УДК 517.535

М. Н. ШЕРЕМЕТА

РОСТ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть Λ — класс положительных последовательностей $\lambda = (\lambda_n)$, а $A(R)$ — класс аналитических в круге $\{z: |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$, функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Скажем, что $f \in A_\lambda(1)$, если $f \in A(1)$ и $|a_n| \leqslant |a_1| \lambda_n$ для всех $n \in N$. Допустим, что (n_p) — возрастающая последовательность натуральных чисел и $n_0 = 0$. В [1] доказано, что для того чтобы для каждых последовательностей $\lambda \in \Lambda$ и $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы $n_{p+1} - n_p = O(1)$ $(p \to \infty)$, и необходимо, чтобы $\varliminf_{p\to\infty} (n_{p+1} - n_p) < +\infty$. Условие $n_{p+1} - n_p = 0(1)$ $(p \to \infty)$ можно ослабить, если наложить дополнительное требование на последовательность λ. Именно [1], для того чтобы для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\ln \lambda_n = 0(n)$, $n \to \infty$, и каждой функции $f \in A(1)$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$ вытекало, что $f \in A(\infty)$, достаточно, чтобы $n_{p+1}/n_p \to 1$ $(p \to \infty)$, и необходимо, чтобы $\varliminf_{p\to\infty} n_{p+1}/n_p = 1$.

Считая то или другое достаточное условие выполненным, исследуем рост соответствующей целой функции.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \Lambda$, а $n_{p+1} - n_p = O(1)$ $(p \to \infty)$. Положим $l = \max\{n_{p+1} - n_p : p \in Z_+\}$ и $L = \max\{\lambda_n : 2 \leqslant n \leqslant l+1\}$. Если $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$, то $f \in A(\infty)$ и*

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r} \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \{L(l+1)!\}^{p/n_p}, \tag{1}$$

где $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Доказательство. В [1] доказано, что если $\lambda \in \Lambda$ и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in Z_+$, то для всех $p \in Z_+$ и m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1} - n_p + 1$, имеет место неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leqslant |a_1| \frac{m!\,\lambda_m}{(n_p+m)!} \prod_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1} + 1)! \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j - n_{j-1}+1}, \tag{2}$$

Поскольку $n_j - n_{j-1} + 1 \leqslant l + 1$ и $\lambda_{n_j - n_{j-1}+1} \leqslant L$ для всех $j \in N$, то из (2) вытекает неравенство

$$|a_{n_p+m}| \leqslant |a_1| \{L(l+1)!\}^{p+1}/(n_p+m)!$$

Используя формулу Адамара для нахождения величины типа целой функции, имеем

$$\sigma = \varlimsup_{p\to\infty} \frac{n_p+m}{e} \sqrt[n_p+m]{|a_{n_p+m}|} \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \{L(l+1)!\}^{\frac{p+1}{n_p+m}},$$

где $1 \leqslant m \leqslant l+1$, т. е. приходим к неравенству (1).

Покажем, что оценку (1), вообще говоря, улучшить нельзя. Допустим, что $n_p = pl\ (p \in \boldsymbol{Z}_+,\ l \in \boldsymbol{N})$, $\lambda_n \equiv L = (l+1)^l/(l+1)!$, $n \geqslant 2$, и рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(l+1)^{pl}}{(n_p+1)!} z^{n_p+1}.$$

Для этой функции по формуле Адамара имеем

$$\sigma = \overline{\lim_{p\to\infty}} (l+1)^{lp/n_p} = \overline{\lim_{p\to\infty}} \{L(l+1)!\}^{p/n_p},$$

и нам осталось показать, что $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$. Так как

$$f_1^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(l+1)^{(p+k)l}}{(n_{p+k}-n_p+1)!} z^{n_{p+k}-n_p+1},$$

нам нужно доказать, что

$$(l+1)^{kl} \leqslant L(n_{p+k}-n_p+1)! = (l+1)^l (kl+1)!/(l+1)!$$

для всех $k \in \boldsymbol{N}$. Последнее неравенство очевидно, если $k=1$, а для других $k \in \boldsymbol{N}$ легко доказывается методом математической индукции.

