Изслѣдованіе дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія.

22. Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad \textbf{(13)}$$

суть предложенныя дифференціальныя уравненія возмущеннаго движенія.

Здѣсь всѣ X_s означаютъ данныя голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, разложенія которыхъ

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

по цѣлымъ положительнымъ степенямъ послѣднихъ не содержатъ членовъ ниже второго измѣренія, а коэффиціенты

$$p_{s\sigma}, \qquad P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$$

суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя.

Независимую перемѣнную t, пока не встрѣтится надобности разсматривать комплексныя ея значенія, будемъ по прежнему считать вещественною.

Отбрасывая въ уравненіяхъ (13) всѣ члены выше перваго измѣренія, получимъ систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, соотвѣтствующую первому приближенію. Составляя для послѣдней опредѣляющее уравненіе, мы будемъ говорить, что это есть опредѣляющее уравненіе, соотвѣтствующее системѣ (13).

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть всѣ корни этого уравненія.

Интегрируя систему (13) по способу, изложенному въ параграфѣ 3емъ, получимъ для функцій x_s ряды

$$x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + x_s^{(3)} + \ldots, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

mые члены которыхъ будутъ слѣдующаго вида

$$x_s^{(m)} = \sum T_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n)t}. \quad \textbf{(14)}$$

Здѣсь суммированіе распространено на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа m_1, $m_2, \ldots, m_n$, удовлетворяющія условію

$$0 < m_1 + m_2 + \ldots + m_n \leqq m,$$

а коэффиціенты T (цѣлые и однородные $m^{\text{ой}}$ степени относительно постоянныхъ произвольныхъ) суть или постоянныя величины, или цѣлыя функціи t, степени которыхъ не превосходятъ нѣкотораго предѣла, зависящаго отъ m *).

Коэффиціенты этого второго рода будемъ называть *вѣковыми.* Такъ же будемъ называть и члены, въ которыхъ они встрѣчаются, когда соотвѣтствующія этимъ членамъ числа

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n$$

равны нулю или суть чисто мнимыя.

Если отбросить введенное въ параграфѣ $3^{\text{емъ}}$ условіе, чтобы всѣ функціи $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m > 1$, обращались въ нуль для одного и того-же даннаго значенія t, то вычисленіе можно вести такимъ образомъ, чтобы выраженія (14) для функцій $x_s^{(m)}$ выходили *однородными* $m^{\text{ой}}$ степени относительно показательныхъ функцій:

$$e^{\varkappa_1 t}, \quad e^{\varkappa_2 t}, \ldots, \quad e^{\varkappa_n t}. \tag{15}$$

При этомъ коэффиціентамъ T можно придать видъ:

$$T_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = K_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_n^{m_n},$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть постоянныя произвольныя, отъ которыхъ не зависятъ коэффиціенты K, представляющіе или постоянныя величины, или цѣлыя функціи t.

Тогда, дѣлая нѣкоторыя изъ постоянныхъ α_s нулями, получимъ ряды, въ которыхъ будутъ фигурировать не всѣ, а только нѣкоторыя изъ функцій (15).

Однако, если желательно, чтобы получаемые ряды по крайней мѣрѣ въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣняемости t при достаточно малыхъ $|\alpha_s|$ были навѣрно сходящимися, то вообще вести вычисленія такимъ образомъ можно только до нѣкотораго (впрочемъ совершенно произвольно выбраннаго) предѣла $m = N$, а для $m > N$ должно возвратиться къ гипотезѣ параграфа $3^{\text{яго}}$. При этомъ въ выраженіяхъ функцій $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m > N$, вновь появятся вообще всѣ показательныя функціи (15), и относительно послѣднихъ выраженія эти утратятъ однородность.

Случаи, въ которыхъ можно не назначать никакого предѣла N, представляютъ особенный интересъ. Нѣкоторые изъ этихъ случаевъ, наиболѣе важные для нашей задачи, укажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Должно замѣтить, что условіе, чтобы всѣ $x_s^{(m)}$ были однородными относительно величинъ (15), не всегда вполнѣ опредѣляетъ постоянныя, вводимыя интегрированіемъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ функціи $x_s^{(m)}$, соотвѣтствующія $m > 1$. Въ такихъ случаяхъ остается еще извѣстное число постоянныхъ, которыми можно распорядиться по произволу.

---

*) Нетрудно убѣдиться, что степени эти не превосходятъ числа

$$(2\mu + 1)m - \mu - 1,$$

если μ есть наибольшая изъ этихъ степеней для $m = 1$.

Пусть составляются ряды, въ которыхъ должны фигурировать показательныя функціи, соотвѣтствующія какимъ-либо k корнямъ

$$\varkappa_1\,,\quad \varkappa_2\,,\,\ldots\,,\quad \varkappa_k \tag{16}$$

опредѣляющаго уравненія.

Легко убѣдиться, что если при этомъ вѣковые коэффиціенты не входятъ ни въ одно изъ $m-1$ первыхъ приближеній:

$$x_s^{(1)}+x_s^{(2)}+\ldots+x_s^{(\mu)}\,,\qquad \left(\begin{matrix}\mu=1,\,2,\,\ldots,\,m-1\\ s=1,\,2,\,\ldots,\,n\end{matrix}\right)$$

и если выборомъ цѣлыхъ неотрицательныхъ чиселъ $m_1\,,\,m_2\,,\,\ldots\,,\,m_k\,,$ удовлетворяющихъ условію

$$m_1+m_2+\ldots+m_k=m\,,$$

нельзя удовлетворить никакому соотношенію вида

$$m_1\varkappa_1+m_2\varkappa_2+\ldots+m_k\varkappa_k=\varkappa_s\,,\qquad (s=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

то такіе коэффиціенты не войдутъ и въ m^{oe} приближеніе.

