УДК 517.9 + 517.4

О. А. АНОЩЕНКО

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ АСИМПТОТИКУ

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

с вещественным потенциалом $q(x)$ таким, что

$$\int_0^{\pm\infty} (1 + x^2)\,|q(x) - q_\pm(x)|\,dx < \infty, \tag{2}$$

где $q_\pm(x)$ — вещественные конечнозонные потенциалы для уравнений Хилла

$$-y'' + q_\pm(x)\, y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$
$$q_\pm(x + a_\pm) = q_\pm(x), \quad a_\pm > 0.$$

Пусть $\theta_\pm(x, \lambda)$, $\varphi_\pm(x, \lambda)$ — фундаментальные системы решений уравнений (3), определенные начальными условиями

$$\theta_\pm(0, \lambda) = \varphi'_\pm(0, \lambda) = 1, \quad \theta'_\pm(0, \lambda) = \varphi_\pm(0, \lambda) = 0.$$

Обозначим

$$\varphi_\pm(\lambda) = \varphi_\pm(a_\pm, \lambda), \ \varphi'_\pm(\lambda) = \varphi'_\pm(a_\pm, \lambda), \quad \theta_\pm(\lambda) = \theta_\pm(a_\pm, \lambda), \ \theta'_\pm(\lambda) = \theta'_\pm(a_\pm, \lambda), \ F_\pm(\lambda)$$

— дискриминант Хилла,

$$F_\pm(\lambda) = \frac{\varphi'_\pm(\lambda) + \theta_\pm(\lambda)}{2},$$

$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке для уравнения (3) с потенциалом $q_-(x)$

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta_-(x, \lambda) + m^-_{1,2}(\lambda)\, \varphi_-(x, \lambda),$$
$$m^-_{1,2}(\lambda) = (\varphi'_-(\lambda) - \theta_-(\lambda))/2\varphi_-(\lambda) \pm \sqrt{F^2_-(\lambda) - 1}/\varphi_-(\lambda); \tag{4}$$

$\tilde{\varphi}_{1,2}(x, \lambda)$ — функции Флоке для уравнения (3) с потенциалом $q_+(x)$

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(x, \lambda) = \theta_+(x, \lambda) + m^+_{1,2}(\lambda)\, \varphi_+(x, \lambda),$$
$$m^+_{1,2}(\lambda) = (\varphi'_+(\lambda) - \theta_+(\lambda))/2\varphi_+(\lambda) \pm \sqrt{F^2_+(\lambda) - 1}/\varphi_+(\lambda) \tag{5}$$

(верхний знак в формулах (4), (5) соответствует индексу 1, нижний — индексу 2).

Известно [3], что спектр $\sigma^\pm = \sigma^\pm(q_\pm)$ оператора

$$L_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q_\pm(x) \quad \sigma^\pm = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \ |F_\pm(\lambda)| \leqslant 1\}$$

есть объединение отрезков (зон) $S^\pm_n = [S^\pm_{n1}, S^\pm_{n2}]$, $n = 0, 1, \ldots, N_\pm$, причем $S^\pm_{N_\pm 2} = +\infty$. Интервалы $\Delta^\pm_0 = (-\infty, S^\pm_{01})$, $\Delta^\pm_n = (S^\pm_{(n-1)2}, S^\pm_{n1})$, $n = 1, 2, \ldots, N_\pm$, разделяющие зоны, называются лакунами. Будем называть зоны (лакуны) спектров σ^+ и σ^- положительными и отрицательными зонами (лакунами) соответственно. Обозначим $\Delta^\pm_k$, $k = 1, 2, \ldots, N_1$ ($\Delta^\mp_k$, $k = 1, 2, \ldots, N_2$) интервалы, которые получаются в результате пересечения положительных (отрицательных) лакун с отрицательными (положительными) зонами; $\Delta^{\pm} = \bigcup_{n=0}^{N_{\pm}} \Delta_n^{\pm}$. Ветвь радикала в формулах (4), (5) выбрана из условия $\sqrt{F_{\pm}^2(\lambda) - 1} > 0$ при $\lambda \in \Delta_0^{\pm}$.

