать постоянными и согласно допущенному — такими, чтобы уравненіе

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22}-\varkappa & \cdots & p_{2n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0 \qquad\textbf{(43)}$$

имѣло только корни съ отрицательными вещественными частями.

Всѣ коэффиціенты въ системѣ (42) будемъ предполагать при томъ вещественными.

Въ двухъ случаяхъ, какъ увидимъ, вопросъ объ устойчивости будетъ рѣшаться непосредственно по виду уравненій (42).

Если $X^{(0)}$, $X_s^{(0)}$ суть выраженія, въ которыя обращаются функціи X, X_s при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

то однимъ изъ этихъ случаевъ будетъ тотъ, когда функція $X^{(0)}$ не равна тожественно нулю и разложеніе ея по восходящимъ степенямъ x начинается членомъ съ постояннымъ коэффиціентомъ, а степень этого члена не выше наинизшей изъ степеней x, встрѣчающихся въ разложеніяхъ функцій $X_s^{(0)}$, и когда при томъ всѣ p_s суть нули. Другимъ будетъ тотъ, когда $X^{(0)}$, всѣ $X_s^{(0)}$ и всѣ p_s тожественно равны нулю.

Что же касается всѣхъ прочихъ возможныхъ случаевъ, то они, какъ сейчасъ покажемъ, будутъ приводиться путемъ нѣкоторыхъ преобразованій къ этимъ двумъ.

Будемъ стараться удовлетворить уравненіямъ (42) рядами

$$\left.\begin{aligned} x &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots,\\ x_s &= u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + u_s^{(3)}c^3 + \ldots,\\ &\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(44)}$$

расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ произвольной постоянной c, съ коэффиціентами $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$, представляющими или періодическія функціи t, или суммы конечнаго числа періодическихъ и вѣковыхъ членовъ.

Опредѣленіе этихъ коэффиціентовъ будетъ зависѣть отъ дифференціальныхъ уравненій, по существу такого же характера, какъ и тѣ, съ которыми мы имѣли дѣло въ параграфѣ 34$^{\text{омъ}}$, и такъ же, какъ и тамъ, придемъ къ выводу, что если между функціями $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ существуютъ непеpіодическія, то такія найдутся уже въ ряду функцій

$$u^{(2)}, \quad u^{(3)}, \quad u^{(4)}, \quad \ldots,$$

и что если первою непеpіодическою въ ряду этомъ оказывается $u^{(m)}$, то функціи

$$u_s^{(1)}, \quad u_s^{(2)}, \quad \ldots, \quad u_s^{(m-1)} \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

всѣ будутъ періодическими, а функція $u^{(m)}$ будетъ вида

$$u^{(m)} = gt + v,$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, а v періодическая функція t.

Допуская, что мы имѣемъ дѣло съ такимъ случаемъ, и что вычисленіе было ведено такъ, чтобы всѣ $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ выходили вещественными, преобразовываемъ систему (42) посредствомъ подстановки

$$\begin{gathered} x = z + u^{(2)}z^2 + \ldots + u^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m, \\ x_s = u_s^{(1)}z + u_s^{(2)}z^2 + \ldots + u_s^{(m-1)}z^{m-1} + z_s. \\ (s=1, 2, \ldots, n) \end{gathered}$$

При этомъ приходимъ къ системѣ прежняго вида

$$\left.\begin{gathered} \frac{dz}{dt} = Z, \qquad \frac{dz_s}{dt} = p_{s1}z_1 + p_{s2}z_2 + \ldots + p_{sn}z_n + Z_s, \\ (s=1, 2, \ldots, n) \end{gathered}\right\} \qquad (45)$$

но удовлетворяющей условіямъ перваго изъ указанныхъ выше двухъ случаевъ. Дѣйствительно, нетрудно убѣдиться, что если $Z^{(0)}$, $Z_s^{(0)}$ суть функціи, въ которыя обращаются Z, Z_s при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, то разложеніе функціи $Z^{(0)}$ по восходящимъ степенямъ z будетъ начинаться $m^{\text{ой}}$ степенью послѣдняго, которая будетъ сопровождаться постояннымъ коэффиціентомъ g, а разложенія функцій $Z_s^{(0)}$ не будутъ содержать z въ степеняхъ ниже $m^{\text{ой}}$.