Поэтому, если всѣ корни (16) обладаютъ вещественными частями одного и тогоже знака, то отсутствіе или существованіе въ разсматриваемыхъ рядахъ вѣковыхъ коэффиціентовъ всегда можетъ быть обнаружено при помощи конечнаго числа элементарныхъ алгебраическихъ дѣйствій *).

Далѣе мы будемъ часто разсматривать не самыя уравненія (13), а различныя ихъ преобразованія при помощи линейныхъ подстановокъ съ постоянными коэффиціентами **), руководствуясь при выборѣ этихъ подстановокъ тѣмъ соображеніемъ, чтобы въ преобразованныхъ уравненіяхъ совокупности членовъ перваго порядка принимали частный видъ, возможно болѣе облегчающій изслѣдованіе. Таковы подстановки, разсмотрѣнныя въ параграфѣ 18$^{\text{омъ}}$.

Мы встрѣтимся съ вопросами, для которыхъ вещественность коэффиціентовъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ не будетъ имѣть существеннаго значенія. Въ такихъ случаяхъ при помощи сказанныхъ подстановокъ можно будетъ преобразовывать уравненія (13) къ виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=\varkappa_1 z_1+Z_1\,,\\ \frac{dz_s}{dt}&=\varkappa_s z_s+\sigma_{s-1}z_{s-1}+Z_s\,,\\ &\qquad (s=2,\,3,\,\ldots,\,n)\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

---

*) Каждую изъ системъ уравненій, опредѣляющихъ функціи $x_s^{(m)}$, для которыхъ $m>1$, мы можемъ интегрировать по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Тогда все дѣло будетъ сводиться каждый разъ на рѣшеніе нѣкоторыхъ системъ алгебраическихъ уравненій первой степени.

**) Мы будемъ разсматривать конечно только такія подстановки, при которыхъ можно выражать по произволу какъ новыя перемѣнныя черезъ прежнія, такъ и прежнія черезъ новыя.

гдѣ Z_j суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $z_1, z_2, \ldots, z_n$, разложенія которыхъ по степенямъ послѣднихъ начинаются членами не ниже второго порядка и обладаютъ постоянными коэффиціентами; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ суть корни опредѣляющаго уравненія, соотвѣтствующаго системѣ (13), а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ нѣкоторыя постоянныя, которыя въ случаѣ, когда всѣ $\varkappa_j$ различны, можно предполагать равными нулю.

23. Допустимъ, что составлены ряды, формально удовлетворяющіе уравненіямъ (13), и что ряды эти, расположенные по восходящимъ степенямъ k постоянныхъ произвольныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, содержатъ показательныя функціи, соотвѣтствующія k корнямъ

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k \tag{18}$$

опредѣляющаго уравненія.

Пусть эти ряды суть слѣдующіе:

$$x_s = \sum K_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} e^{(m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_k\varkappa_k)t}, \quad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

гдѣ коэффиціенты K не зависятъ отъ величинъ α_j и представляютъ или постоянныя величины, или цѣлыя функціи t. При томъ суммированіе распространено на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$, сумма которыхъ не менѣе 1.

Эти ряды представятъ нѣкоторый частный случай рядовъ (25), разсмотрѣнныхъ въ параграфѣ 11омъ.

Изъ теоремы параграфа 12аго для рядовъ (19) выводится слѣдующее предложеніе:

Теорема. — *Пусть разсматриваемые корни (18) обладаютъ отличными отъ нуля вещественными частями*

$$-\lambda_1, \quad -\lambda_2, \ldots, -\lambda_k,$$

которыя при томъ всѣ одного и того-же знака.

Выберемъ какую-либо вещественную постоянную τ и будемъ разсматривать только значенія t, удовлетворяющія условію:

$$\pm(t-\tau) \geqq 0, \tag{20}$$

гдѣ верхній знакъ относится къ случаю, когда всѣ λ_j $(j=1, 2, \ldots, k)$ положительны, а нижній къ тому, когда всѣ λ_j отрицательны. Тогда, если, разумѣя подъ ε нѣкоторое вещественное число того-же знака, что и всѣ λ_j (которое въ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты K въ рядахъ (19) суть постоянныя величины, можно предполагать и нулемъ), сдѣлаемъ

$$\alpha_j e^{(\varkappa_j + \varepsilon)t} = q_j, \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

и исключеніемъ постоянныхъ α_j изъ рядовъ (19) выведемъ новые:

$$x_s = \sum Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_k)} q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots q_k^{m_k}, \quad (s=1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

расположенные по восходящимъ степенямъ величинъ q_j, то при всякихъ τ и ε найдемъ такую положительную постоянную q, что ряды (21) будутъ абсолютно сходящимися *для всякихъ* q_j, *модули которыхъ не превосходятъ* q, *и при томъ — въ равной степени для всѣхъ значеній* t, *удовлетворяющихъ условію (20).*

Допустимъ сначала, что всѣ λ_j положительны.

Тогда, если $\tau = 0$, то это предложеніе будетъ непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы параграфа 12$^{\underline{аго}}$, ибо величины q_j, разсматриваемыя нами теперь, отличаются отъ тѣхъ, съ которыми мы имѣли дѣло въ этомъ параграфѣ, только множителями, модули которыхъ равны 1.

Въ случаѣ-же, когда τ не нуль, разсматриваемое предложеніе докажемъ, если теорему параграфа 12$^{\underline{аго}}$ приложимъ вмѣсто рядовъ (19) къ тѣмъ, которые изъ нихъ выводятся замѣною

$$t \quad \text{черезъ} \quad t+\tau,$$
$$\alpha_j \quad \text{»} \quad \alpha_j e^{-(\varkappa_j+\varepsilon)\tau} \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

[и слѣдовательно также формально удовлетворяютъ уравненіямъ (13)]. Дѣйствительно, въ рядахъ (21), соотвѣтствующихъ этимъ новымъ рядамъ, коэффиціенты Q будутъ выводиться изъ прежнихъ замѣною t черезъ $t+\tau$.