При $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-$ фундаментальную систему решений уравнения (1) образуют функции [4]

$$\psi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\psi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x, y)\, \tilde{\psi}_{1,2}(y, \lambda)\, dy, \tag{6}$$

а при $\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+$ уравнение (1) имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\varphi_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_{1,2}(x, \lambda) + \int_{x}^{\infty} K^+(x, y)\, \tilde{\varphi}_{1,2}(y, \lambda)\, dy, \tag{7}$$

причем потенциал $q(x)$ связан с ядрами $K^{\pm}(x, y)$ соотношениями

$$q(x) = q_-(x) + 2\frac{dK^-(x, x)}{dx} = q_+(x) - 2\frac{dK^+(x, x)}{dx}.$$

Из представлений (6), (7) следует, что функция $\psi_1(x, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную λ плоскость с разрезами по спектру σ^-, а функция $\varphi_2(x, \lambda)$ — в комплексную плоскость λ с разрезами по спектру σ^+.

Так как функции $\varphi_{1,2}$, $\psi_{1,2}$ образуют фундаментальные системы решений уравнения (1), то они связаны равенствами

$$\psi_1(x, \lambda) = c_{12}(\lambda)\, \varphi_1(x, \lambda) + c_{11}(\lambda)\, \varphi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+, \tag{8}$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = c_{22}(\lambda)\, \psi_1(x, \lambda) + c_{21}(\lambda)\, \psi_2(x, \lambda), \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-. \tag{9}$$

Таблица коэффициентов $C = \| c_{ij}(\lambda) \|_{i,j=1,2}$ называется матрицей перехода уравнения (1).

В настоящей работе изучаются свойства матрицы C и решается задача восстановления потенциала $q(x)$ по матрице C и некоторым характеристикам точечного спектра; получены основные интегральные уравнения для решения обратной задачи, а также показано, что найденные свойства элементов некоторой матрицы C являются достаточными для того, чтобы она была матрицей перехода для уравнения (1) с потенциалом, удовлетворяющим условиям (2).

Используя равенства (8), (9), выразим коэффициенты $c_{ij}(\lambda)$ через вронскианы

$$c_{11}(\lambda) = \frac{W\{\psi_1, \varphi_1\}}{W\{\varphi_2, \varphi_1\}} = \frac{\psi_1'(x, \lambda)\, \varphi_1(x, \lambda) - \psi_1(x, \lambda)\, \varphi_1'(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)},$$

$$c_{12}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \psi_1\}}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}, \quad \lambda \in \operatorname{Int} \sigma^+;$$

$$c_{21}(\lambda) = \frac{W\{\varphi_2, \psi_1\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \quad c_{22}(\lambda) = \frac{W\{\psi_2, \varphi_2\}}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}, \tag{10}$$

$$\lambda \in \operatorname{Int} \sigma^-.$$

Стандартным образом [1, 2] из формул (6)—(10) устанавливаются следующие свойства элементов $c_{ij}(\lambda)$ матрицы C:

I. При $\lambda \in \operatorname{Int}\sigma^+ \cap \operatorname{Int}\sigma^-$

$$c_{21}(\lambda) = c_{12}(\lambda)\frac{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)},$$

$$c_{11}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)}\frac{m_1^-(\lambda) - m_2^-(\lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)},$$

$$|c_{21}(\lambda)|^2 - |c_{22}(\lambda)|^2 = \frac{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)},$$

$$|c_{12}(\lambda)|^2 - |c_{11}(\lambda)|^2 = \frac{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)}{m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)};$$

$$c_{12}(\lambda) = \overline{c_{11}(\lambda)} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int}\sigma^+ \cap \Delta^-;$$

$$c_{21}(\lambda) = \overline{c_{22}(\lambda)} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int}\sigma^- \cap \Delta^+.$$

II. Функции $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$ являются предельными значениями функций мероморфных в комплексной плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^-, причем

$$c_{12}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{12}(\lambda^{\text{н}})},\ c_{11}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{11}(\lambda^{\text{н}})} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int}\sigma^+;$$

$$c_{21}(\lambda^{\text{в}}) = \overline{c_{21}(\lambda^{\text{н}})} \text{ при } \lambda \in \operatorname{Int}\sigma^-.$$

(Здесь и далее $\lambda^{\text{в}}$, $\lambda^{\text{н}}$ — точки верхнего и нижнего берегов разрезов соответственно).

III. Для функций $c_{ij}(\lambda)$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$c_{12}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\ c_{21}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ при } |\lambda| \to \infty;$$

$$c_{11}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\ c_{22}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

IV. Функции $\dfrac{\varphi_2(x, \lambda)}{c_{21}(\lambda)}$ и $\dfrac{\psi_1(x, \lambda)}{c_{12}(\lambda)}$ (x фиксировано) ограничены на σ^- и $(\sigma^+ \cap \Delta^-) \cup \{S_{nj}^+\}_{n=0, j=1,2}^{N_+}$ соответственно.