Допустимъ теперь, что мы имѣемъ дѣло съ тѣмъ случаемъ, когда $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ оказываются всѣ періодическими, какъ бы велико ни было число l.

Тогда такъ же, какъ въ параграфѣ 35$^{\text{омъ}}$, докажемъ, что если при вычисленіи соблюдается правило, чтобы всѣ $u^{(l)}$ обращались въ нуль для одного и того же даннаго значенія t, напр. $t=0$, то ряды (44) при $|c|$ достаточно маломъ будутъ абсолютно сходящимися и при томъ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Рядами этими будетъ опредѣляться тогда нѣкоторое періодическое рѣшеніе системы (42), и при всякомъ вещественномъ численно достаточно маломъ c рѣшенію этому будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое періодическое движеніе. Мы будемъ, слѣдовательно, имѣть дѣло съ нѣкоторымъ непрерывнымъ рядомъ періодическихъ движеній, заключающимъ въ себѣ и разсматриваемое невозмущенное.

Въ этомъ случаѣ, преобразовывая систему (42) посредствомъ подстановки

$$x = z + u^{(2)} z^2 + u^{(3)} z^3 + \dots ,$$
$$x_s = z_s + u_s^{(1)} z + u_s^{(2)} z^2 + \dots , \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

получимъ систему вида (45), въ которой Z и всѣ Z_s при $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$ будутъ дѣлаться нулями. Мы придемъ, слѣдовательно, къ второму изъ указанныхъ выше двухъ случаевъ.

Въ обоихъ случаяхъ преобразованія наши таковы, что задача объ устойчивости по отношенію къ прежнимъ перемѣннымъ x, x_s будетъ вполнѣ равносильна задачѣ объ устойчивости по отношенію къ новымъ z, z_s.

Замѣтимъ, кромѣ того, что если функціи X, X_s голоморфны по отношенію къ перемѣннымъ x, x_σ въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t (что и имѣетъ мѣсто въ силу предположеннаго въ параграфѣ 54$^{\text{омъ}}$), то Z, Z_s будутъ по отношенію къ z, z_σ голоморфными также въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

57. Разсмотримъ систему (45) въ предположеніи, что она удовлетворяетъ условіямъ перваго случая.

Означая черезъ g отличную отъ нуля постоянную, черезъ $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(m-1)}$ независящія отъ z линейныя формы величинъ z_s съ періодическими коэффиціентами и черезъ Q квадратичную форму тѣхъ же величинъ съ такими же коэффиціентами, допустимъ, что

$$Z = gz^m + P^{(1)} z + P^{(2)} z^2 + \dots + P^{(m-1)} z^{m-1} + Q + \dots ,$$

и что выраженіе, входящее во вторую часть до члена Q включительно, представляетъ совокупность всѣхъ членовъ функціи Z, которые или ниже $m+1^{\text{аго}}$ измѣренія и содержатъ величины z_s въ степеняхъ не выше первой, или ниже третьяго измѣренія.

По свойству нашихъ уравненій, функціи Z_s въ членахъ, не зависящихъ отъ величинъ z_σ, не будутъ содержать z въ степеняхъ ниже $m^{\text{ой}}$.

Поэтому, разсматривая, кромѣ такихъ членовъ, еще только члены, линейные относительно величинъ z_σ, и располагая тѣ и другіе по восходящимъ степенямъ z, можемъ допустить, что

$$Z_s = g_s z^m + \dots + P_s^{(1)} z + P_s^{(2)} z^2 + P_s^{(3)} z^3 + \dots + \dots .$$

Здѣсь g_s суть нѣкоторыя періодическія функціи t, а $P_s^{(j)}$ линейныя формы величинъ z_σ съ періодическими коэффиціентами.

Означимъ теперь черезъ $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(m-1)}$ нѣкоторыя подлежащія нашему выбору линейныя формы величинъ z_s съ періодическими коэффиціентами, а черезъ W

также подлежащую нашему выбору и съ такими же коэффиціентами квадратичную форму этихъ величинъ.

