1$^{\text{ый}}$ случай: одинъ равный нулю корень.

28. Пусть разсматриваемая система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія есть $n+1^{\text{аго}}$ порядка, и пусть соотвѣтствующее ей опредѣляющее уравненіе имѣетъ одинъ равный нулю корень при n остальныхъ съ отрицательными вещественными частями.

Система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія будетъ въ этомъ случаѣ допускать линейный интегралъ съ постоянными коэффиціентами (пар. 18). Принимая такой интегралъ (въ которомъ коэффиціенты можно предположить вещественными) за одну изъ неизвѣстныхъ функцій, приведемъ разсматриваемую систему къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = X, \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s, \\ &\qquad\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

гдѣ X, X_1, $X_2, \ldots$, X_n суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, разложенія которыхъ начинаются членами не ниже второго порядка и обладаютъ постоянными вещественными коэффиціентами, а $p_{s\sigma}$, p_s суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя. При томъ постоянныя $p_{s\sigma}$ таковы, что если подъ $D(\varkappa)$ по прежнему будемъ разумѣть основной опредѣлитель системы (1), то уравненіе

$$D(\varkappa) = 0$$

будетъ имѣть только корни съ отрицательными вещественными частями.

Разсмотримъ въ уравненіяхъ (28) члены, не зависящіе отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Совокупности такихъ членовъ въ разложеніяхъ функцій X, X_1, $X_2, \ldots$, X_n означимъ соотвѣтственно черезъ $X^{(0)}$, $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$.

Можетъ случиться, что всѣ коэффиціенты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть нули. Тогда, если при $X^{(0)}$ не равномъ тожественно нулю въ разложеніяхъ $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$ по степенямъ x не встрѣчается членовъ, степени которыхъ были бы ниже наинизшей изъ степеней x, входящихъ въ разложеніе $X^{(0)}$, или если $X^{(0)}$, $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$ всѣ тожественно равны нулю, то вопросъ объ устойчивости, какъ увидимъ, будетъ рѣшаться непосредственнымъ разсмотрѣніемъ уравненій (28).

Въ противномъ случаѣ будетъ необходимо нѣкоторое предварительное преобразованіе, и мы сейчасъ покажемъ, что систему уравненій (28) всегда можно преобразовать въ систему того-же вида, для которой условія, имѣющія значеніе предыдущихъ, будутъ выполняться.

Съ этой цѣлью разсмотримъ слѣдующую систему уравненій:

$$p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + X_s = 0. \qquad (s=1,\,2,\ldots,\,n) \tag{29}$$

Первыя части этихъ уравненій уничтожаются при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x = 0 .$$

Но ихъ функціональный опредѣлитель въ отношеніи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращается при такомъ предположеніи въ величину $D(0)$, не равную нулю. Поэтому въ силу извѣстной теоремы уравненія эти разрѣшимы относительно величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и допускаютъ одно опредѣленное рѣшеніе вида

$$x_1 = u_1 , \quad x_2 = u_2 , \ \ldots \ , x_n = u_n ,$$

гдѣ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ суть голоморфныя функціи перемѣнной x, обращающіяся въ нуль при $x = 0$.

Коэффиціенты въ разложеніяхъ функцій u_s найдутся послѣдовательно, начиная съ коэффиціентовъ при наинизшей степени x. А послѣднею будетъ служить наинизшая изъ степеней x, встрѣчающихся въ уравненіяхъ (29) въ членахъ, не зависящихъ отъ величинъ x_s.

Если-бы всѣ коэффиціенты p_s были нулями, и если-бы ни одна изъ функцій X_s не содержала въ своемъ разложеніи членовъ, не зависящихъ отъ величинъ x_s, то всѣ u_s были бы тожественно равными нулю.

Возвращаясь теперь къ системѣ дифференціальныхъ уравненій (28), преобразуемъ ее посредствомъ подстановки

$$x_1 = u_1 + z_1 , \quad x_2 = u_2 + z_2 , \ \ldots \ , x_n = u_n + z_n ,$$

гдѣ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ суть новыя перемѣнныя, которыя вводятся вмѣсто прежнихъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Преобразованная система уравненій будетъ слѣдующаго вида:

$$\frac{dx}{dt} = Z ,$$

$$\frac{dz_s}{dt} = p_{s1} z_1 + p_{s2} z_2 + \ldots + p_{sn} z_n + Z_s , \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ $Z, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x, z_1, z_2, \ldots, z_n$, разложенія которыхъ начинаются членами не ниже втораго порядка. При томъ функціи эти, какъ нетрудно видѣть, таковы, что если $Z^{(0)}, Z_1^{(0)}, Z_2^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)}$ означаютъ совокупности тѣхъ членовъ въ ихъ разложеніяхъ, которые не зависятъ отъ перемѣнныхъ z_s, то

$$Z_1^{(0)} = -\frac{du_1}{dx} Z^{(0)}, \quad Z_2^{(0)} = -\frac{du_2}{dx} Z^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)} = -\frac{du_n}{dx} Z^{(0)} .$$

Отсюда ясно, что въ разложеніяхъ $Z_s^{(0)}$ по степенямъ x не будетъ членовъ, степени которыхъ были бы ниже наинизшей изъ степеней x въ разложеніи $Z^{(0)}$, и что если эта послѣдняя величина тожественно равна нулю, то такою же будетъ и каждая изъ величинъ $Z_s^{(0)}$.

Преобразованная система будетъ поэтому обладать всѣми требуемыми свойствами.

Величина $Z^{(0)}$ найдется, какъ результатъ подстановки

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad \ldots, \quad x_n = u_n$$

въ функцію X.

Если-бы результатъ этой подстановки оказался тожественно равнымъ нулю, то система уравненій (28) допускала бы частное рѣшеніе съ постоянными величинами для $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, зависящими отъ одной произвольной постоянной.

Предполагая, что

$$u_s = a_s^{(1)} x + a_s^{(2)} x^2 + a_s^{(3)} x^3 + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

суть ряды, опредѣляющіе функціи u_s, рѣшеніе это мы могли бы выразить слѣдующими уравненіями:

$$x = c,$$
$$x_s = a_s^{(1)} c + a_s^{(2)} c^2 + a_s^{(3)} c^3 + \ldots, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ c произвольная постоянная, модуль которой для сходимости встрѣчающихся здѣсь рядовъ вообще не долженъ превосходить нѣкотораго предѣла.