V. При $\lambda \overline{\in} M = \{S_{nj}^\pm:\ n = 0, 1, \ldots, N_\pm,\ j = 1, 2\}$ функция $c_{12}(\lambda)\sqrt{F_+^2(\lambda) - 1}\,\varphi_-(\lambda)$ непрерывно дифференцируема по переменной λ. Функции $c_{12}(\lambda)\sqrt{F_+^2(\lambda) - 1}\, m_2^-(\lambda)\varphi_-(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda) \times \sqrt{F_-^2(\lambda) - 1}\,\varphi_+(\lambda)\, m_1^+(\lambda)$ непрерывны в плоскости λ с разрезами по спектрам σ^+ и σ^- вплоть до границ. Кроме того:

A. Если функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет полюс в точке $\lambda = S_{ki}^+$ ($k = 0, 1, \ldots, N_+;\ i = 1, 2$), то

$$\lim_{\lambda \to S_{ki}^+} \sqrt{\lambda - S_{ki}^+}\,\varphi_-(\lambda)\, c_{12}(\lambda)\left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)} + 1\right] = 0,$$

в противном случае

$$\lim_{\lambda\to S_{ki}^+}\sqrt{\lambda - S_{ki}^+}\,c_{12}(\lambda)\left[\frac{c_{11}(\lambda)}{c_{12}(\lambda)}+1\right]=0.$$

Б. Если функция $\varphi_2(x, \lambda)$ имеет полюс в точке $\lambda = S_{nj}^-$ $(n = 0, 1, \ldots, N_-;\ j = 1, 2)$, то

$$\lim_{\lambda\to S_{nj}^-}\sqrt{\lambda - S_{nj}^-}\,c_{21}(\lambda)\left[\frac{c_{22}(\lambda)}{c_{21}(\lambda)}+1\right]\psi_+(\lambda)=0,$$

в противном случае

$$\lim_{\lambda\to S_{nj}^-}\sqrt{\lambda - S_{nj}^-}\,c_{21}(\lambda)\left[\frac{c_{22}(\lambda)}{c_{21}(\lambda)}+1\right]=0.$$

Обозначим дискретные собственные значения оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$ через λ_n, а обратные величины норм собственных функций дискретного спектра $\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n)$, $\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)$ через m_n^+, m_n^-, так что

$$(m_n^+)^{-2}=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n)|^2\,dx,\quad (m_n^-)^{-2}=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)|^2\,dx,$$

где

$$\hat{\psi}_1(x, \lambda_n)=\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\dfrac{\psi_1(x, \lambda)}{m_2^-(\lambda)-m_1^-(\lambda)}, & \text{если } \lambda_n \text{ — особая точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda)\\ \psi_1(x, \lambda_n), & \text{если функция } \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda_n;\end{cases}$$

$$\hat{\varphi}_2(x, \lambda_n)=\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_n}\dfrac{\varphi_2(x, \lambda)}{m_2^+(\lambda)-m_1^+(\lambda)}, & \text{если } \lambda_n \text{ — особая точка функции } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda)\\ \varphi_2(x, \lambda_n), & \text{если функция } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda_n.\end{cases}$$

VI. Оператор L имеет конечное число собственных значений λ_n $(n = 1, 2, \ldots, l)$, лежащих в пересечении лакун спектров σ^+ и σ^-, причем

1) если $\varphi_-(\lambda_n)\neq 0$, $\varphi_+(\lambda_n)\neq 0$, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$, а нормировки m_n^+, m_n^- связаны соотношением

$$(m_n^-)^{-2}=(m_n^+)^2\,[m_2^+(\lambda_n)-m_1^+(\lambda_n)]^2\left[\left.\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n}\right]^2;$$

2) если $\varphi_-(\lambda_n) = \varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функции $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ и $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывны в точке λ_n, то λ_n — двукратный корень функций $c_{12}(\lambda)$, $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{d}{d\lambda} \{ c_{12}(\lambda) [m_2^+(\lambda) - m_1^+(\lambda)] \} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

3) если $\varphi_-(\lambda_n) \neq 0$, а функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ имеет полюс в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{12}(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

4) если $\varphi_+(\lambda_n) \neq 0$, а функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет полюс в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

5) если $\varphi_+(\lambda_n) \neq 0$, $\varphi_-(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{12}(\lambda)$ и двукратный корень функции $c_{21}(\lambda)$, в этом случае