Разсматривая сначала случай, когда m есть число четное, положимъ

$$V = z + U^{(1)} z + U^{(2)} z^2 + \dots + U^{(m-1)} z^{m-1} + W$$

и постараемся распорядиться линейными формами $U^{(k)}$ такъ, чтобы въ выраженіи производной $\frac{dV}{dt}$, составленной въ силу нашихъ дифференціальныхъ уравненій, исчезали всѣ члены, линейные относительно величинъ z_s и содержащіе z въ степеняхъ ниже $m^{\text{ой}}$. Для этого означенныя формы надо будетъ выбрать согласно уравненіямъ

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} z_1 + \dots + p_{sn} z_n) \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + P^{(k)} + \sum_{s=1}^{n} \left(P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s} + \dots + P_s^{(k-1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s} \right) = 0 .$$

$$(k = 1,\ 2,\ \dots,\ m-1)$$

(гдѣ вторая сумма при $k=1$ должна быть замѣняема нулемъ). А такая задача при разсматриваемомъ характерѣ корней уравненія (43) всегда будетъ возможна въ предположеніи періодичности коэффиціентовъ формъ $U^{(k)}$. Предположеніе это дѣлаетъ ее при томъ вполнѣ опредѣленною.

Остановившись на такомъ выборѣ формъ $U^{(k)}$, форму W выберемъ согласно уравненію

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \dots + p_{sn} z_n) \frac{\partial W}{\partial z_s} + \frac{\partial W}{\partial t} + Q = g(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2),$$

что также всегда возможно сдѣлать.

Тогда найдемъ

$$\frac{dV}{dt} = g(z^m + z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) + S,$$

разумѣя подъ S выраженіе вида

$$S = v z^m + \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma} z_s z_\sigma ,$$

въ которомъ v, $v_{s\sigma}$ суть нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ t, z, z_1, z_2, $\dots$, z_n, уничтожающіяся при

$$z = z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0 ,$$

періодическія относительно t и голоморфныя относительно z, z_s въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

Наша функція V будетъ, слѣдовательно, удовлетворять всѣмъ условіямъ теоремы II параграфа $16^{\text{аго}}$. Мы должны поэтому заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Разсмотримъ теперь случай нечетнаго m.

Полагая

$$V = W + \frac{1}{2} z^2 + U^{(1)} z^2 + U^{(2)} z^3 + \dots + U^{(m-1)} z^m,$$

выбираемъ квадратичную форму W съ постоянными коэффиціентами согласно уравненію

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \dots + p_{sn} z_n) \frac{\partial W}{\partial z_s} = g(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2). \qquad (46)$$

Затѣмъ линейными формами $U^{(j)}$ распоряжаемся такъ, чтобы въ выраженіи производной $\frac{dV}{dt}$, составленной въ силу нашихъ дифференціальныхъ уравненій, исчезали всѣ члены, линейные относительно величинъ z_s и содержащіе z въ степеняхъ ниже $m + 1^{\text{ой}}$, для чего формы эти опредѣляемъ уравненіями

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} z_1 + \dots + p_{sn} z_n) \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} + P^{(k)} + \sum_{s=1}^{n} \left(P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s} + \dots + P_s^{(k-1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s} \right) = 0,$$

$$(k = 1, 2, \dots, m-2)$$

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \dots + p_{sn} z_n) \frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial t} +$$

$$+ P^{(m-1)} + \sum_{s=1}^{n} \left(g_s \frac{\partial W}{\partial z_s} + P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(m-2)}}{\partial z_s} + \dots + P_s^{(m-2)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s} \right) = 0.$$

Вслѣдствіе этого находимъ

$$\frac{dV}{dt} = g(z^{m+1} + z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) + S,$$

разумѣя подъ S нѣкоторое выраженіе вида

$$S = v z^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma} z_s z_\sigma,$$

при такомъ же значеніи буквъ v, $v_{s\sigma}$, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Такимъ образомъ при разсматриваемомъ опредѣленіи формъ W, $U^{(j)}$ функція V выходитъ такою, что производная ея представляетъ знакоопредѣленную функцію перемѣнныхъ z, z_s, t, обладающую при достаточно малыхъ $|z|$, $|z_s|$ знакомъ постоянной g.