Всякому вещественному численно достаточно малому значенію постоянной c соотвѣтствовало бы въ этомъ случаѣ нѣкоторое установившееся движеніе *). Измѣняя эту постоянную непрерывнымъ образомъ, мы получили бы *непрерывный рядъ* такихъ движеній, заключающій въ себѣ и разсматриваемое, устойчивость котораго изслѣдуется.

Примѣчаніе. — Подстановка, посредствомъ которой было выполнено предыдущее преобразованіе, такова, что задача объ устойчивости по отношенію къ прежнимъ перемѣннымъ $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ вполнѣ равносильна задачѣ объ устойчивости по отношенію къ новымъ $x, z_1, z_2, \ldots, z_n$, такъ-что, рѣшая одну задачу въ утвердительномъ или отрицательномъ смыслѣ, мы рѣшаемъ другую въ томъ же смыслѣ.

Большинство преобразованій, съ которыми мы встрѣтимся далѣе, будетъ такого же характера.

Впрочемъ намъ придется иногда имѣть дѣло и съ преобразованіями другого рода. Въ такихъ случаяхъ при переходѣ отъ первоначальной системы уравненій къ преобразованной, конечно, необходимы будутъ надлежащія измѣненія въ постановкѣ задачи.

---

*) Если число $n + 1$ менѣе удвоеннаго числа степеней свободы разсматриваемой матерьяльной системы, то даннымъ выраженіямъ величинъ $x, x_1, \ldots, x_n$ въ функціяхъ t можетъ соотвѣтствовать, конечно, не одно, а безчисленное множество движеній. Но всю совокупность такихъ движеній мы условимся разсматривать, какъ одно. То же будемъ дѣлать и въ аналогичныхъ случаяхъ далѣе.

29. Въ силу вышеизложеннаго въ настоящемъ изслѣдованіи можно исходить изъ предположенія, что дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx}{dt}=X, \qquad \frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n+X_s, \qquad (s=1,2,\dots,n) \tag{30}$$

гдѣ функціи X, X_s таковы, что ихъ разложенія удовлетворяютъ условію, на которое было указано въ предыдущемъ параграфѣ.

Мы разсмотримъ сначала случай, когда величина $X^{(0)}$ не равна тожественно нулю, и допустимъ, что наинизшая изъ степеней x, встрѣчающихся въ ея разложеніи, есть $m^{\text{ая}}$.

Согласно нашему предположенію, ни одна изъ величинъ $X_s^{(0)}$ при этомъ не будетъ содержать въ своемъ разложеніи членовъ ниже $m^{\text{ой}}$ степени относительно x.

Число m конечно будетъ не менѣе 2.

Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда $m=2$.

Пусть

$$X=gx^2+Px+Q+R,$$

гдѣ g отличная отъ нуля постоянная, P линейная форма перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, Q квадратичная форма тѣхъ же величинъ и R голоморфная функція перемѣнныхъ x, $x_1, x_2, \dots, x_n$, разложеніе которой не содержитъ членовъ ниже третьяго измѣренія.

Мы замѣчаемъ, что при разсматриваемыхъ условіяхъ всегда найдутся формы перемѣнныхъ x_s — линейная U и квадратичная W, удовлетворяющія уравненіямъ:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n)\frac{\partial U}{\partial x_s}+P=0,$$

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n)\frac{\partial W}{\partial x_s}+Q=g(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)$$

Составивши эти формы, положимъ

$$V=x+Ux+W.$$

Тогда въ силу нашихъ дифференціальныхъ уравненій (30) найдемъ:

$$\frac{dV}{dt}=g(x^2+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)+S,$$

гдѣ

$$S=x\sum_{s=1}^{n}X_s\frac{\partial U}{\partial x_s}+\sum_{s=1}^{n}X_s\frac{\partial W}{\partial x_s}+UX+R$$

будетъ содержать только члены выше второго порядка.

Такимъ образомъ производная функціи V по t представитъ знакоопредѣленную функцію перемѣнныхъ x, x_s. Но сама функція V, очевидно, можетъ принимать какъ положительныя такъ и отрицательныя значенія, какъ-бы малы ни были числовыя величины этихъ перемѣнныхъ.

Вслѣдствіе этого на основаніи теоремы II параграфа 16$^{\underline{\text{аго}}}$ мы должны заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Къ такому-же заключенію придемъ и въ случаѣ, когда m есть какое-либо четное число.

Пусть вообще

$$X = gx^m + P^{(1)}x + P^{(2)}x^2 + \ldots + P^{(m-1)}x^{m-1} + Q + R,$$

гдѣ g не равная нулю постоянная, $P^{(j)}$ линейныя формы величинъ x_s, Q квадратичная форма послѣднихъ, а R голоморфная функція перемѣнныхъ x, x_s, разложеніе которой не имѣетъ членовъ ниже третьяго порядка и при томъ въ членахъ, линейныхъ относительно величинъ x_s, содержитъ x въ степеняхъ не ниже $m^{\underline{\text{ой}}}$, а въ членахъ, не зависящихъ отъ этихъ величинъ, — въ степеняхъ не ниже $m+1^{\underline{\text{ой}}}$.

Кромѣ того, означая черезъ k какое-либо цѣлое положительное число, допустимъ, что

$$X_s = P_s^{(1)}x + P_s^{(2)}x^2 + \ldots + P_s^{(k)}x^k + X_s^{(k)} = g_s x^m + X_s'.$$

Здѣсь $P_s^{(j)}$ суть линейныя формы величинъ x_s; $X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots, X_n^{(k)}$ голоморфныя функціи перемѣнныхъ x, x_s, разложенія которыхъ въ членахъ, линейныхъ относительно величинъ x_s, могутъ содержать x только въ степеняхъ выше $k^{\underline{\text{ой}}}$; g_s суть нѣкоторыя постоянныя, а X_s' голоморфныя функціи, разложенія которыхъ въ членахъ, не зависящихъ отъ величинъ x_s, могутъ содержать x только въ степеняхъ выше $m^{\underline{\text{ой}}}$.

Подъ $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(m-1)}$ условимся разумѣть нѣкоторыя подлежащія нашему выбору линейныя формы величинъ x_s, а подъ W такую квадратичную форму этихъ величинъ.