Если-бы всѣ λ_j были отрицательными, то мы убѣдились бы въ справедливости теоремы, приводя этотъ случай къ предыдущему. Для этого стоило бы только въ рядахъ (19) и въ уравненіяхъ (13) замѣнить t черезъ $-t$.

Что касается возможности предположенія $\varepsilon = 0$, когда всѣ коэффиціенты K суть постоянныя величины, то она очевидна безъ какихъ-либо разъясненій.

Изъ разсматриваемой теоремы въ силу соображеній извѣстнаго характера (стр. 12) слѣдуетъ, что всякій разъ, когда корни (18), взятые нами для составленія рядовъ (19), имѣютъ вещественныя части одного и того-же знака, этими рядами опредѣляется нѣкоторое рѣшеніе системы уравненій (13) или для всякаго t, бóльшаго нѣкотораго предѣла, если вещественныя части корней (18) всѣ отрицательны, или для всякаго t, меньшаго нѣкотораго предѣла, если эти вещественныя части всѣ положительны. Прѣдѣлы-же эти зависятъ отъ постоянныхъ α_s такъ, что выборомъ достаточно малыхъ $|\alpha_s|$ ихъ можно сдѣлать какими угодно.

Эти рѣшенія будутъ содержать k постоянныхъ произвольныхъ, и число послѣднихъ не приведется къ меньшему, если для составленія рядовъ (19) были взяты k *независимыхъ* рѣшеній

$$\begin{array}{llll}
K_1^{(1,0,\ldots,0)}e^{\varkappa_1 t}, & K_2^{(1,0,\ldots,0)}e^{\varkappa_1 t}, & \ldots, & K_n^{(1,0,\ldots,0)}e^{\varkappa_1 t}, \\
K_1^{(0,1,\ldots,0)}e^{\varkappa_2 t}, & K_2^{(0,1,\ldots,0)}e^{\varkappa_2 t}, & \ldots, & K_n^{(0,1,\ldots,0)}e^{\varkappa_2 t}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
K_1^{(0,0,\ldots,1)}e^{\varkappa_k t}, & K_2^{(0,0,\ldots,1)}e^{\varkappa_k t}, & \ldots, & K_n^{(0,0,\ldots,1)}e^{\varkappa_k t}
\end{array}$$

системы дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія.

Говоря о такихъ рѣшеніяхъ, это условіе всегда будемъ предполагать.

Въ случаѣ, когда вещественныя части *всѣхъ* корней опредѣляющаго уравненія отличны отъ нуля и при томъ одинаковаго знака, мы можемъ сдѣлать $k=n$, и тогда рядами (19) при только-что сказанномъ условіи будетъ опредѣляться общій интегралъ системы уравненій (13).

Примѣчаніе. — Если предположимъ, что имѣетъ мѣсто этотъ послѣдній случай, то составляя ряды (19), соотвѣтствующіе $k=n$, можемъ вывести изъ нихъ n независимыхъ интеграловъ системы (13) вида:

$$e^{-\varkappa_s t}\sum L_s^{(m_1,\, m_2,\, \ldots\, ,\, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \qquad (s=1,\,2,\,\ldots\,,\,n) \qquad (22)$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ цѣлыя неотрицательныя числа m_1, m_2, ..., m_n, сумма которыхъ не менѣе 1, и гдѣ коэффиціенты L суть или постоянныя величины, или цѣлыя функціи t, степени которыхъ въ членахъ какого угодно порядка m не превосходятъ нѣкотораго числа, извѣстнымъ образомъ зависящаго отъ m. Въ членахъ перваго порядка наивысшая изъ этихъ степеней всегда будетъ равна наивысшей изъ степеней коэффиціентовъ K въ членахъ того-же порядка разложеній (19).

Входящіе сюда ряды будутъ абсолютно сходящимися при всякомъ данномъ t, пока модули величинъ x_s не превосходятъ нѣкотораго предѣла. Послѣдній-же всегда отличенъ отъ нуля, но можетъ имѣть нуль предѣломъ, когда $|t|$ безпредѣльно возрастаетъ.

Особенный интересъ представляетъ случай, когда всѣ коэффиціенты L суть постоянныя величины. Для того, чтобы онъ имѣлъ мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы и всѣ коэффиціенты K въ рядахъ (19) были постоянными.

Какъ уже было замѣчено въ предыдущемъ параграфѣ, при разсматриваемыхъ здѣсь условіяхъ всегда легко узнать, имѣемъ ли мы дѣло съ этимъ случаемъ.

Для возможности этого случая конечно необходимо или, чтобы опредѣляющее уравненіе не имѣло кратныхъ корней, или, чтобы при существованіи такихъ корней каждый изъ нихъ обращалъ въ нуль всѣ миноры основного опредѣлителя до наивысшаго возможнаго порядка.

Допустимъ, что это условіе выполнено. Тогда, если еще выполнено условіе, чтобы при цѣлыхъ неотрицательныхъ m_1, m_2, ..., m_n, сумма которыхъ болѣе 1, между корнями $\varkappa_s$ не существовало никакихъ соотношеній вида

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_n\varkappa_n = \varkappa_j, \qquad (j=1,\,2,\,\ldots\,,\,n) \qquad (23)$$

то мы можемъ быть увѣрены, что всѣ коэффиціенты K и L будутъ постоянными.

Во всякомъ случаѣ, когда всѣ коэффиціенты L суть постоянныя величины, мы получимъ для системы дифференціальныхъ уравненій, выводимой изъ (13) исключеніемъ dt, слѣдующую систему интегральныхъ уравненій:

$$\left(\frac{\varphi_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa_1}} = \left(\frac{\varphi_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa_2}} = \ldots = \left(\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\varkappa_n}}, \qquad (24)$$

гдѣ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ суть голоморфныя функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, опредѣляемыя рядами, которые входятъ, какъ вторые множители, въ интегралы (22).