Поэтому, замѣчая, что форма W, какъ удовлетворяющая уравненію (46), по теоремѣ II параграфа $20^{\text{го}}$ сохраняетъ знакъ, противоположный знаку g, подобно тому, какъ въ параграфѣ $29^{\text{омъ}}$ (стр. 96), заключаемъ, что при $g < 0$ невозмущенное движеніе устойчиво, а при $g > 0$ неустойчиво.

Мы можемъ кромѣ того утверждать, что при $g < 0$ возмущенныя движенія, соотвѣтствующія какимъ угодно численно достаточно малымъ возмущеніямъ, будутъ асимптотически приближаться къ невозмущенному движенію.

58. Разсмотримъ теперь систему (45) въ предположеніи, что она удовлетворяетъ условіямъ второго случая, т. е. въ предположеніи, что функціи Z, Z_s при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ всѣ дѣлаются нулями.

Подобно тому, какъ въ параграфѣ 38$^{\text{омъ}}$, докажемъ, что въ этомъ случаѣ она будетъ допускать полное интегральное уравненіе вида

$$z = c + f(z_1, z_2, \ldots, z_n, c, t),$$

гдѣ c произвольная постоянная, а f функція величинъ z_s, c, t, которая по отношенію къ z_s, c есть голоморфная въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t и въ своемъ разложеніи, не содержащемъ ни членовъ перваго измѣренія относительно z_s, c, ни членовъ, не зависящихъ отъ величинъ z_s, обладаетъ коэффиціентами, представляющими вещественныя періодическія функціи t. *)

А пользуясь этимъ уравненіемъ для исключенія перемѣнной z и разсматривая систему, выводимую такимъ путемъ изъ (45), легко докажемъ (пар. 38), что въ нашемъ предположеніи невозмущенное движеніе всегда будетъ устойчивымъ, что всякое достаточно близкое къ нему возмущенное движеніе будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ періодическихъ движеній

$$z = c, \qquad z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

и что изъ этихъ послѣднихъ всѣ, соотвѣтствующія величинамъ c, численно достаточно малымъ, будутъ устойчивыми.

Примѣчаніе. — Изъ изложеннаго слѣдуетъ, что всякій разъ, когда системѣ (42) возможно удовлетворить періодическими рядами (44), она будетъ обладать голоморфнымъ интеграломъ вида

$$x + F(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \tag{47}$$

гдѣ F означаетъ голоморфную функцію величинъ x, $x_1, \ldots, x_n$, разложеніе которой не содержитъ членовъ ниже второго измѣренія и обладаетъ періодическими относительно t коэффиціентами.

---

*) Система (45) нѣсколько болѣе общая, чѣмъ та, съ которою мы имѣли дѣло въ параграфѣ 38$^{\text{омъ}}$. Но это обстоятельство, которымъ обусловливается болѣе общій видъ разсматриваемаго здѣсь интегральнаго уравненія, не вызываетъ существенныхъ измѣненій въ доказательствѣ. Послѣднее по прежнему будетъ основываться только на трехъ слѣдующихъ предположеніяхъ: 1) что корни уравненія (43) обладаютъ всѣ отличными отъ нуля вещественными частями одного и того же знака, 2) что функціи Z, Z_s при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$ всѣ дѣлаются нулями и 3) что функціи эти по отношенію къ z, z_σ голоморфны въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t.

При этомъ всякій періодическій относительно t голоморфный интегралъ будетъ голоморфною функціей одного изъ интеграловъ вида (47).

Нетрудно убѣдиться также и въ справедливости обратнаго: если система (42) допускаетъ интегралъ, періодическій относительно t и голоморфный относительно x, x_s, то будетъ допускать также и періодическое рѣшеніе вида (44) (пар. 38, примѣч. и пар. 44).