Предполагая m числомъ четнымъ, сдѣлаемъ:

$$V = x + U^{(1)}x + U^{(2)}x^2 + \ldots + U^{(m-1)}x^{m-1} + W.$$

Тогда въ силу дифференціальныхъ уравненій (30) найдемъ:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= gx^m + P^{(1)}x + P^{(2)}x^2 + \ldots + P^{(m-1)}x^{m-1} + Q + R + \\ &+ \sum_{k=1}^{m-2} x^k \sum_{s=1}^{n} [p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + P_s^{(1)}x + \ldots + P_s^{(m-k-1)}x^{m-k-1} + X_s^{(m-k-1)}] \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} + \\ &+ x^{m-1}\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial x_s} + \\ &+ \sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s)\frac{\partial W}{\partial x_s} + X\sum_{k=1}^{m-1} kU^{(k)}x^{k-1}.\end{aligned}$$

Разсматривая здѣсь совокупность членовъ, линейныхъ относительно величинъ x_s, распорядимся выборомъ линейныхъ формъ $U^{(j)}$ такъ, чтобы въ этой совокупности x не встрѣчалось въ степеняхъ ниже $m^{\underline{\text{ой}}}$. Для этого мы должны будемъ сдѣлать:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n)\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s}+P^{(1)}=0,$$

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n)\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s}+P^{(k)}+\sum_{s=1}^{n}(P_s^{(1)}\frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x_s}+\dots+P_s^{(k-1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s})=0.$$

$$(k=2,\,3,\,\dots,\,m-1)$$

При нашихъ предположеніяхъ уравненія эти всегда будутъ возможны, и мы найдемъ изъ нихъ послѣдовательно $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(m-1)}$.

Если же теперь квадратичную форму W выберемъ согласно уравненію

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\dots+p_{sn}x_n)\frac{\partial W}{\partial x_s}+Q=g(x_1{}^2+x_2{}^2+\dots+x_n{}^2),$$

то будемъ имѣть

$$\frac{dV}{dt}=g(x^m+x_1{}^2+x_2{}^2+\dots+x_n{}^2)+S,$$

гдѣ

$$S=\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{m-2}x^kX_s^{(m-k-1)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s}+x^{m-1}X_s\frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial x_s}\right\}+\sum_{s=1}^{n}X_s\frac{\partial W}{\partial x_s}+X\sum_{k=1}^{m-1}kU^{(k)}x^{k-1}+R.$$

А это выраженіе S по свойству функцій X, R, X_s, $X_s^{(k)}$ всегда можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$S=vx^m+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}v_{s\sigma}x_sx_\sigma,$$

гдѣ v, $v_{s\sigma}$ суть нѣкоторыя голоморфныя функціи перемѣнныхъ x, x_s, *уничтожающіяся при*

$$x=x_1=x_2=\dots=x_n=0.$$

Отсюда ясно, что при разсматриваемомъ опредѣленіи формъ $U^{(j)}$, W производная $\frac{dV}{dt}$ будетъ знакоопредѣленною функціей перемѣнныхъ x, x_s.

Но тогда функція V будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ теоремы II параграфа $16^{\underline{\text{аго}}}$. А потому на основаніи послѣдней заключимъ, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Допустимъ теперь, что m есть число нечетное.

Полагая

$$V=W+\frac{1}{2}x^2+U^{(1)}x^2+U^{(2)}x^3+\dots+U^{(m-1)}x^m,$$

въ силу уравненій (30) найдемъ:

$$\frac{dV}{dt} = gx^{m+1} + P^{(1)}x^2 + P^{(2)}x^3 + \ldots + P^{(m-1)}x^m + (Q+R)x +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m-1} x^k \sum_{s=1}^{n} [p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + P_s^{(1)}x + \ldots + P_s^{(m-k)}x^{m-k} + X_s^{(m-k)}] \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x_s} +$$

$$+ x^m \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial x_s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + g_s x^m + X_s') \frac{\partial W}{\partial x_s} + X \sum_{k=2}^{m} kU^{(k-1)}x^{k-1}.$$

Выберемъ квадратичную форму W согласно съ уравненіемъ:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial W}{\partial x_s} = g(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2). \quad \mathbf{(31)}$$

Затѣмъ линейными формами $U^{(j)}$ распорядимся такъ, чтобы въ этомъ выраженіи $\frac{dV}{dt}$ не было членовъ, линейныхъ относительно величинъ x_s, въ которые x входило бы въ степеняхъ ниже $m+1^{\text{ой}}$. Для этого названныя формы опредѣлимъ согласно уравненіямъ:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s} + P^{(1)} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_s} + P^{(k)} + \sum_{s=1}^{n} (P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x_s} + \cdots + P_s^{(k-1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s}) = 0,$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m-2)$$

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial x_s} + P^{(m-1)} + \sum_{s=1}^{n} (g_s \frac{\partial W}{\partial x_s} + P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(m-2)}}{\partial x_s} + \cdots + P_s^{(m-2)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x_s}) = 0.$$

Вслѣдствіе этого найдемъ:

$$\frac{dV}{dt} = g(x^{m+1} + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + S,$$

гдѣ

$$S = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \sum_{k=2}^{m-1} x^k X_s^{(m-k)} \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial x_s} + x^m X_s \frac{\partial U^{(m-1)}}{\partial x_s} \right\} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} X_s' \frac{\partial W}{\partial x_s} + X \sum_{k=2}^{m} kU^{(k-1)}x^{k-1} + (Q+R)x.$$

Но это выраженіе S можетъ быть представлено подъ видомъ:

$$S = vx^{m+1} + \sum_{s=1}^{n} \sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma} x_s x_\sigma,$$

если подъ v, $v_{s\sigma}$ по прежнему будемъ разумѣть нѣкоторыя голоморфныя функціи, уничтожающіяся при равенствѣ нулю всѣхъ x, x_s.

Поэтому производная $\frac{dV}{dt}$ будетъ знакоопредѣленною функціей перемѣнныхъ x, x_s, и знакъ ея при достаточно малыхъ $|x|$, $|x_s|$ будетъ одинаковъ со знакомъ постоянной g.

Мы замѣчаемъ теперь, что на основаніи теоремы II параграфа 20^{аго} форма W, удовлетворяющая уравненію (31), будетъ знакоопредѣленною и при томъ противоположною по знаку съ g. А изъ выраженія функціи V видно, что, если W есть опредѣленно-положительная форма перемѣнныхъ x_s, то V будетъ опредѣленно-положительною функціей перемѣнныхъ x, x_s.