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ какое-либо изъ уравненій вида

$$\varphi_s = \alpha_s e^{\varkappa_s t}.$$

и предполагая, что перемѣнной t даются только значенія или бо́льшія нѣкотораго предѣла (зависящаго отъ постоянныхъ α_j), или напротивъ меньшія нѣкотораго предѣла, смотря по тому, отрицательны или положительны вещественныя части всѣхъ $\varkappa_j$, получимъ полную систему интегральныхъ уравненій для системы (13).

Результатъ, къ которому мы пришли, представляетъ теорему, доказанную M. Poincaré въ его диссертаціи (thèse) *Sur les propriétés des fonctions définies par les équationts aux différences partielles* (Paris, Gauthier-Villars, 1879; page 70) *).

Дѣлая извѣстныя предположенія **) [и между прочимъ — что корни $\varkappa_s$ не удовлетворяютъ никакимъ соотношеніямъ вида (23)], M. Poincaré доказываетъ существованіе интегральныхъ уравненій вида (24), не переходя предварительно черезъ уравненія (19). А именно, онъ выводитъ ихъ, разсматривая уравненія въ частныхъ производныхъ

$$\sum_{j=1}^{n} (p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \ldots + p_{jn}x_n + X_j)\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_j} = \varkappa_s\varphi_s \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

и показывая, что при извѣстныхъ условіяхъ послѣднимъ удовлетворяютъ нѣкоторыя голоморфныя функціи φ_s перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

24. Изъ теоремы предыдущаго параграфа или непосредственно изъ теоремъ параграфа 13<u>аго</u> могутъ быть выведены слѣдующія:

Теорема I. — *Когда опредѣляющее уравненіе, соотвѣтствующее системѣ дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія, имѣетъ только корни съ отрицательными вещественными частями, невозмущенное движеніе устойчиво, и при томъ такъ, что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.*

Теорема II. — *Когда опредѣляющее уравненіе имѣетъ корни съ отрицательными вещественными частями, то каковы бы ни были остальные его корни, для невозмущеннаго движенія будетъ существовать извѣстная условная устойчивость. А именно, въ*

*) По поводу этой теоремы M. Poincaré замѣчаетъ, что она была сообщена ему M. Darboux.

**) Вмѣсто нашего предположенія, что вещественныя части всѣхъ корней $\varkappa_s$ одного и того же знака, M. Poincaré дѣлаетъ болѣе общее, а именно, что точки координатной плоскости, изображающія эти корни, лежатъ всѣ по одну сторону нѣкоторой прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Но если разсматривать не самыя величины $\varkappa_s$, а только отношенія между ними [что именно и нужно для уравненій (24)], то послѣднее предположеніе не будетъ существенно отличаться отъ перваго.

случаѣ существованія k такихъ корней, движеніе это будетъ устойчивымъ для возмущеній, подчиненныхъ нѣкоторымъ $n-k$ уравненіямъ вида

$$F_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \qquad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,\ldots,\,n-k)}$$

въ которыхъ F_j суть голоморфныя функціи начальныхъ значеній a_s функцій x_s, обращающіяся въ нуль, когда всѣ a_s дѣлаются нулями, и которыя позволяютъ выражать всѣ эти значенія, какъ голоморфныя функціи k независимыхъ величинъ.

Въ дополненіе къ этимъ теоремамъ докажемъ теперь слѣдующую:

Теорема III. — *Когда между корнями опредѣляющаго уравненія находятся такіе, вещественныя части которыхъ положительны, невозмущенное движеніе неустойчиво.*

Допустимъ сначала, что въ числѣ корней этого уравненія находятся положительные.

Если такихъ корней существуетъ нѣсколько, то пусть $\varkappa$ есть наибольшій изъ нихъ. Тогда $m\varkappa$ при $m > 1$ навѣрно не будетъ корнемъ опредѣляющаго уравненія. А потому, если составимъ ряды (19), соотвѣтствующіе только одному корню $\varkappa$ и содержащіе одну произвольную постоянную α, принимая за первое приближеніе рѣшеніе

$$x_1^{(1)} = K_1\alpha e^{\varkappa t}, \quad x_2^{(1)} = K_2\alpha e^{\varkappa t}, \ldots, x_n^{(1)} = K_n\alpha e^{\varkappa t}$$

системы (1), въ которомъ всѣ K_s суть постоянныя величины, то въ рядахъ (19) всѣ коэффиціенты K навѣрно будутъ постоянными.

При томъ мы можемъ и будемъ предполагать эти коэффиціенты отъ α независящими и вещественными.

Пусть

$$x_1 = f_1(\alpha e^{\varkappa t}), \quad x_2 = f_2(\alpha e^{\varkappa t}), \ldots, x_n = f_n(\alpha e^{\varkappa t})$$

есть найденное такимъ образомъ рѣшеніе системы (13).

Здѣсь всѣ f_s суть голоморфныя функціи аргумента $\alpha e^{\varkappa t}$, обращающіяся въ нуль, когда послѣдній дѣлается нулемъ, и для вещественныхъ его значеній сохраняющія вещественныя значенія.

Этому рѣшенію при вещественномъ α будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое дѣйствительное движеніе, и послѣднее будетъ опредѣляться имъ, пока числовая величина $\alpha e^{\varkappa t}$ остается достаточно малою для того, чтобы ряды, которыми выражаются функціи f_s, были абсолютно сходящимися, а числовыя величины ихъ суммъ не превосходили нѣкотораго предѣла.

Пусть это имѣетъ мѣсто, пока

$$|\alpha e^{\varkappa t}| \leqq l,$$

гдѣ l нѣкоторая независящая отъ α положительная постоянная.