Из теоремы 1 вытекает, что если $n_{p+1}-n_p = O(1)\ (p\to\infty)$, то для каждой последовательности $\lambda \in \Lambda$ из условия $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$ следует, что порядок функции f не превышает 1. Если же $n_{p+1}-n_p \to \infty\ (p\to\infty)$, $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$ и $f \in A(\infty)$, то порядок может быть большим единицы. Однако и в этом случае можно дать оценку для порядка.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \in \Lambda$ *и* $\ln \lambda_n = 0(n)\ (n\to\infty)$, *а* $n_{p+1}/n_p \to 1$ $(p\to\infty)$. *Если* $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ *для всех* $p \in \boldsymbol{Z}_+$, *то* $f \in A(\infty)$ *и*

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r} \leqslant q = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln n_p}{\ln \dfrac{1}{n_p/n_{p-1}-1}}. \tag{3}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 4 из [1] показано, что если $\lambda \in \Lambda$, $\ln \lambda_n = 0(n)\ (n\to\infty)$ и $f^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$, то для всех $p \in \boldsymbol{N}$ и m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1}-n_p+1$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{n_p+m} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geqslant \min\left\{\ln n_p - \frac{C_p}{n_p},\ \ln n_{p+1} - \frac{C_{p+1}}{n_{p+1}}\right\} + 0(1) \tag{4}$$

при $p\to\infty$, где

$$C_p = \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) \ln (n_j - n_{j-1}).$$

Так как $n_{p+1}/n_p \to 1\ (p\to\infty)$, то $\ln n_p \sim \ln(n_p+m) \sim \ln n_{p+1}\ (p\to\infty)$ для любого m, $1 \leqslant m \leqslant n_{p+1}-n_p+1$. Поэтому, используя формулу Адамара для нахождения порядка ρ функции f, имеем

$$\frac{1}{\rho} = \underline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{(n_p+m)\ln(n_p+m)} \ln \frac{1}{|a_{n_p+m}|} \geqslant$$

$$\geqslant \underline{\lim_{p\to\infty}} \left(1 - \frac{C_p}{n_p \ln n_p}\right) = \left(1 - \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{C_p}{n_p \ln n_p}\right). \tag{5}$$

Если теперь $q = +\infty$, то неравенство (3) очевидно. Если же $q < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $p \geqslant p_0(\varepsilon)$ имеем $\ln n_p \leqslant (q + \varepsilon) \ln \{1/(n_p/n_{p-1} - 1\}$, т. е. $\ln (n_p - n_{p-1}) \leqslant \left(1 - \frac{1}{q+\varepsilon}\right) \ln n_p$. Поэтому

$$C_p \leqslant \left(1 - \frac{1}{q+\varepsilon}\right) \ln n_p \sum_{j=1}^{p} (n_j - n_{j-1}) + 0(1) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{q+\varepsilon}\right) n_p \ln n_p + 0(1) \quad (p \to \infty).$$

Отсюда и из (4) в силу произвольности ε легко получаем неравенство (3).

Покажем, что оценку (3), вообще говоря, улучшить нельзя. Так как $q \geqslant 1$ для любой возрастающей последовательности (n_p) натуральных чисел, а для случая $q = 1$ соответствующий пример функции f_1 первого порядка уже построен, будем считать, что $q > 1$.

Пусть $n_0 = 0$, $n_1 = 1$ и $n_p = n_{p-1} + [n_{p-1}^{1-1/q}]$, $p \geqslant 2$, а

$$f_2(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^{n_p+1}, \quad a_p = \exp\left\{-\frac{1}{q}(n_p+1)\ln(n_p+1)\right\}.$$

По теореме Адамара функция f_2 имеет порядок $\rho = q$, и нам осталось показать, что $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$ и некоторой последовательности $\lambda \in \Lambda$ такой, что $\ln \lambda_n = O(n)$ $(n \to \infty)$. Поскольку

$$f_2^{(n_p)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!} a_{p+k} z^{n_{p+k}-n_p+1},$$

нам нужно доказать, что

$$\frac{(n_{p+k}+1)!}{(n_{p+k}-n_p+1)!\,(n_p+1)!} \frac{a_{p+k}}{a_p} \leqslant \lambda_{n_{p+k}-n_p+1},$$

т. е.

$$\ln(n_{p+k}+1)! + \ln a_{p+k} - \ln(n_p+1)! - \ln a_p -$$
$$- \ln(n_{p+k}-n_p+1)! \leqslant M(n_{p+k}-n_p+1)$$

для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$ и $k \in \boldsymbol{N}$, где M — некоторая положительная постоянная. Используя формулу Стирлинга, нетрудно показать, что последнее неравенство выполняется, если

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)\{(n_{p+k}+1)\ln(n_{p+k}+1) - (n_p+1)\ln(n_p+1)\} -$$

$$-(n_{p+k}-n_p+1)\ln(n_{p+k}-n_p+1) - M(n_{p+k}-n_p+1) \leqslant 0 \quad (6)$$

для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$ и $k \in \boldsymbol{N}$. Для $p = 0$ и $k \in \boldsymbol{N}$ неравенство (6) очевидно. Поэтому нам нужно его доказать для $p \in \boldsymbol{N}$ и $k \in \boldsymbol{N}$.