Такимъ образомъ при $g < 0$ функція V будетъ опредѣленно-положительною, а производная ея опредѣленно-отрицательною, и слѣдовательно мы будемъ имѣть дѣло съ условіями теоремы I параграфа 16^{аго} или даже — съ условіями теоремы, доказанной въ примѣчаніи 2^{омъ} къ теоремѣ I. Если же $g > 0$, то функцію V всегда можно будетъ сдѣлать величиною любого знака, какъ бы ни былъ малъ предѣлъ, котораго не должны превосходить величины $|x|$, $|x_s|$. Поэтому въ этомъ случаѣ будутъ выполняться условія теоремы II названнаго сейчасъ параграфа.

Вслѣдствіе этого приходимъ къ заключенію, что при m нечетномъ въ случаѣ положительнаго g невозмущенное движеніе неустойчиво, а въ случаѣ отрицательнаго устойчиво. При томъ, въ послѣднемъ случаѣ всякое возмущенное движеніе, достаточно близкое къ невозмущенному, будетъ приближаться къ нему асимптотически.

30. Намъ остается теперь разсмотрѣть случай, когда въ уравненіяхъ (30) ни одна изъ функцій X, X_s не заключаетъ въ своемъ разложеніи членовъ, не зависящихъ отъ величинъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$, и слѣдовательно—когда уравненія эти допускаютъ частное рѣшеніе вида:

$$x = c, \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

при произвольной постоянной c.

Мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ уравненія (30) будутъ обладать полнымъ интегральнымъ уравненіемъ съ одною произвольною постоянною c слѣдующаго вида:

$$x = c + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, c),$$

гдѣ f голоморфная функція величинъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$, c, уничтожающаяся при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Предложеніе это, конечно, можно было бы доказать непосредственно; но мы предпочитаемъ поставить его въ связь съ болѣе общимъ, которое можетъ намъ понадобиться и въ другихъ случаяхъ.

Докажемъ слѣдующее:

Теорема. — *Пусть дана система уравненій съ частными производными вида:*

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)\dfrac{dz_j}{dx_s}=q_{j1}z_1+q_{j2}z_2+\ldots+q_{jk}z_k+Z_j,\\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,k)\end{array}\right\}\quad(32)$$

гдѣ $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ *суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ* x_1, $x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_k$, *обращающіяся въ нуль, когда всѣ эти перемѣнныя дѣлаются нулями; при томъ функціи* X_s *не содержатъ въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже втораго порядка, а функціи* Z_j, *если и содержатъ члены перваго порядка, то только независящіе отъ величинъ* $z_1, z_2, \ldots, z_k$. *Коэффиціенты* $p_{s\sigma}$, q_{jl} *суть нѣкоторыя постоянныя. Тогда, если* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ *суть корни уравненія*

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\varkappa & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix}=0,$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *корни уравненія*

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} & \ldots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda & \ldots & q_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots & q_{kk}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

если при томъ вещественныя части всѣхъ $\varkappa_s$ *отличны отъ нуля и одного и того-же знака, и если между величинами* $\varkappa_s$ *и* λ_j *не существуетъ никакихъ соотношеній вида*

$$m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2+\ldots+m_n\varkappa_n=\lambda_j,\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k)$$

гдѣ всѣ m_s *были бы цѣлыми неотрицательными числами, удовлетворяющими условію* $\sum m_s>0$, — *то всегда найдется одна опредѣленная система голоморфныхъ функцій* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *перемѣнныхъ* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *удовлетворяющихъ уравненіямъ (32) и обращающихся въ нуль при*

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Для доказательства возьмемъ слѣдующую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+X_s,\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)\qquad(33)$$

$$\frac{dz_j}{dt}=q_{j1}z_1+q_{j2}z_2+\ldots+q_{jk}z_k+Z_j.\qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,k)$$

На основанiи изложеннаго въ параграфѣ 23^емъ можно утверждать, что уравненiя эти при сдѣланныхъ предположенiяхъ будутъ допускать рѣшенiе слѣдующаго вида:

$$\left. x_s = \sum K_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_n^{m_n} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t}, \quad (s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n) \right\} \tag{34}$$

$$\left. z_j = \sum L_j^{(m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_n^{m_n} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t}, \quad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k) \right\} \tag{35}$$

гдѣ всѣ K и L суть постоянныя величины или цѣлыя рацiональныя функцiи t и во всякомъ случаѣ не зависятъ отъ постоянныхъ произвольныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а суммы распространены на всѣ цѣлыя неотрицательныя m_s, удовлетворяющiя условiю $\sum m_s > 0$.

Мы можемъ и будемъ при томъ предполагать, что совокупности членовъ перваго порядка въ рядахъ (34) даютъ *общiй* интегралъ системы линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй, выводимой изъ (33) отбрасыванiемъ въ ней всѣхъ членовъ выше перваго порядка. При этомъ условiи функцiональный опредѣлитель величинъ x_s въ отношенiи величинъ

$$\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}, \quad \alpha_2 e^{\varkappa_2 t}, \ldots, \alpha_n e^{\varkappa_n t} \tag{36}$$

при равенствѣ послѣднихъ нулю будетъ обращаться въ нѣкоторую отличную отъ нуля постоянную.

Вслѣдствiе этого уравненiя (34) можно будетъ разрѣшить относительно величинъ (36) и вывести изъ нихъ слѣдующiя:

$$\alpha_s e^{\varkappa_s t} = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ вторыя части суть голоморфныя функцiи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, уничтожающiяся при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, разложенiя которыхъ обладаютъ коэффицiентами или постоянными, или цѣлыми рацiональными относительно t.

Вносiя эти выраженiя величинъ (36) въ уравненiя (35), получимъ:

$$z_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{37}$$

гдѣ φ_j суть функцiи такого-же характера, какъ и f_s. При томъ функцiи эти, въ силу самаго способа полученiя ихъ, удовлетворяютъ слѣдующей системѣ уравненiй въ частныхъ производныхъ:

$$\left. \sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + X_s) \frac{\partial z_j}{\partial x_s} + \frac{\partial z_j}{\partial t} = q_{j1} z_1 + q_{j2} z_2 + \cdots + q_{jk} z_k + Z_j. \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \right\} \tag{38}$$

Посмотримъ, какъ можно удовлетворить этой системѣ самымъ общимъ образомъ въ предположенiи, что всѣ z_j суть голоморфныя функцiи перемѣнныхъ x_s, уничтожающiяся при равенствѣ послѣднихъ нулю и обладающiя въ своихъ разложенiяхъ постоянными или цѣлыми рацiональными относительно t коэффицiентами.