Тогда нашимъ рѣшеніемъ, при всякомъ данномъ отличномъ отъ нуля вещественномъ α, будетъ опредѣляться нѣкоторое возмущенное движеніе для всѣхъ значеній t, не превосходящихъ слѣдующаго предѣла:

$$\tau = \frac{1}{\varkappa} \log \frac{l}{|\alpha|}.$$

Такимъ образомъ, если $|\alpha|$ достаточно мало для того, чтобы предѣлъ этотъ былъ болѣе начальнаго значенія t, мы получаемъ возмущенное движеніе, за которымъ можемъ слѣдить отъ начальнаго момента до момента, когда $t = \tau$.

Это движеніе таково, что соотвѣтствующія ему начальныя значенія функцій x_s при $|\alpha|$ достаточно маломъ дѣлаются всѣ сколь угодно численно малыми, а значенія тѣхъ же функцій для $t = \tau$

$$x_1 = f_1(\pm l), \quad x_2 = f_2(\pm l), \quad \ldots, \quad x_n = f_n(\pm l),$$

между которыми навѣрно находятся отличныя отъ нуля *), не зависятъ отъ численной величины α.

Мы должны поэтому заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Допустимъ теперь, что опредѣляющее уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней, но имѣетъ комплексные корни съ положительными вещественными частями.

Выбираемъ изъ нихъ два сопряженныхъ

$$\varkappa_1 = \lambda + \mu\sqrt{-1}, \quad \varkappa_2 = \lambda - \mu\sqrt{-1}$$

съ наибольшею вещественною частью λ.

Такъ какъ выраженія вида

$$m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 = (m_1 + m_2)\lambda + (m_1 - m_2)\mu\sqrt{-1}$$

при вещественныхъ m_1 и m_2, удовлетворяющихъ условію $m_1 + m_2 > 1$, навѣрно не будутъ корнями опредѣляющаго уравненія, то для системы (13) найдется рѣшеніе, соотвѣтствующее корнямъ $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, съ двумя постоянными произвольными α_1 и α_2, для котораго въ рядахъ (19) всѣ коэффиціенты K будутъ постоянными.

Пусть это рѣшеніе опредѣляется уравненіями:

$$x_s = f_s(\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}, \alpha_2 e^{\varkappa_2 t}), \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

гдѣ f_s суть голоморфныя функціи аргументовъ $\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}$ и $\alpha_2 e^{\varkappa_2 t}$, обращающіяся въ нуль, когда послѣдніе оба дѣлаются нулями.

Мы можемъ функціи f_s предположить такими, чтобы каждая изъ функцій

$$f_s(\xi + \eta\sqrt{-1}, \ \xi - \eta\sqrt{-1}) \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

при вещественныхъ ξ и η была вещественною.

---

*) Если значенія функцій x_s, соотвѣтствующія какому-либо t, всѣ равны нулю, то функціи эти необходимо равны нулю для всякаго t (см. сноску на стр. 45). А мы предполагаемъ, конечно, что между функціями f_s существуютъ неравныя нулю тожественно.

Тогда при всякихъ комплексныхъ сопряженныхъ α_1 и α_2 разсматриваемому рѣшенію будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое дѣйствительное движеніе, опредѣляемое имъ по крайней мѣрѣ для значеній t, удовлетворяющихъ нѣкоторымъ неравенствамъ вида

$$|\alpha_1 e^{\varkappa_1 t}| \leqq l, \qquad |\alpha_2 e^{\varkappa_2 t}| \leqq l,$$

гдѣ l означаетъ постоянное положительное число, не зависящее отъ α_1 и α_2.

Пусть α есть общій модуль послѣднихъ.

Разумѣя подъ i $\sqrt{-1}$, положимъ

$$\alpha_1 = \alpha e^{i\beta}, \qquad \alpha_2 = \alpha e^{-i\beta},$$

и приписывая α только отличныя отъ нуля значенія, между α и β поставимъ зависимость:

$$\beta = -\frac{\mu}{\lambda} \log \frac{l}{\alpha}.$$

Тогда, при α достаточно маломъ, нашимъ рѣшеніемъ будетъ опредѣляться возмущенное движеніе, соотвѣтствующее возмущеніямъ, сколь угодно численно малымъ, для котораго въ нѣкоторый моментъ

$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{l}{\alpha},$$

слѣдующій за начальнымъ, функціи x_s будутъ достигать значеній

$$x_s = f_s(l, l), \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

отъ α не зависящихъ.

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы должны поэтому заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Такимъ образомъ теорему нашу можемъ считать доказанной. *)

25. Изъ доказаннаго выводится нѣкоторое дополненіе къ теоремѣ Лагранжа объ устойчивости равновѣсія при силахъ, имѣющихъ силовую функцію.

Теорема эта, какъ извѣстно, даетъ условіе, достаточное для устойчивости, которое состоитъ въ томъ, что силовая функція должна въ положеніи равновѣсія достигать наибольшаго значенія.

Но констатируя достаточность этого условія, она не позволяетъ дѣлать какихъ-либо заключеній о его необходимости.

---

*) Эта теорема была доказана мною такимъ же образомъ въ статьѣ *О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости* (Сообщ. Харьк. Матем. Общ., 2 серія, томъ I, 1888). Въ этой статьѣ, показывая, что при извѣстныхъ условіяхъ для дифференціальныхъ уравненій возмущеннаго движенія возможны рѣшенія вида (19), я не упомянулъ о цитированномъ выше сочиненіи M. Poincaré (стр. 79), потому что послѣднее въ то время мнѣ было неизвѣстно.

Поэтому является вопросъ, будетъ ли положеніе равновѣсія неустойчивымъ, если для него силовая функція не есть maximum?

