ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

К ГИДРО-И ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

В. Л. Герман и И. Е. Тарапов

Харьков

Ряд прикладных задач (гидродинамическая теория смазки и др.) приводят к рассмотрению движения вязкой жидкости между двумя близко расположенными, движущимися друг относительно друга твердыми поверхностями.

Главным в этих задачах является определение сил, действующих на твердые поверхности; определение поля скоростей при этом является только вспомогательным этапом при определении сил.

Для решения задач указанного класса можно эффективно использовать интегральные соотношения, вытекающие из уравнения импульсов вязкой жидкости. Как известно, метод интегральных соотношений успешно применялся в теории пограничного слоя во многих исследованиях [1].

Однако в отличие от теории пограничного слоя, в указанных задачах не требуется особых предположений о существовании и форме фиктивной поверхности, определяющей область пограничного слоя. Поверхности, на которых скорость и температура жидкости предполагаются известными, заданы самой постановкой задачи. Эти поверхности, одна из которых может быть выбрана в качестве координатной, сами непосредственно определяют элемент объема в криволинейных координатах, применение к которому теоремы импульсов дает основные интегральные соотношения. Кроме того, наличие двух твердых поверхностей позволяет использовать интегральное соотношение, вытекающее из уравнения непрерывности и физически обеспечивающее постоянство расхода жидкости через поперечное сечение слоя. Определению в рассматриваемых задачах подлежит не функция $\bar{q}_2 = \bar{h}(\bar{q}_1, \bar{q}_3, \bar{t})$, определяющая вид фиктивной поверхности в теории пограничного слоя, а функция давления $\bar{p} = \bar{p}(\bar{q}_1, \bar{q}_3, \bar{t})$.

В случае плоской задачи интегральные соотношения, вытекающие из уравнения импульсов и уравнения непрерывности, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{h(q_1,t)} H_1 \rho v_1\, dq_2 - \frac{u_1}{u_0}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^h H_1 \rho\, dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_1}\int\limits_0^h \rho\, v_1^2\, dq_2 - \\ &- \frac{u_1}{u_0}\int\limits_0^h \rho\, v_1\, dq_2 = -h\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\mu_0 l}{H_1 u_0 \rho_0 \delta_2}\left[\mu\frac{\partial v_1}{\partial q_2}\right]_{q_2=0}^{q_2=h} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} & p = p(q_1,\ t) \\ & \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{h(q_1,\ t)} H_1 \rho dq_2 - [H_1\rho]^{q_2=h}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_1}\int\limits_0^{h} \rho\, v_1 dq_2 - \\ & \qquad - [\rho v_1]^{q_2=h}\cdot\frac{\partial h}{\partial q_1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь $q_1 = \frac{\overline{q_1}}{l}$, $q_2 = \frac{\overline{q_2}}{\delta}$ — безразмерные криволинейные координаты соответственно вдоль и по нормали к контуру одной из движущихся поверхностей; $v_1 = \frac{\overline{v_1}}{u_0}$ — безразмерная скорость жидкости по оси (q_1); l, δ — характерные размеры задачи в направлениях (q_1) и (q_2): $t = \frac{u_0}{l}\overline{t}$, $p = \frac{\overline{p}}{\rho_0 u_0^2}$, $\mu = \frac{\overline{\mu}}{\mu_0}$ — соответственно безразмерные время, давление и вязкость; $\overline{h}(\overline{q_1},\ \overline{t}) = \delta h(q_1,\ t)$, $\overline{h} = 0$ определяют контуры движущихся поверхностей, причем проекции их скоростей на ось (q_1) соответственно равны $u_1 = u_1(q_1,\ t)$ и $u_1' = 0\ (u_2' = 0)$; u_0, ρ_0, μ_0 — постоянные величины, имеющие размерность соответственно скорости, плотности и вязкости.

Соотношения (1) написаны с точностью до членов порядка $\frac{\delta}{l}\left(\frac{\delta}{l} \ll 1\right)$, причем предполагается также

$$Re = \frac{u_0 \rho_0 l}{\mu_0} \gg 1 \qquad \left|\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right| \ll 1$$

$$(ds^2 = d\overline{q}_2^2 + H_1^2\, d\overline{q}_1^2).$$

Заметим, что метод интегральных соотношений вполне применим и для решения пространственных задач.

В качестве первого примера применения соотношений (1) рассмотрим стационарную задачу гидродинамической теории смазки (теории смазки несжимаемой жидкостью) бесконечно длинного цилиндрического подшипника при полном охвате цапфы смазкой и малом зазоре.

Как известно, классическое решение Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина [2] не учитывает инерционных членов $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$ в исходных уравнениях. Использование соотношений (1) позволяет оценить влияние инерционных членов на решение этой основной задачи гидродинамической теории смазки.