Для упрощенія изслѣдованія допустимъ, что въ уравненіяхъ (38) всѣ коэффиціенты q_{jl} равны нулю, за исключеніемъ слѣдующихъ:

$$q_{11} = \lambda_1\,,\quad q_{22} = \lambda_2\,,\ldots,\quad q_{kk} = \lambda_k\,,\quad q_{21} = \tau_1\,,\quad q_{32} = \tau_2\,,\ldots,\quad q_{k\,k-1} = \tau_{k-1}\,.$$

Такое допущеніе всегда возможно, ибо въ противномъ случаѣ, принимая за новыя неизвѣстныя функціи нѣкоторыя линейныя формы величинъ z_j съ постоянными коэффиціентами, мы могли бы преобразовать уравненія (38) къ такому виду, для котораго коэффиціенты q удовлетворяли бы сказанному сейчасъ условію [таково преобразованіе уравненій (13) къ виду (17), на которое было указано въ параграфѣ 22$^{\underline{\text{омъ}}}$].

Пусть

$$z_j = z_j^{(1)} + z_j^{(2)} + z_j^{(3)} + \ldots\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

гдѣ вообще $z_1^{(m)}$, $z_2^{(m)}, \ldots, z_k^{(m)}$ суть формы $m^{\underline{\text{ой}}}$ степени относительно величинъ x_s.

Уравненія (38) дадутъ:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial z_1^{(m)}}{\partial x_s} + \frac{\partial z_1^{(m)}}{\partial t} = \lambda_1 z_1^{(m)} + W_1^{(m)},$$

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial z_j^{(m)}}{\partial x_s} + \frac{\partial z_j^{(m)}}{\partial t} = \lambda_j z_j^{(m)} + \tau_{j-1} z_{j-1}^{(m)} + W_j^{(m)}.$$

$$(j = 2, 3, \ldots, k)$$

Здѣсь $W_1^{(m)}$, $W_2^{(m)}, \ldots, W_k^{(m)}$ суть формы $m^{\underline{\text{ой}}}$ степени перемѣнныхъ x_s, извѣстнымъ образомъ выводящіяся изъ формъ $z_j^{(\mu)}$, для которыхъ $\mu < m$. Если-бы эти послѣднія обладали всѣ постоянными коэффиціентами, то такими-же были бы и коэффиціенты всѣхъ формъ $W_j^{(m)}$. При $m = 1$ эти коэффиціенты всегда будутъ постоянными, ибо формы $W_j^{(1)}$ представляютъ совокупности членовъ перваго порядка въ разложеніяхъ функцій Z_j.

Изъ написанныхъ сейчасъ уравненій послѣдовательно найдемъ:

$$z_1^{(1)},\ z_2^{(1)}, \ldots,\ z_k^{(1)},\ z_1^{(2)},\ z_2^{(2)}, \ldots,\ z_k^{(2)}, \ldots. \qquad \textbf{(39)}$$

Пусть v есть какая-либо изъ этихъ формъ, и пусть всѣ предыдущія обладаютъ постоянными коэффиціентами. Тогда въ уравненіи, служащемъ для ея опредѣленія, извѣстный членъ представитъ форму также съ постоянными коэффиціентами.

Вслѣдствіе этого, если допустимъ, что l есть наивысшая изъ степеней t, встрѣчающихся въ коэффиціентахъ формы v, и если, означая черезъ v_0, $v_1, \ldots, v_l$ нѣкоторыя формы съ постоянными коэффиціентами, сдѣлаемъ

$$v = v_0 + v_1 t + \ldots + v_l t^l$$

(а этимъ выражается самое общее предположеніе, которое мы должны сдѣлать относительно v), то форма v_l будетъ удовлетворять уравненію:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial v_l}{\partial x_s} = \lambda v_l\,,$$

гдѣ λ есть одна изъ величинъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Но по условію ни одна изъ этихъ величинъ не представляется подъ видомъ $\sum m_s \varkappa_s$. Поэтому (пар. 19), какова-бы ни была степень формы v_l, разсматриваемому уравненію нельзя удовлетворить иначе, какъ полагая $v_l = 0$.

Единственное возможное предположеніе будетъ, слѣдовательно, $l = 0$, и изъ уравненія

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n) \frac{\partial v}{\partial x_s} = \lambda v + w,$$

которому въ этомъ предположеніи будетъ удовлетворять форма v, послѣдняя найдется вполнѣ опредѣленнымъ образомъ, какова-бы ни была извѣстная форма w.

Такимъ образомъ, если въ ряду (39) для всѣхъ формъ, предшествующихъ v, коэффиціенты суть постоянныя величины, то то-же будетъ и для формы v. При томъ коэффиціенты ея вполнѣ опредѣлятся по коэффиціентамъ предшествующихъ ей формъ.

Но форма $z_1^{(1)}$ необходимо будетъ съ постоянными коэффиціентами, ибо такова каждая изъ формъ $W_j^{(1)}$. Поэтому и всѣ слѣдующія формы въ ряду (39) будутъ обладать постоянными коэффиціентами.

Отсюда заключаемъ, что функціи (37) не зависятъ отъ t и слѣдовательно удовлетворяютъ системѣ (32), и что другихъ функцій того-же характера, удовлетворяющихъ этой системѣ, нельзя найти.

Теорема поэтому доказана *).

Замѣтимъ, что разложенія функцій z_j будутъ начинаться членами того-же порядка, какъ и разложенія функцій, въ которыя обращаются Z_j при $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = 0$. Если-бы ни одна изъ функцій Z_j не содержала въ своемъ разложеніи членовъ, не зависящихъ отъ величинъ z_j, то всѣ функціи z_j, о которыхъ идетъ рѣчь въ теоремѣ, были бы тожественно равными нулю.

Примѣчаніе. — Мы предполагали, что разложенія функцій X_s начинаются членами не ниже второго порядка. Но совершенно такъ-же можно было бы доказать теорему и въ случаѣ, если-бы эти разложенія содержали члены перваго порядка, не зависящіе отъ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а разложенія функцій Z_j начинались членами не ниже второго порядка, и если-бы было поставлено требованіе, чтобы разложенія искомыхъ функцій z_j не содержали членовъ ниже второго порядка. При этомъ для справедливости теоремы было бы достаточно, чтобы соотношенія вида $\sum m_s \varkappa_s = \lambda_j$ не могли существовать только при такихъ m_s, сумма которыхъ болѣе 1.