Поставленный въ общей формѣ, вопросъ этотъ не рѣшенъ и по настоящее время. Но при нѣкоторыхъ допущеніяхъ довольно общаго характера на него можно дать опредѣленный отвѣтъ, ибо изъ послѣдней теоремы предыдущаго параграфа при извѣстныхъ условіяхъ выводится предложеніе, обратное Лагранжеву. Условія эти при томъ суть тѣ, съ которыми всего чаще приходится имѣть дѣло въ приложеніяхъ.

Пусть

$$q_1, \quad q_2, \quad \cdots, \quad q_k$$

суть независимыя перемѣнныя, опредѣляющія положеніе разсматриваемой матерьяльной системы.

Мы будемъ предполагать ихъ выбранными такъ, чтобы для изслѣдуемаго положенія равновѣсія онѣ всѣ дѣлались нулями.

Силовая функція U можетъ зависѣть отъ всѣхъ этихъ перемѣнныхъ или только отъ нѣкоторыхъ изъ нихъ. Допустимъ, что она зависитъ только отъ m слѣдующихъ:

$$q_1, \quad q_2, \quad \cdots, \quad q_m. \tag{25}$$

Будемъ предполагать при томъ, что она есть голоморфная функція этихъ послѣднихъ.

Живую силу нашей системы, которая будетъ нѣкоторою квадратичною формою производныхъ

$$q_1', \quad q_2', \quad \cdots, \quad q_k'$$

величинъ q_j по t съ коэффиціентами, зависящими отъ этихъ величинъ, будемъ предполагать также голоморфною по отношенію къ послѣднимъ.

При нашемъ допущеніи относительно силовой функціи, разсматриваемое положеніе равновѣсія будетъ однимъ изъ серіи безчисленнаго множества положеній равновѣсія, для которыхъ величины

$$q_{m+1}, \quad q_{m+2}, \quad \cdots, \quad q_k$$

могутъ имѣть какія угодно постоянныя значенія, а величины (25) всѣ равны нулю.

Если бы U, какъ функція m независимыхъ перемѣнныхъ (25), при

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0$$

обращалась въ maximum, то по теоремѣ Лагранжа каждое изъ этихъ положеній равновѣсія было бы по отношенію къ величинамъ (25) устойчивымъ.

Допустимъ теперь, что при одновременномъ равенствѣ этихъ величинъ нулю силовая функція не дѣлается maximum.

Нетрудно показать, что *если это обстоятельство обнаруживается уже тѣмъ, что совокупность членовъ второго измѣренія въ ея разложеніи по степенямъ величинъ* q_j *мо-*

жетъ получать положительныя значенія, то какъ разсматриваемое положеніе равновѣсія, такъ и всѣ, достаточно близкія къ нему изъ означенной выше серіи, будутъ неустойчивыми, и неустойчивость при томъ будетъ имѣть мѣсто уже по отношенію къ величинамъ (25).

Дѣйствительно, изъ теоріи малыхъ колебаній извѣстно, что при сказанномъ сейчасъ условіи опредѣляющее уравненіе всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный корень. Поэтому, по предыдущему, неустойчивость навѣрно будетъ имѣть мѣсто по крайней мѣрѣ по отношенію къ нѣкоторымъ изъ $2k$ слѣдующихъ величинъ:

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots, \quad q_k, \quad q_1', \quad q_2', \quad \ldots, \quad q_k'.$$

Остается показать, что она имѣетъ мѣсто по отношенію къ m первымъ изъ нихъ.

Для этого, означая черезъ $\varkappa$ наибольшій изъ положительныхъ корней опредѣляющаго уравненія, разсматриваемъ соотвѣтствующее ему рѣшеніе

$$q_1 = f_1(\alpha e^{\varkappa t}), \qquad q_2 = f_2(\alpha e^{\varkappa t}), \qquad \ldots, \qquad q_k = f_k(\alpha e^{\varkappa t})$$

дифференціальныхъ уравненій движенія, того типа, который разсматривался при доказательствѣ теоремы III.

Наше предложеніе, очевидно, будетъ доказано, если покажемъ, что между функціями

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_m$$

находятся неравныя нулю тожественно (мы предполагаемъ, конечно, что функціи $f_1, f_2, \ldots, f_k$ не всѣ тожественно равны нулю).

Но это обстоятельство обнаруживается тотчасъ же, ибо для всякаго движенія (если только такія движенія возможны), въ которомъ величины (25) всѣ тожественно равны нулю, уравненіе живой силы дастъ для послѣдней постоянную и, конечно, отличную отъ нуля величину, между тѣмъ какъ для рѣшенія разсматриваемаго типа живая сила съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ $-t$ должна приближаться къ предѣлу, равному нулю.

Возможны, конечно, случаи, когда отсутствіе maximum'а силовой функціи констатируется только при разсмотрѣніи членовъ выше второго измѣренія. Теорема III тогда не можетъ служить для доказательства неустойчивости.

Одинъ изъ такихъ случаевъ, въ которомъ неустойчивость доказывается на основаніи нѣкоторой общей теоремы другого рода, былъ указанъ въ параграфѣ 16омъ (примѣръ 2).

26. Теоремы, формулированныя въ параграфѣ 24омъ, были нами выведены изъ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ рядовъ, удовлетворяющихъ дифференціальнымъ уравненіямъ возмущеннаго движенія. Но I и III изъ этихъ теоремъ легко доказываются и безъ помощи этихъ рядовъ, для чего можно воспользоваться, какъ теперь покажемъ, общими предложеніями параграфа 16аго.

Допустимъ, что опредѣляющее уравненіе системы (13) имѣетъ только корни съ отрицательными вещественными частями.