59. Выводы, къ которымъ мы пришли, можно резюмировать слѣдующимъ образомъ:

Пусть дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія преобразованы къ виду (42) и для нихъ ищется рѣшеніе, зависящее отъ одной постоянной произвольной с, подъ видомъ рядовъ (44), расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ этой постоянной, при слѣдующемъ всегда возможномъ условіи: чтобы коэффиціенты $u_s^{(1)}$ *въ этихъ рядахъ представляли періодическія функціи* t, *чтобы такими же были всѣ* $u_s^{(2)}$, *если коэффиціентъ* $u^{(2)}$ *оказывается періодическимъ, и вообще — чтобы были періодическими всѣ* $u_s^{(l)}$, *если такими оказываются всѣ* $u^{(j)}$, *для которыхъ* $j \leqq l$. *Въ этомъ предположеніи допустимъ, что* $u^{(m)}$ *есть первая непеpіодическая въ ряду функцій*

$$u^{(2)}, \quad u^{(3)}, \quad u^{(4)}, \quad \ldots \tag{48}$$

Тогда, если m *число четное, необходимо заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво. Если же* m *число нечетное, то для рѣшенія вопроса объ устойчивости должно обратиться къ выраженію функціи* $u^{(m)}$, *которое всегда будетъ вида*

$$u^{(m)} = gt + v,$$

гдѣ g *отличная отъ нуля постоянная, а* v *періодическая функція* t. *Вопросъ рѣшится при этомъ по знаку постоянной* g, *и въ случаѣ* $g > 0$ *невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ, а въ случаѣ* $g < 0$ *устойчивымъ.*

Возможно, что въ ряду (48), какъ бы далеко онъ ни былъ продолжаемъ, всѣ функціи $u^{(l)}$ *будутъ періодическими. Въ этомъ случаѣ будетъ существовать нѣкоторый непрерывный рядъ періодическихъ движеній, заключающій въ себѣ и разсматриваемое невозмущенное, и всѣ движенія этого ряда, достаточно близкія къ невозмущенному, включая и послѣднее, будутъ устойчивыми.*

Примѣчаніе 1. — Для составленія функцій (48) можно, если угодно, воспользоваться также пріемомъ, подобнымъ тому, который былъ указанъ въ концѣ параграфа 40$^{\text{го}}$ для рѣшенія аналогичной задачи.

Для этого разсматриваемъ слѣдующую систему частныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$X\frac{dx_s}{dx} + \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

опредѣляющую величины x_s, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ x и t.

Нетрудно убѣдиться, что при разсматриваемыхъ здѣсь условіяхъ системѣ этой всегда возможно удовлетворить (по крайней мѣрѣ формально) рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣннаго x, не содержащими членовъ съ нулевою степенью послѣдняго и обладающими періодическими относительно t коэффиціентами. При томъ задача о составленіи такихъ рядовъ будетъ вполнѣ опредѣленною.

Внося эти ряды въ выраженіе функціи X и представляя результатъ подъ видомъ ряда

$$X^{(2)}x^2 + X^{(3)}x^3 + X^{(4)}x^4 + \dots,$$

расположеннаго по восходящимъ степенямъ x, можемъ опредѣлять затѣмъ функціи (48) послѣдовательно изъ условія, чтобы при всякомъ цѣломъ k, бо́льшемъ 1, въ выраженіи

$$\frac{dx}{dt} - X^{(2)}x^2 - X^{(3)}x^3 - \dots - X^{(k)}x^k$$

послѣ подстановки

$$x = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \dots + u^{(k)}c^k$$

исчезали всѣ члены, содержащіе постоянную c въ степеняхъ ниже $k+1^{\text{ой}}$.

Можно замѣтить, что въ случаѣ, когда система (42) допускаетъ періодическое рѣшеніе, разсматриваемые ряды при достаточно маломъ $|x|$ навѣрно будутъ сходящимися. Когда же такого рѣшенія не существуетъ, относительно сходимости ихъ вообще нельзя сказать ничего опредѣленнаго. Но это обстоятельство для нашей задачи несущественно.

Примѣчаніе 2. — Мы предполагали, что коэффиціенты $p_{s\sigma}$ въ уравненіяхъ (42) суть постоянныя величины. Но это предположеніе было сдѣлано только для упрощенія доказательствъ и нисколько не необходимо для приложимости изложеннаго сейчасъ способа рѣшенія вопроса.