31. Возвращаемся къ уравненіямъ (30) въ предположеніи, что всѣ функціи X, X_s обращаются въ нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

---

*) Въ нѣкоторой частной формѣ теорема эта была доказана M. Poincaré въ мемуарѣ *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (Journal de mathématiques, 4 série, tome 2, p. 155). Въ опубликованномъ недавно мемуарѣ *Sur le problème des trois corps* (Acta mathematica, tome 13, p. 36) M. Poincaré вновь доказываетъ ее въ значительно обобщенномъ видѣ.

Сдѣлаемъ подстановку

$$x = c + z,$$

разумѣя подъ c произвольную вещественную постоянную, числовая величина которой не должна только превосходить нѣкотораго предѣла.

При нашемъ предположеніи вслѣдствіе этой подстановки найдемъ:

$$X_s = c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \ldots + c_{sn}x_n + X'_s, \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ $c_{s\sigma}$ суть постоянныя, представляющія голоморфныя функціи постоянной c, уничтожающіяся при $c=0$, а X'_s голоморфныя функціи перемѣнныхъ z, x_1, $x_2, \ldots$, x_n, разложенія которыхъ начинаются членами не ниже второго порядка и обладаютъ голоморфными относительно c коэффиціентами.

Въ такомъ-же видѣ представится послѣ указанной подстановки и функція X.

Разсмотримъ теперь уравненіе въ частныхъ производныхъ

$$\sum_{s=1}^{n}\{(p_{s1}+c_{s1})x_1 + (p_{s2}+c_{s2})x_2 + \ldots + (p_{sn}+c_{sn})x_n + X'_s\}\frac{\partial z}{\partial x_s} = X, \qquad \textbf{(40)}$$

предполагая, что X выражена черезъ перемѣнныя z, x_s.

Вслѣдствіе нашего допущенія, что всѣ корни уравненія $D(\varkappa)=0$ обладаютъ отрицательными вещественными частями, для уравненія (40) при $|c|$ достаточно маломъ будутъ выполняться всѣ условія предыдущей теоремы. Поэтому при достаточно маломъ $|c|$ уравненіе это будетъ допускать рѣшеніе слѣдующаго вида:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, c),$$

гдѣ f означаетъ голоморфную функцію перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots$, x_n, уничтожающуюся при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Коэффиціенты въ разложеніи этой функціи будутъ извѣстнымъ образомъ зависѣть отъ постоянной c; а именно, они будутъ голоморфными функціями послѣдней и при томъ такъ, что при достаточно маломъ не равномъ нулю $|c|$ разложенія по степенямъ c для *всѣхъ* этихъ коэффиціентовъ будутъ абсолютно сходящимися. Чтобы убѣдиться въ томъ, стоитъ только обратить вниманіе на общій характеръ уравненій, служащихъ для послѣдовательнаго вычисленія названныхъ коэффиціентовъ.

Если-бы разложенія послѣднихъ по степенямъ c обладали положительными коэффиціентами, то мы отсюда заключили бы, что функція f голоморфна не только по отношенію къ величинамъ x_s, но и по отношенію къ величинамъ x_s, c.

Таковъ былъ бы напр. случай, если-бы всѣ коэффиціенты $p_{s\sigma}$, для которыхъ $s<\sigma$, были нулями, а изъ остальныхъ всѣ p_{ss} отрицательными, а прочіе, если не нулями, то положительными, и если-бы при томъ въ разложеніяхъ функцій X_s по степенямъ x, x_s всѣ коэффиціенты были положительными, а въ разложеніи функціи X отрицательными.

Въ этомъ случаѣ, разыскивая функцію z, удовлетворяющую уравненію (40), подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s, c, мы получили бы для опредѣленія коэффиціентовъ въ членахъ какого-либо порядка черезъ коэффиціенты въ членахъ низшихъ порядковъ такія уравненія, которыя, будучи расположены въ извѣстномъ порядкѣ, давали бы непосредственно по одному изъ искомыхъ коэффиціентовъ въ зависимости отъ найденныхъ раньше. Послѣдовательность, въ которой опредѣлились бы эти коэффиціенты, была бы такова, что для каждой совокупности членовъ съ произведеніями

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} c^l ,$$

соотвѣтствующими даннымъ l и $\sum m_s = m$, прежде всего опредѣлились бы коэффиціенты, для которыхъ $m_{n-1} + m_n = m$, въ порядкѣ возрастанія m_{n-1}, затѣмъ тѣ, для которыхъ $m_{n-2} = 1$, $m_{n-1} + m_n = m - 1$, — также въ порядкѣ возрастанія m_{n-1}, и вообще коэффиціентъ, соотвѣтствующій

$$m_1 = m_1' , \quad m_2 = m_2' , \ \dots \ , m_n = m_n' ,$$

опредѣлился бы послѣ всѣхъ тѣхъ, для которыхъ

$$\begin{array}{ll}
\text{или} & m_1 < m_1' , \\
\text{или} & m_1 = m_1' , \quad m_2 < m_2' , \\
\text{или} & m_1 = m_1' , \quad m_2 = m_2' , \quad m_3 < m_3' , \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\
\text{или} & m_1 = m_1' , \quad m_2 = m_2' , \ \dots \ , m_{n-2} = m_{n-2}' , \quad m_{n-1} < m_{n-1}' .
\end{array}$$

При этомъ для каждаго изъ искомыхъ коэффиціентовъ получилось бы выраженіе вида:

$$- \frac{P}{m_1 p_{11} + m_2 p_{22} + \dots + m_n p_{nn}} ,$$

гдѣ P означаетъ нѣкоторую цѣлую раціональную функцію найденныхъ раньше коэффиціентовъ, въ которой коэффиціенты суть линейныя формы съ положительными коэффиціентами отъ величинъ $p_{s\sigma}$, соотвѣтствующихъ неравнымъ s и σ, и отъ коэффиціентовъ разложеній X_s, $-X$ по степенямъ x, x_s.

Но къ указанному сейчасъ случаю приводится изслѣдованіе всякаго другого.

Для этого стоитъ только дифференціальныя уравненія (30) преобразовать къ виду (17), чего всегда можно достигнуть при помощи надлежащимъ образомъ выбранной линейной подстановки съ постоянными коэффиціентами. Тогда, если допустимъ, что уравненіе (40) соотвѣтствуетъ преобразованнымъ уравненіямъ (30), то изъ коэффиціентовъ $p_{s\sigma}$ всѣ будутъ нулями, за исключеніемъ слѣдующихъ:

$$p_{11} = \varkappa_1 , \ p_{22} = \varkappa_2 , \ \dots , \ p_{nn} = \varkappa_n , \ p_{21} = \sigma_1 , \ p_{32} = \sigma_2 , \ \dots , \ p_{n\,n-1} = \sigma_{n-1} ,$$

между которыми n первыхъ (представляющихъ корни опредѣляющаго уравненія) будутъ обладать отрицательными вещественными частями.