На $[n_{p+1}+1, \infty)$ рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) x \ln x - (x - n_p)\ln(x - n_p) - Mx$$

и покажем, что

$$\psi'(x) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln x - \ln (x - n_p) - M - 1/q < 0$$

при подходящем $M > 0$. Действительно, функция ψ' убывающая на $[n_{p+1} + 1, \infty)$ и

$$\psi'(n_{p+1} + 1) = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln (n_{p+1} + 1) - \ln ([n_p^{1-1/q}] + 1) -$$

$$- M - \frac{1}{q} \leqslant \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln \frac{n_{p+1}}{n_p} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln 2 - M -$$

$$- \frac{1}{q} \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln 2 - M - \frac{1}{q} < 0,$$

если M достаточно большое.

Таким образом, функция ψ убывающая на $[n_{p+1} + 1, \infty)$, и нам достаточно доказать неравенство (6) для $k = 1$ и всех $p \in \boldsymbol{N}$. Но

$$(n_{p+1} + 1) \ln (n_{p+1} + 1) - (n_p + 1) \ln (n_p + 1) \leqslant$$

$$\leqslant (n_{p+1} - n_p)(\ln n_{p+1} + 2) \leqslant (n_{p+1} - n_p)(\ln n_p + 2 + \ln 2)$$

и

$$(n_{p+1} - n_p + 1) \ln (n_{p+1} - n_p + 1) \geqslant (n_{p+1} - n_p)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \ln n_p.$$

Поэтому неравенство (6) выполняется для $k = 1$ и $p \in \boldsymbol{N}$, если только $(1 - 1/q)(2 + \ln 2) \leqslant M$.

Значит, если $\lambda_n = \exp\{(2 + \ln 2) n\}$, то $f_2^{(n_p)} \in A_\lambda(1)$ для всех $p \in \boldsymbol{Z}_+$, и точность оценки (3) доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 2 и $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}\, n_p \left(\frac{n_p}{n_{p-1}} - 1\right)^\rho < +\infty$, то $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{r^\rho} < +\infty$. Действительно, в этом случае $n_p - n_{p-1} \leqslant d n_{p-1}^{1-1/\rho}$ $(p \in \boldsymbol{Z}_+)$, $0 < d < \infty$, $C_p \leqslant \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) n_p \ln n_p + n_p \ln d$, $\ln n_p - \frac{C_p}{n_p} \geqslant - \frac{1}{\rho} \ln n_p - \ln d$ и из (4), используя формулу Адамара для нахождения типа, имеем

$$\sigma = \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n_p + m}{e\rho} |a_{n_p+m}|^{\frac{\rho}{n_p+m}} \leqslant K \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n_{p+1}}{n_p} < \infty,$$

где K — некоторая положительная постоянная.

Замечание 2. Теорему 2 можно перенести на случай обобщенного порядка $\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, \alpha(\ln M(r, f))/\beta(\ln r)$.

Пусть L^0 — класс положительных возрастающих к $+\infty$ непрерывно дифференцируемых на $[a, +\infty)$ функций α таких, что $\alpha(x(1 + o(1))) \sim \alpha(x)$ $(x \to +\infty)$. Скажем, что $\alpha \in \Lambda^0$, если $\alpha \in L^0$ и $\alpha(cx) \sim$

$\sim\alpha(x)$ $(x\to+\infty)$ для каждого c, $0<c<+\infty$. Известно [2], что если $\alpha\in\Lambda^0$, $\beta\in L^0$ и

$$\frac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d\ln x}=O(1)\ (x\to+\infty),\ 0<c<+\infty, \tag{7}$$

то

$$\rho_{\alpha\beta}(f)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha(n)/\beta\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right). \tag{8}$$

Обозначим теперь $q_{\alpha\beta}=\overline{\lim_{p\to\infty}}\,\alpha(n_p)/\beta(\ln\{1/(n_p/n_{p-1})\})$. Тогда, используя (4) и (9), нетрудно доказать следующее утверждение: если $\alpha\in\Lambda^0$, $\beta\in L^0$, выполнены условие (7) и условия теоремы 2, то $\rho_{\alpha\beta}(f)\leqslant q_{\alpha\beta}$.

Список литературы: 1. *Гольдберг А. А., Шеремета М. Н.* Об аналитическом продолжении на всю плоскость аналитических в круге функций // См. статью в настоящем сборнике. 2. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Сер. мат. 1967. № 2. С. 100—108.

Поступила в редколлегию 08.08.91