Мы знаемъ, что при этомъ условіи всегда найдется квадратичная форма V перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющая уравненію

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \tag{26}$$

и слѣдовательно такая, что ея полная производная по t

$$\frac{dV}{dt} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

составленная на основаніи уравненій (13), представитъ функцію опредѣленно-положительную. Мы знаемъ также, что форма эта будетъ опредѣленно-отрицательною (пар. 20, теоремы I и II).

Мы можемъ такимъ образомъ найти функцію V, удовлетворяющую всѣмъ условіямъ теоремы I параграфа 16$^{\text{аго}}$.

Наша форма, представляя такую функцію, будетъ удовлетворять при томъ и условіямъ предложенія, на которое было указано въ примѣчаніи 2$^{\text{омъ}}$ къ этой теоремѣ.

Мы должны поэтому заключить, что невозмущенное движеніе устойчиво, и что всякое возмущенное движеніе, для котораго возмущенія численно достаточно малы, будетъ асимптотически приближаться къ невозмущенному.

Допустимъ теперь, что въ числѣ корней опредѣляющаго уравненія находятся такіе, вещественныя части которыхъ положительны.

Если при этомъ опредѣлитель $D_2(0)$ (пар. 19) не равенъ нулю, то по прежнему найдется квадратичная форма V, удовлетворяющая уравненію (26); но форма эта при разсматриваемомъ теперь допущеніи будетъ такою, что надлежащимъ выборомъ вещественныхъ значеній величинъ x_s ее всегда можно будетъ сдѣлать положительною (пар. 20, теор. III). Поэтому, обладая опредѣленно-положительною производною, она будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ теоремы II параграфа 16$^{\text{аго}}$.

Мы должны такимъ образомъ заключить, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Если $D_2(0) = 0$, то вмѣсто уравненія (26) мы возьмемъ слѣдующее:

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = \lambda V + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \tag{27}$$

разумѣя подъ λ нѣкоторую положительную постоянную.

Предполагая, что постоянная эта не есть корень уравненія $D_2(\varkappa) = 0$, всегда найдемъ квадратичную форму V, удовлетворяющую уравненію (27). Но удовлетворяя послѣднему, форма эта необходимо будетъ удовлетворять также слѣдующему:

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + \left(p_{ss} - \frac{\lambda}{2}\right)x_s + \cdots + p_{sn}x_n\right\}\frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

А это уравненіе выводится изъ (26) замѣною величинъ p_{ss} величинами $p_{ss} - \frac{\lambda}{2}$, и потому къ нему могутъ быть приложены всѣ теоремы параграфа 20$^{\underline{аго}}$, если только вмѣсто корней опредѣляющаго уравненія системы (13) разсматривать корни уравненія

$$D\left(\frac{\lambda}{2} + \varkappa\right) = 0 .$$

Вслѣдствіе этого, если допустимъ, что постоянная λ достаточно мала для того, чтобы уравненію этому можно было удовлетворить величиною $\varkappa$ съ положительною вещественною частью, то можемъ быть увѣрены, что форма V будетъ способною принимать положительныя значенія.

Но тогда форма V, полная производная которой по t приводится къ виду

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

будетъ удовлетворять всѣмъ условіямъ теоремы III параграфа 16$^{\underline{аго}}$.

Мы заключимъ поэтому, что невозмущенное движеніе неустойчиво.

Примѣчаніе. — Предыдущія доказательства приложимы, конечно, не къ одному только случаю установившихся движеній, ибо предположеніе, что коэффиціенты $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$, входящіе въ разложенія функцій X_s, суть постоянныя величины, не играло въ нихъ никакой роли. Коэффиціенты эти могли быть функціями t, и для справедливости предыдущихъ выводовъ необходимо только, чтобы эти функціи удовлетворяли общимъ условіямъ, поставленнымъ въ началѣ параграфа 11$^{\underline{аго}}$.

Поэтому анализъ нашъ приводитъ между прочимъ къ теоремѣ, представляющей нѣкоторое дополненіе общихъ предложеній параграфа 13$^{\underline{аго}}$.

Теорема эта, которою опредѣляются нѣкоторыя условія неустойчивости, получается въ предположеніи, что коэффиціенты $p_{s\sigma}$ суть постоянныя величины. Но она тотчасъ же обобщается для случая, когда эти коэффиціенты суть какія угодно ограниченныя функціи t, удовлетворяющія условію, чтобы система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія принадлежала къ классу системъ, названныхъ нами приводимыми (см. пар. 10 и пар. 18, примѣч.). Она формулируется при этомъ такъ:

Если система дифференціальныхъ уравненій перваго приближенія есть приводимая, то всякій разъ, когда въ группѣ ея характеристичныхъ чиселъ находятся отрицательныя, невозмущенное движеніе неустойчиво.

Сопоставляя этотъ выводъ съ теоремой I пар. 13$^{\underline{аго}}$, приходимъ къ заключенію, что для приводимыхъ системъ вопросъ объ устойчивости рѣшается знакомъ наименьшаго изъ характеристичныхъ чиселъ. Сомнительными остаются, слѣдовательно, только случаи, когда число это есть нуль. Тогда вопросъ, конечно, не можетъ быть разрѣшенъ, пока въ дифференціальныхъ уравненіяхъ не приняты въ разсчетъ члены выше перваго измѣренія.

27. Изъ предыдущаго анализа слѣдуетъ, что въ большинствѣ случаевъ вопросъ объ устойчивости разрѣшается уже изслѣдованіемъ одного перваго приближенія, ибо только въ тѣхъ случаяхъ изслѣдованіе это не даетъ отвѣта на вопросъ, когда опредѣляющее уравненіе, не имѣя корней съ положительными вещественными частями, имѣетъ корни, вещественныя части которыхъ суть нули.

Тѣмъ не менѣе эти особенные случаи представляютъ весьма большой интересъ, какъ по трудности своего анализа, такъ и по тому, что для многихъ вопросовъ именно въ нихъ только и возможна безусловная устойчивость.