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 [m_2^+(\lambda_n) - m_1^+(\lambda_n)]^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

6) если $\varphi_-(\lambda_n) \neq 0$, $\varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, то λ_n — простой корень функции $c_{21}(\lambda)$ и двукратный корень функции $c_{12}(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 [m_2^-(\lambda_n) - m_1^-(\lambda_n)]^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

7) если $\varphi_-(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, а функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ имеет в этой точке полюс, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$, $c_{21}(\lambda)$ и

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{12}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

8) если $\varphi_+(\lambda_n) = 0$, но функция $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ непрерывна в точке λ_n, а функция $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеет в точке λ_n полюс, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)$, кроме того,

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{dc_{21}(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2;$$

9) если функции $\tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$ и $\tilde{\psi}_1(x, \lambda)$ имеют полюсы в точке λ_n, то λ_n — простой корень функций $c_{12}(\lambda)\varphi_-(\lambda)$ и $c_{21}(\lambda)\varphi_+(\lambda)$, а

$$(m_n^-)^{-2} = (m_n^+)^2 \left[\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{c_{12}(\lambda)}{m_2^-(\lambda) - m_1^-(\lambda)} \right\} \Bigg|_{\lambda=\lambda_n} \right]^2.$$

Используя свойства I — VI элементов матрицы C и соотношения (6) — (9), можно получить приводимые ниже основные интегральные уравнения для ядер $K^+(x, y)$, $K^-(x, y)$ операторов преобразования, позволяющие восстанавливать потенциал $q(x)$ по матрице C и наборам чисел $\{\lambda_n,\ m_n^+ > 0,\ m_n^- > 0;\ n = 1, 2, \ldots, l\}$:

$$K^+(x, y) + F^+(x, y) + \int_x^\infty K^+(x, t) F^+(t, y)\, dt = 0,\ y > x, \qquad (11)$$

$$K^-(x, y) + F^-(x, y) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) F^-(t, y)\, dt = 0,\ y < x, \qquad (12)$$

где

$$F^+(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{c_{11}(k_+)}{c_{12}(k_+)} \tilde{\varphi}_2(x, k_+) \tilde{\varphi}_2(y, k_+) \rho_+(k_+)\, dk_+ +$$

$$+ \sum_{k=1}^l (m_k^+)^2 \hat{\tilde{\varphi}}_2(x, \lambda_k) \hat{\tilde{\varphi}}_2(y, \lambda_k) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_1} \oint_{\Delta_n^\pm} \frac{\tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \tilde{\varphi}_2(y, \lambda)\, d\lambda}{|c_{21}(\lambda)|^2 [m_2^-(\lambda^{\text{в}}) - m_1^-(\lambda^{\text{в}})]}; \qquad (13)$$

$$F^-(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{c_{22}(k_-)}{c_{21}(k_-)} \tilde{\psi}_1(x, k_-) \tilde{\psi}_1(y, k_-) \times$$

$$\times \rho_-(k_-)\, dk_- + \sum_{k=1}^l (m_k^-)^2 \hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda_k) \hat{\tilde{\psi}}_1(y, \lambda_k) +$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_2} \oint_{\Delta_n^\mp} \frac{\tilde{\psi}_1(x, \lambda) \tilde{\psi}_1(y, \lambda)\, d\lambda}{|c_{12}(\lambda)|^2 [m_2^+(\lambda^{\text{в}}) - m_1^+(\lambda^{\text{в}})]}; \qquad (14)$$

$$k_\pm = \arcsin\left(i \sqrt{F_\pm^2(\lambda) - 1}\right),\ \rho_\pm(k_\pm) = -\varphi_\pm(k_\pm)/F'_\pm(k_\pm),$$

$$\hat{\tilde{\psi}}_1(x, \lambda) = \begin{cases} \lim\limits_{\mu \to \lambda} \dfrac{\tilde{\psi}_1(x, \mu)}{m_2^-(\mu) - m_1^-(\mu)}, & \text{если } \lambda \text{ — особая точка функции } \tilde{\psi}_1(x, \lambda); \\ \tilde{\psi}_1(x, \lambda), & \text{если функция } \tilde{\psi}_1(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda; \end{cases}$$

$$\hat{\tilde{\varphi}}_2(x, \lambda) = \begin{cases} \lim\limits_{\mu\to\lambda} \dfrac{\tilde{\varphi}_2(x, \mu)}{m_2^+(\mu) - m_1^+(\mu)}, & \text{если } \lambda \text{ — особая точка функции } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda); \\ \tilde{\varphi}_2(x, \lambda), & \text{если функция } \tilde{\varphi}_2(x, \lambda) \text{ непрерывна в точке } \lambda. \end{cases}$$