Примѣръ. — Пусть предложены уравненія

$$\frac{dx}{dt} = ay^k, \qquad \frac{dy}{dt} + py = bx^n,$$

въ которыхъ p означаетъ вещественную періодическую функцію t съ періодомъ ω, дающую для интеграла

$$\int_0^\omega p\,dt$$

положительную величину, а a, b, k и n — вещественныя постоянныя, между которыми k и n представляютъ цѣлыя положительныя числа; при томъ k не менѣе 2.

Будемъ предполагать, что между постоянными a и b ни одна не нуль, ибо въ противномъ случаѣ вопросъ объ устойчивости разрѣшался бы тотчасъ же въ утвердительномъ смыслѣ.

Поступая согласно изложенному, стараемся удовлетворить нашимъ уравненіямъ рядами

$$x = c + u_2 c^2 + u_3 c^3 + \dots ,$$

$$y = v_1 c + v_2 c^2 + v_3 c^3 + \dots ,$$

въ которыхъ коэффиціенты u_l, v_l были бы періодическими функціями t для всѣхъ значеній l, не превосходящихъ возможно наибольшаго предѣла.

При этомъ находимъ, что всѣ v_l, для которыхъ $l < n$, должны быть нулями, что v_n, какъ періодическое рѣшеніе уравненія

$$\frac{dv_n}{dt} + pv_n = b$$

опредѣлится по формулѣ

$$v_n = be^{-\int\limits_0^t p\,dt} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\int\limits_0^t p\,dt}\,dt ,$$

и что первою непеіодическою въ ряду функцій u_2, u_3, ... будетъ u_{kn}, опредѣляемая уравненіемъ

$$\frac{du_{kn}}{dt} = a\,v_n^{\,k} .$$

Отсюда выводимъ, что

$$g = \frac{ab^k}{\omega} \int\limits_0^{\omega} e^{-k\int\limits_0^t p\,dt} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\int\limits_0^t p\,dt}\,dt \right)^k dt .$$

При томъ имѣемъ $m = kn$.

Поэтому заключаемъ, что когда хотя одно изъ чиселъ k и n есть четное, невозмущенное движеніе неустойчиво. Когда же числа эти оба суть нечетныя, движеніе это устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, различны или одинаковы знаки постоянныхъ a и b.

2$^{\text{ой}}$ случай: два мнимыхъ корня съ модулями, равными единицѣ.

60. Разсмотримъ теперь случай, когда характеристичное уравненіе предложенной системы имѣетъ два мнимыхъ сопряженныхъ корня съ модулями, равными 1, предполагая, что всѣ остальные корни этого уравненія (если оно выше второй степени) обладаютъ модулями, меньшими 1.

Пусть

$$e^{\lambda\omega\sqrt{-1}} \quad \text{и} \quad e^{-\lambda\omega\sqrt{-1}}$$

суть означенные два корня съ равными единицѣ модулями.

Здѣсь λ есть нѣкоторое вещественное число, относительно котораго пока не ставимъ никакихъ ограниченій. Но дальнѣйшіе выводы будемъ дѣлать въ предположеніи, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмѣримое.

По этому поводу замѣтимъ, что если бы число $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ было соизмѣримымъ, то разсматриваемый случай привелся бы къ тому, когда характеристичное уравненіе имѣетъ два равныхъ 1 корня. Для этого стоило бы только принять за періодъ нѣкоторую цѣлую кратность прежняго періода ω.

Но такой случай требуетъ особаго изслѣдованія, на которомъ останавливаться здѣсь мы не имѣемъ въ виду.

Мы можемъ допустить, что система нашихъ дифференціальныхъ уравненій (которая пусть будетъ $n+2^{\text{го}}$ порядка) посредствомъ линейной подстановки съ періодическими коэффиціентами преобразована къ виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s. \\ &\qquad\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Здѣсь X, Y, X_s суть голоморфныя функціи величинъ x, y, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, разложенія которыхъ, обладающія вещественными періодическими относительно t коэффиціентами, не содержатъ членовъ ниже второго измѣренія. Коэффиціенты p_s, q_s суть нѣкоторыя вещественныя періодическія функціи t; а коэффиціенты $p_{s\sigma}$ — вещественныя постоянныя, такого свойства, что составленное при помощи нихъ уравненіе вида (43) имѣетъ только корни съ отрицательными вещественными частями.