Разыскивая затѣмъ z подъ видомъ ряда, расположеннаго по восходящимъ степенямъ величинъ x_s, c, мы опредѣлимъ коэффиціенты этого ряда такими-же формулами, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Мы придемъ при томъ къ послѣднему, если замѣнимъ всѣ $\varkappa_s$ ихъ вещественными частями, а всѣ σ_s и всѣ коэффиціенты въ разложеніяхъ функцій X_s, $-X$ ихъ модулями. А черезъ это получимъ рядъ, въ которомъ коэффиціенты будутъ не менѣе модулей коэффиціентовъ нашего ряда.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что разсматриваемая функція f будетъ во всякомъ случаѣ голоморфною не только относительно величинъ x_s, но и относительно величинъ x_s, c.

Вводя опять прежнюю перемѣнную x, получимъ:

$$x = c + f(x_1, x_2, \ldots, x_n, c). \tag{41}$$

Этимъ уравненіемъ будетъ опредѣляться нѣкоторое рѣшеніе уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial x}{\partial x_s} = X .$$

Поэтому уравненіе (41), заключая въ себѣ произвольную постоянную c, представитъ нѣкоторое полное интегральное уравненіе системы (30), и слѣдовательно имъ можно будетъ замѣнить одно изъ дифференціальныхъ уравненій этой системы.

Замѣняемъ имъ первое изъ этихъ уравненій и исключаемъ при помощи него x изъ остальныхъ. Тогда послѣднія приведутся къ виду:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + c_{s1})x_1 + (p_{s2} + c_{s2})x_2 + \cdots + (p_{sn} + c_{sn})x_n + X'_s , \\ (s = 1, 2, \ldots, n)\end{array}\right\} \tag{42}$$

гдѣ X'_s будутъ голоморфными функціями величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n, c$, не содержащими въ своихъ разложеніяхъ членовъ ниже второго порядка относительно перемѣнныхъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Мы замѣчаемъ теперь, что наша задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ

$$x_1, \; x_2, \ldots, x_n, \; x$$

вполнѣ равносильна задачѣ объ устойчивости по отношенію къ слѣдующимъ:

$$x_1, \; x_2, \ldots, x_n, \; c . \tag{43}$$

Дѣйствительно, для этого необходимо только, чтобы всякимъ численно достаточно малымъ значеніямъ однѣхъ величинъ могли соотвѣтствовать сколь угодно численно малыя значенія другихъ. А что это на самомъ дѣлѣ имѣетъ мѣсто, видно изъ уравненія (41) и изъ слѣдующаго

$$c = x + F(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n\,, x)\,,$$

которое выводится изъ него въ предположеніи, что величины (43) численно достаточно малы, и въ которомъ F есть независящая отъ c голоморфная функція перемѣнныхъ $x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n\,, x$, уничтожающаяся при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\,.$$

Что-же касается вопроса объ устойчивости по отношенію къ величинамъ (43), изъ которыхъ послѣдняя есть постоянная, то онъ приводится къ изслѣдованію уравненій (42).

Эти уравненія при всякомъ численно достаточно маломъ c имѣютъ типъ разсматриваемыхъ нами вообще дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія, и соотвѣтствующее имъ опредѣляющее уравненіе обладаетъ только корнями съ отрицательными вещественными частями. Вслѣдствіе этого мы можемъ быть увѣрены, что при всякомъ достаточно маломъ $|c|$ для всякаго даннаго положительнаго ε найдется такое положительное число a, чтобы при выполненіи условій

$$|x_1| < a\,, \quad |x_2| < a\,, \ldots, \; |x_n| < a$$

въ начальный моментъ времени, во все послѣдующее время движенія выполнялись слѣдующія:

$$|x_1| < \varepsilon\,, \; |x_2| < \varepsilon\,, \ldots, \; |x_n| < \varepsilon\,,$$

и чтобы при тѣхъ-же условіяхъ функціи x_s съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ t стремились къ нулю.

Однако отсюда мы еще не имѣемъ права заключать, что невозмущенное движеніе устойчиво. Для того, чтобы такое заключеніе было законно, необходимо, чтобы при $|c|$, не превосходящемъ нѣкотораго предѣла, число a, соотвѣтствующее всякому данному ε, можно было выбирать *независящимъ отъ* c.

Но въ разсматриваемомъ случаѣ это послѣднее обстоятельство дѣйствительно имѣетъ мѣсто, какъ легко въ томъ убѣдиться при помощи методы параграфа 26аго.

Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе того, что вторыя части уравненій (42) суть голоморфныя функціи не только по отношенію къ величинамъ x_s, но и по отношенію къ величинамъ x_s, c, легко найти *независящія отъ* c цѣлыя функціи V и W перемѣнныхъ $x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n$, изъ которыхъ первая была бы опредѣленно-отрицательною, вторая опредѣленно-положительною и которыя при всякихъ численно достаточно малыхъ значеніяхъ величинъ (43) удовлетворяли бы условію:

$$\frac{dV}{dt} \geq W\,,$$

гдѣ первая часть представляетъ полную производную функціи V по t, составленную въ силу уравненій (42) *). А при этомъ возможность выбора числа a независящимъ отъ c дѣлается очевидною (см. доказат. теоремы I параграфа 16[аго]).

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что въ случаѣ, когда въ уравненіяхъ (30) функціи X, X_s всѣ обращаются въ нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, невозмущенное движеніе устойчиво.

Въ этомъ случаѣ всякое возмущенное движеніе, достаточно близкое къ невозмущенному, будетъ асимптотически приближаться къ нѣкоторому установившемуся движенію:

$$x = c\,, \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\,,$$

которое вообще будетъ отличнымъ отъ невозмущеннаго, но можетъ быть сдѣлано насколько угодно близкимъ къ нему.

Можно при томъ замѣтить, что всякое изъ этихъ установившихся движеній, когда ему соотвѣтствуетъ достаточно малая величина $|c|$, будетъ устойчивымъ.