Такъ напр., если изслѣдуемая система уравненій есть каноническая

$$\frac{dx_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

(здѣсь H предполагается голоморфною функціей перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k$, не содержащею членовъ ниже второго измѣренія), то безусловная устойчивость возможна только въ случаѣ, когда для всѣхъ корней опредѣляющаго уравненія вещественныя части суть нули.

Къ такому заключенію приходимъ, принимая въ разсчетъ, что уравненіе это содержитъ только четныя степени неизвѣстной $\varkappa$ (пар. 21).

Если бы между его корнями находились обладающіе отличными отъ нуля вещественными частями, то существовала бы только нѣкоторая условная устойчивость (пар. 24, теор. II) такого характера, что при извѣстныхъ возмущеніяхъ возмущенныя движенія асимптотически приближались бы къ невозмущенному.

Въ случаяхъ, когда вещественныя части всѣхъ корней равны нулю, можетъ оказаться, что H есть функція знакоопредѣленная. Устойчивость тогда дѣйствительно будетъ имѣть мѣсто. Но если H не есть такая функція, вопросъ дѣлается вообще весьма труднымъ, и мы не можемъ указать средствъ для его рѣшенія.

Конечно, естественно было бы обратиться для этой цѣли къ интегрированію нашихъ уравненій при помощи рядовъ. Но ряды, къ которымъ въ занимающихъ насъ случаяхъ приводятъ всѣ извѣстныя методы интегрированія, таковы, что изъ разсмотрѣнія ихъ вообще не могутъ быть выводимы какія-либо заключенія объ устойчивости.

Ряды, расположенные по степенямъ постоянныхъ произвольныхъ, къ которымъ приводитъ обычная метода послѣдовательныхъ приближеній, представляютъ уже то неудобство, что вообще содержатъ вѣковые члены, которые обыкновенно входятъ въ нихъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда устойчивость дѣйствительно имѣетъ мѣсто. А присутствіе такихъ членовъ служитъ, конечно, однимъ изъ серьезныхъ затрудненій при изслѣдованіи этихъ рядовъ.

Поэтому желательно имѣть такія методы интегрированія, которыя, если возможно, доставляли бы ряды, не содержащіе вѣковыхъ членовъ.

Извѣстно, что въ области небесной механики разысканіе подобныхъ методъ составляетъ предметъ бóльшей части новѣйшихъ изслѣдованій. Изъ нихъ въ особенности обращаютъ на себя вниманіе изслѣдованія Гильдена и Линдштедта.

Методы, предложенныя Гильденомъ, основываются, какъ извѣстно, на введеніи эллиптическихъ функцій.

Болѣе простая метода Линдштедта въ тѣхъ случаяхъ, когда приводитъ къ цѣли, доставляетъ ряды синусовъ и косинусовъ кратностей t, зависящихъ не только отъ корней опредѣляющаго уравненія (которые предполагаются всѣ чисто мнимыми), но и отъ постоянныхъ произвольныхъ, вводимыхъ интегрированіемъ. Этою именно зависимостью и обусловливается устраненіе вѣковыхъ членовъ. *)

Но если такимъ образомъ и можно указать методы, въ извѣстныхъ случаяхъ позволяющія избѣгать введенія вѣковыхъ членовъ, то этимъ затрудненіе еще далеко не устраняется, ибо остается разрѣшить еще существенно важный вопросъ о сходимости получаемыхъ рядовъ. А вопросъ этотъ для системъ дифференціальныхъ уравненій выше второго порядка представляется весьма труднымъ, и пока для рѣшенія его еще ничего не сдѣлано, чѣмъ можно было бы здѣсь воспользоваться **).

Мы имѣемъ въ виду случай, когда названныя методы прилагаются къ разысканію общаго интеграла. Если же ограничиться разысканіемъ частныхъ рѣшеній, то при извѣстныхъ условіяхъ можно напр. получить періодическіе ряды, подобные Линдштедтовымъ, сходимость которыхъ будетъ несомнѣнною.

Мы разсмотримъ такіе ряды въ концѣ этой главы.

Какъ уже видно изъ сейчасъ изложеннаго, вопросы объ устойчивости въ интересующихъ насъ особенныхъ случаяхъ являются весьма нелегкими. Затрудненія здѣсь дѣлаются при томъ тѣмъ серьёзнѣе, чѣмъ болѣе число корней съ равными нулю вещественными частями.

Поэтому, если желательно придти къ какимъ-либо общимъ способамъ рѣшенія такихъ вопросовъ, необходимо начать съ тѣхъ случаевъ, въ которыхъ число названныхъ корней возможно менѣе.

Мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ двухъ простѣйшихъ случаевъ этого рода: 1) когда опредѣляющее уравненіе имѣетъ одинъ равный нулю корень при остальныхъ корняхъ съ отрицательными вещественными частями, и 2) когда при такихъ же остальныхъ корняхъ уравненіе это имѣетъ два чисто мнимыхъ корня ***).

Анализъ нашъ представитъ нѣкоторое приложеніе той методы изслѣдованія устойчивости, которую мы назвали второю.

---

*) Lindstedt, *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie* (Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg, VII série, tome XXXI, № 4).

**) Недавно появился въ высшей степени замѣчательный мемуаръ M. Poincaré *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Acta mathematica, tome 13). Въ этомъ мемуарѣ между прочимъ разсматривается вопросъ о сходимости рядовъ Линдштедта для нѣкоторой канонической системы четвертаго порядка, и авторъ приходитъ относительно нея къ отрицательному заключенію.

***) Случай чисто мнимыхъ корней для системъ второго порядка разсматривается M. Poincaré въ мемуарѣ *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (Journal de mathématiques, 4 série, tome 1, p. 172). Термину „устойчивость" приписывается здѣсь нѣсколько иное значеніе, чѣмъ у насъ.