Мы можемъ кромѣ того допустить, что функціи X и Y при $x=y=0$ дѣлаются нулями, ибо къ такому случаю приводится всякій другой посредствомъ нѣкотораго преобразованія, подобнаго тому, съ которымъ мы имѣли дѣло въ параграфѣ $33^{\text{емъ}}$.

Преобразованіе это находится въ связи съ предложеніемъ, что системѣ частныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s)\frac{\partial x}{\partial x_s} + \frac{\partial x}{\partial t} = -\lambda y + X, \\ &\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s)\frac{\partial y}{\partial x_s} + \frac{\partial y}{\partial t} = \lambda x + Y, \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

при разсматриваемыхъ здѣсь условіяхъ, всегда можно удовлетворить (и при томъ — однимъ только манеромъ) голоморфными функціями величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не содержащими въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго измѣренія и обладающими періодическими относительно t коэффиціентами.

Что же касается этого предложенія, то оно легко докажется при помощи такихъ же разсужденій, какими мы воспользовались для доказательства теоремы параграфа 30$^{\text{го}}$.

Для этого замѣчаемъ, что если $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравненія (43), то при сдѣланномъ относительно нихъ предположеніи, система (49) будетъ допускать рѣшеніе съ n произвольными постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, въ которомъ функціи x, y, x_s представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ

$$\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}, \quad \alpha_2 e^{\varkappa_2 t}, \quad \ldots, \quad \alpha_n e^{\varkappa_n t}, \tag{51}$$

съ коэффиціентами, представляющими или періодическія функціи t, или суммы конечнаго числа періодическихъ и вѣковыхъ членовъ (пар. 54). При этомъ ряды для функцій x и y не будутъ содержать членовъ ниже второго измѣренія относительно величинъ (51). Ряды же для функцій x_s будутъ содержать и члены перваго измѣренія; при томъ, если разсматривается самое общее рѣшеніе указаннаго характера, то такіе члены въ этихъ рядахъ будутъ обладать коэффиціентами, опредѣлитель которыхъ представитъ нѣкоторую отличную отъ нуля постоянную.

Вслѣдствіе этого, путемъ исключенія величинъ (51), можно будетъ изъ такого рѣшенія вывести для функцій x и y выраженія подъ видомъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s, съ коэффиціентами прежняго характера, и ряды эти не будутъ содержать членовъ ниже второго измѣренія относительно величинъ x_s.

Этими рядами при всякомъ вещественномъ t будутъ опредѣляться нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ x_s, которыя, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, будутъ удовлетворять системѣ (50).

Намъ останется поэтому только доказать, что коэффиціенты въ получаемыхъ такимъ путемъ рядахъ необходимо будутъ періодическими функціями t. А доказать это весьма нетрудно, разсматривая ближе уравненія, которымъ придется удовлетворить для того, чтобы нашими рядами представлялось нѣкоторое рѣшеніе системы (50), и принимая въ разсчетъ допущенное свойство чиселъ $\varkappa_s$.

При этомъ обнаружится также, что система (50) можетъ допускать только одно рѣшеніе разсматриваемаго характера.

Пусть u и v суть выраженія функцій x и y для этого рѣшенія.

Тогда, чтобы преобразовать систему (49) къ желаемому виду, нужно будетъ только вмѣсто перемѣнныхъ x и y ввести перемѣнныя ξ и η посредствомъ подстановки

$$x = u + \xi, \qquad y = v + \eta.$$

При этомъ система (49) не утратитъ ни одного изъ своихъ прежнихъ свойствъ, ибо функціи u и v необходимо будутъ по отношенію къ величинамъ x_s голоморфными въ равной степени для всѣхъ вещественныхъ значеній t, а коэффиціенты въ нихъ представятъ вещественныя функціи послѣдняго.

Наша задача будетъ при томъ вполнѣ равносильна задачѣ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ ξ, η, x_s.

Въ силу изложеннаго сейчасъ мы можемъ разсматривать систему (49) въ предположеніи, что функціи X и Y обращаются въ нуль, если сдѣлать $x = y = 0$.