32. Выводы, къ которымъ мы пришли въ послѣднихъ параграфахъ, можно резюмировать въ формѣ слѣдующаго предложенія:

Теорема. — *Пусть опредѣляющее уравненіе имѣетъ одинъ равный нулю корень, и пусть всѣ остальные его корни обладаютъ отрицательными вещественными частями. Предполагая, что система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія преобразована къ виду (28), составляемъ уравненія (29) и опредѣляемъ изъ нихъ величины* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *какъ голоморфныя функціи перемѣнной* x, *уничтожающіяся при* $x = 0$ *(такое опредѣленіе всегда будетъ возможнымъ и при томъ единственнымъ). Затѣмъ найденныя величины* x_s *подставляемъ въ функцію* X, *и если результатъ этой подстановки не равенъ тожественно нулю, разлагаемъ его въ рядъ по восходящимъ степенямъ* x.

Тогда, если наинизшая степень x *разложенія окажется четною, то невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ; если-же она окажется нечетною, то все будетъ зависѣть отъ знака коэффиціента, соотвѣтствующаго этой степени* x, *такъ, что невозмущенное движеніе будетъ неустойчивымъ, когда этотъ коэффиціентъ положителенъ, и устойчивымъ, когда онъ отрицателенъ. Въ послѣднемъ случаѣ всякое возмущенное движеніе, соотвѣтствующее достаточно малымъ возмущеніямъ, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.*

Наконецъ, если результатъ разсматриваемой подстановки окажется тожественно равнымъ нулю, то будетъ существовать непрерывный рядъ установившихся движеній, къ которому будетъ принадлежать и разсматриваемое невозмущенное, и всѣ движенія

---

*) Такъ напр., принимая за V квадратичную форму, удовлетворяющую уравненію (26), за W можемъ принять слѣдующую:

$$W = \theta(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

гдѣ θ какая-либо данная положительная правильная дробь.

этого ряда, достаточно близкія къ невозмущенному, включая и послѣднее, будутъ устойчивыми. Въ этомъ случаѣ при достаточно малыхъ возмущеніяхъ всякое возмущенное движеніе будетъ асимптотически приближаться къ одному изъ установившихся движеній названнаго ряда.

Приложимъ заключающееся въ этой теоремѣ правило къ примѣрамъ.

Примѣръ 1. — Пусть данная система дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія есть слѣдующая:

$$\frac{dx}{dt} = (3m-1)x^2 - (m-1)y^2 - (n-1)z^2 + (3n-1)yz - 2mzx - 2nxy\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + x + (x - y + 2z)(y + z - x)\,,$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + x - (x + 2y - z)(y + z - x)\,,$$

гдѣ m и n означаютъ нѣкоторыя постоянныя.

Для этой системы корни опредѣляющаго уравненія суть: $0\,,\ -1\,,\ -1\,.$

Обозначая вторыя части предложенныхъ уравненій соотвѣтственно черезъ X, Y, Z, дѣлаемъ:

$$Y = 0\,, \qquad Z = 0\,. \tag{44}$$

Отсюда выводимъ:

$$y = x + 2x^2 - 6x^3 - 30x^4 + \dots\,,$$
$$z = x - 2x^2 - 6x^3 + 30x^4 + \dots\,.$$

А подставляя эти величины y и z въ функцію X, находимъ:

$$X = 4(5m - 7n)x^4 + 24(m - n)x^5 + \dots\,.$$

Изъ этого выраженія видно, что если $5m - 7n$ не нуль, невозмущенное движеніе неустойчиво. Въ противномъ случаѣ ($5m = 7n$) оно неустойчиво при m и n положительныхъ и устойчиво при m и n отрицательныхъ.

Если-же $m = n = 0$, то получается слѣдующее тожество:

$$2X = (z - 2y - x)Y + (y - 2z - x)Z\,,$$

изъ котораго видно, что въ силу уравненій (44) всегда будетъ $X = 0$.

Поэтому въ послѣднемъ случаѣ будетъ существовать непрерывный рядъ установившихся движеній, и не только разсматриваемое невозмущенное движеніе, но и всѣ движенія этого ряда, достаточно къ нему близкія, будутъ устойчивыми.

Примѣръ 2. — Разберемъ всевозможные случаи, которые можетъ представить система второго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bxy + cy^2\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -y + kx + lx^2 + mxy + ny^2$$

при различныхъ значеніяхъ постоянныхъ a, b, c, k, l, m, n.

Изъ уравненія

$$y = kx + lx^2 + mxy + ny^2$$

выводимъ

$$y = kx + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots,$$

гдѣ

$$B_2 = l + mk + nk^2, \quad B_3 = (m + 2nk)B_2, \dots .$$

А подстановка этой величины y даетъ:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots,$$

гдѣ

$$A_2 = a + bk + ck^2, \quad A_3 = (b + 2ck)B_2, \quad A_4 = (b + 2ck)B_3 + cB_2{}^2, \dots .$$

Отсюда видно, что устойчивость будетъ возможна только въ случаѣ, когда

$$a + bk + ck^2 = 0.$$

Если при этомъ $B_2 = 0$ (что влечетъ за собою равенство нулю и всѣхъ остальныхъ коэффиціентовъ B), то всѣ коэффиценты A будутъ нулями, и слѣдовательно устойчивость будетъ несомнѣнною.

Допустимъ, что B_2 не нуль.

Тогда, если $b + 2ck$ не нуль, устойчивость будетъ опредѣляться знакомъ A_3. Если-же

$$b + 2ck = 0,$$

то коэффиціентъ A_3 будетъ нулемъ, а коэффиціентъ A_4 не будетъ нулемъ, пока c не нуль. Поэтому устойчивость будетъ возможна только въ случаѣ $c = 0$. А тогда вслѣдствіе допущенныхъ равенствъ будетъ также $a = 0$ и $b = 0$, и слѣдовательно устойчивость дѣйствительно будетъ имѣть мѣсто.

Такимъ образомъ всевозможные случаи приводятся къ шести слѣдующимъ:

I. $a + bk + ck^2 \gtrless 0$, невозмущенное движеніе неустойчиво;

II. $\begin{cases} a + bk + ck^2 = 0, \\ (l + mk + nk^2)(b + 2ck) > 0, \end{cases}$ „ „ неустойчиво;

III. $\begin{cases} a + bk + ck^2 = 0, \\ (l + mk + nk^2)(b + 2ck) < 0, \end{cases}$ „ „ устойчиво;

IV. $\begin{cases} a = ck^2, \quad b = -2ck, \quad c \gtrless 0, \\ l + mk + nk^2 \gtrless 0, \end{cases}$ „ „ неустойчиво;