Аналогично тому, как это сделано в [1], используя уравнения (11), (12), можно установить следующие свойства функций $F^+(x, y)$, $F^-(x, y)$:

VII. Функции $F^+(x, y)$, $F^-(x, y)$ абсолютно непрерывны по каждой переменной при фиксированной другой. Пусть

$$g^\pm(x, y) = \max_{\pm(t_1-x)\geqslant 0,\ \pm(t_2-y)\geqslant 0} |F^\pm(t_1, t_2)|,$$

$$g_i^\pm(t_1, t_2) = \frac{\partial F^\pm(t_1, t_2)}{\partial t_i} \quad i = 1, 2.$$

Тогда

А. При всех $d > -\infty$

$$\int_d^\infty g^+(x, y)\,dy = \tilde{g}^+(x) \leqslant C^+(d)$$

$$(1 + |x|) \max_{t\geqslant x} \int_x^\infty |g_i^+(t, y)|\,dy \leqslant C^+(d) \text{ при } x \geqslant d$$

$$\int_d^\infty |y|\,|g^+(y, y)|\,dy < \infty; \quad \int_d^\infty (1 + y^2) \left|\frac{dF^+(y, y)}{dy}\right| dy < \infty$$

и равномерно по $x \geqslant d$

$$\lim_{h\to 0} \max_{t\geqslant x} \int_x^\infty |g_1^+(t + h, y) - g_1^+(t, y)|\,dy = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \max_{t\geqslant x} \int_x^\infty |g_2^+(t, y + h) - g_2^+(t, y)|\,dy = 0.$$

Б. При всех $d < \infty$

$$\int_{-\infty}^d g^-(x, y)\,dy = \tilde{g}^-(x) \leqslant C^-(d),$$

$$(1 + |x|) \max_{t\leqslant x} \int_{-\infty}^x |g_i^-(t, y)|\,dy \leqslant C^-(d) \text{ при } x \leqslant d;$$

$$\int_{-\infty}^d |y|\,g^-(y, y)\,dy < \infty, \quad \int_{-\infty}^d (1 + y^2) \left|\frac{dF^-(y, y)}{dy}\right| dy < \infty$$

и равномерно по $x \leqslant d$

$$\lim_{h\to 0} \max_{t\leqslant x} \int_{-\infty}^x |g_1^-(t + h, y) - g_1^-(t, y)|\,dy = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \max_{t\leqslant x} \int_{-\infty}^x |g_2^-(t, y + h) - g_2^-(t, y)|\,dy = 0.$$

Сформулированные выше условия I — VII полностью определяют данные рассеяния, а именно, справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы матрица* $C = \| c_{ij}(\lambda) \|_{i,\ j=1,\ 2}$ *и наборы чисел* $\{\lambda_k,\ m_k^{\pm} > 0,\ k = 1, 2, \ldots, l\}$ *являлись данными рассеяния некоторого уравнения* (1) *с вещественным потенциалом* $q(x)$, *удовлетворяющим неравенствам* (*2*), *необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы* C *обладали свойствами* I — VI, *а функции* $F^{\pm}(x, y)$, *построенные по формулам* (*13*), (*14*), *удовлетворяли условию* VII.

Замечание. В случае, когда $q_+(x) = q_-(x)$, возможно безотражательное возмущение, т. е. коэффициент отражения $r^+(\lambda) = c_{11}(\lambda)/c_{12}(\lambda)$ можно положить равным нулю при $\lambda \in \sigma$. При этом функция $F^+(x, y)$ имеет следующий вид:

$$F^+(x, y) = \sum_{k=1}^{l} (m_k^+)^2\, \hat{\tilde{\varphi}}_2(x, \lambda_k)\, \hat{\tilde{\varphi}}_2(y, \lambda_k).$$

Список литературы: 1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. — К.: Наук. думка, 1977.—358 с. 2. *Ермакова В. Д.* Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера на всей оси с неубывающим потенциалом специального вида. — Вестн. Харьк. ун-та, № 230. Механика, теория управления и математическая физика, 1982, с. 50—60. 3. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. II. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.—555 с. 4. *Фирсова Н. Е.* Обратная задача рассеяния для возмущенного оператора Хилла.— Мат. заметки, 1975, 18 : 6, с. 831—843.

Поступила в редколлегию 27.06.85.