Въ этомъ предположеніи, вводя вмѣсто перемѣнныхъ x и y перемѣнныя r и ϑ посредствомъ подстановки

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

преобразуемъ ее къ виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = rR, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + (p_s\cos\vartheta + q_s\sin\vartheta)\,r + X_s, \\ &\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

гдѣ въ функціяхъ X_s величины x и y предполагаются замѣненными ихъ выраженіями черезъ r и ϑ.

Здѣсь R и Θ означаютъ нѣкоторыя голоморфныя функціи величинъ r, x_s, уничтожающіяся при $r = x_1 = \ldots = x_n = 0$, въ которыхъ коэффиціенты могутъ быть представлены подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ съ періодическими относительно t коэффиціентами.

Такого же характера и коэффиціенты въ разложеніяхъ функцій X_s по степенямъ величинъ r, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Наша задача приведется при этомъ къ задачѣ объ устойчивости по отношенію къ величинамъ r, x_s, и при рѣшеніи ея подобно тому, какъ это было сдѣлано въ аналогичномъ случаѣ предыдущей главы, можно будетъ поставить условіе $r \geqq 0$ (пар. 33).

61. Разсматривая величины r, x_s, какъ функціи независимыхъ перемѣнныхъ ϑ и t, составляемъ слѣдующую систему частныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = rR,$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial x_s}{\partial \vartheta} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + (p_s\cos\vartheta + q_s\sin\vartheta)r + X_s.$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

Будемъ стараться удовлетворить этой системѣ рядами

$$
\left.\begin{aligned}
r &= c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots, \\
x_s &= u_s^{(1)}c + u_s^{(2)}c^2 + u_s^{(3)}c^3 + \ldots, \\
& \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right\} \tag{53}
$$

расположенными по степенямъ произвольной постоянной c, при условіи, чтобы коэффиціенты $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ представлялись подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, и чтобы коэффиціенты въ этихъ конечныхъ рядахъ были или періодическими функціями t, или суммами конечнаго числа періодическихъ и вѣковыхъ членовъ.

Будемъ предполагать при этомъ, что $\frac{\lambda\omega}{\pi}$ есть число несоизмѣримое.

Для послѣдовательнаго опредѣленія функцій $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ въ порядкѣ возрастанія l получимъ системы уравненій слѣдующаго вида:

$$
\frac{\partial u^{(l)}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u^{(l)}}{\partial \vartheta} = U^{(l)},
$$

$$
\frac{\partial u_s^{(l)}}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u_s^{(l)}}{\partial \vartheta} = p_{s1}u_1^{(l)} + p_{s2}u_2^{(l)} + \ldots + p_{sn}u_n^{(l)} + (p_s \cos\vartheta + q_s \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_s^{(l)}.
$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

Здѣсь $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ для $l = 1$ равны нулю (при томъ $u^{(1)} = 1$), а для $l > 1$ представляютъ извѣстныя цѣлыя раціональныя функціи отъ величинъ $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, $\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial u_s^{(i)}}{\partial \vartheta}$, для которыхъ $i < l$, съ коэффиціентами такого же характера, какъ и въ разложеніяхъ функцій R, Θ, X_s.

Предполагая, что всѣ $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$, для которыхъ $i < l$, уже найдены, представимъ функціи $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ подъ видомъ конечныхъ рядовъ синусовъ и косинусовъ цѣлыхъ кратностей ϑ, которые преобразовываемъ къ виду:

$$
\sum F_k e^{k\vartheta\sqrt{-1}}. \tag{54}
$$

Здѣсь сумма распространена на всѣ цѣлыя положительныя и отрицательныя значенія k, лежащія между нѣкоторыми предѣлами $-N$ и $+N$, а коэффиціенты F_k означаютъ функціи одного t.

Если допустимъ, что всѣ $u^{(i)}$, $u_s^{(i)}$ оказались по отношенію къ t періодическими, то всѣ F_k для каждой изъ функцій $U^{(l)}$, $U_s^{(l)}$ будутъ періодическими функціями t.

Въ этомъ предположеніи, будемъ искать функціи $u^{(l)}$, $u_s^{(l)}$ подъ видомъ такихъ же суммъ, какъ и (54).

При этомъ придется начать съ функціи $u^{(l)}$, и если положимъ

$$
u^{(l)} = \sum f_k e^{k\vartheta\sqrt{-1}},
$$