Пользуясь обычными обозначениями (R, r — радиусы подшипника и цапфы; $\delta = R - r$; ω — угловая скорость цапфы, e, $\varepsilon = \frac{e}{\delta}$ — абсолютный и относительный эксцентриситеты; $h(\varphi) = 1 + \varepsilon\cos\varphi$ — переменный зазор между цапфой и подшипником; Ψ — угол между направлением приложенной к центру цапфы силы P и линией центров) и вводя правую систему безразмерных координат $(\varphi,\ \eta)$, связанную с подшипником, в которой поверхность $\eta = 0$ определяет движущуюся поверхность цапфы, из (1) получим:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[h\int_0^1 v_\varphi^2\,d\eta\right] = -h\frac{dp}{d\varphi} + \frac{\nu_0}{\omega\delta^2 h}\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=1} \tag{2}$$

$$p = p(\varphi)$$

$$h\int_0^1 v_\varphi\,d\eta = Q = \mathrm{const}, \tag{3}$$

где

$$\varphi = q_1;\ \eta = \frac{q_2}{h(\varphi)};\ \nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0};\ l = R;\ v_\varphi = v_1.$$

Предполагая ламинарность течения в смазочном слое, выберем для v_φ простейшее выражение

$$v_\varphi = A(\varphi)\eta^2 + B(\varphi)\eta + C(\varphi).$$

Используя граничные условия

$$v_\varphi(\varphi,\ 0) = 1 \qquad v_\varphi(\varphi,\ 1) = 0$$

и условие (3), получим

$$v_\varphi = 3\left(1 - \frac{2Q}{h(\varphi)}\right)(\eta^2 - \eta) + 1 - \eta.$$

Подставляя это значение v_φ в (2), интегрируя полученное выражение и определяя постоянную Q из очевидных условий

$$p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi) \qquad h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi),$$

получим после несложных преобразований

$$p(\varphi) - p(0) = \frac{6\nu_0}{\omega\delta^2}\cdot\frac{\varepsilon\sin\varphi}{(2+\varepsilon^2)h}\left(1 + \frac{1}{h}\right) -$$

$$-\frac{1}{10}\left\{\frac{2}{9}\ln\frac{h}{1+\varepsilon} + \left(\frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon^2}\right)^2\left[\left(\frac{1+\varepsilon}{h}\right)^2 - 1\right]\right\} \tag{4}$$

$$\left(Q = \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2};\ 0 < \varepsilon < 1\right).$$

Заметим, что (4), в отличие от решения без учета инерционных членов, не является нечетной функцией на $(0, 2\pi)$.

Проектируя, как обычно, приложенные к цапфе силы на линию центров и перпендикуляр к ней, используя (4), получим величину полной нагрузки P и угол Ψ:

$$P = \frac{12\pi\mu_0 r^3\omega}{\delta^2}\cdot\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sqrt{1 + \left[\frac{\omega\delta^2}{\nu_0}\Phi(\varepsilon)\right]^2}\Bigg\} \tag{5}$$

$$\mathrm{ctg}\,\Psi = \frac{\omega\delta^2}{\nu_0}\Phi(\varepsilon)$$

где

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{10}\left[\frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} - \frac{2}{9}\cdot\frac{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\varepsilon^2}\right].$$

Момент сил трения, действующий на цапфу, равен

$$M=-\frac{\mu_0\,\omega r^3}{\delta}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{h}\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}d\varphi=\frac{\mu_0\,\omega r^3}{\delta}\cdot\frac{4\pi\,(1+2\varepsilon^2)}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{6}$$

Так называемый коэффициент трения f, равный по определению $\frac{M}{rP}$, оказывается зависимым от скорости вращения цапфы. Это видно из его выражения

$$f=\frac{M}{rP}=\frac{\delta}{r}\,\frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon\sqrt{1+\left[\frac{\omega\delta^2}{\nu_0}\,\Phi(\varepsilon)\right]^2}}. \tag{7}$$

Влияние инерционных членов на решение задачи определяется величиной безразмерного параметра $\frac{\omega\delta^2}{\nu_0}$.

При $\frac{\omega\delta^2}{\nu_0}=0$ выражения (4) — (7) совпадают с формулами точного решения (при $(\vec v\,\triangle)\,\vec v=0$) Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина для случая малого зазора $\left(\frac{\delta}{R}\ll 1\right)$.

Решение с учетом инерционных членов значительно отличается $\left(\text{при значениях параметра } \frac{\omega\delta^2}{\nu_0}\simeq 5 \text{ для скоростных подшипников}\right)$ видом функции распределения давления $p(\varphi)$ и направлением нагрузки (угол Ψ); величина нагрузки P при этом изменяется незначительно.

В качестве второго примера рассмотрим стационарную задачу газодинамической теории смазки (теории смазки сжимаемым газом) подшипника бесконечной длины при малом зазоре.

Как обычно, зависимость вязкости газа от температуры примем в виде

$$\mu=T^m \tag{8}$$

$$0{,}5\leqslant m\leqslant 1 \qquad (\text{для воздуха } m\simeq 0{,}76).$$

Безразмерную плотность ρ, используя уравнение состояния газа, запишем в виде

$$\rho=\frac{2\varkappa}{(\varkappa-1)\,a^2}\,\frac{p}{T}, \tag{9}$$

где $\varkappa=\frac{c_p}{c_v}$ — отношение теплоемкостей; $T=\frac{\overline{T}}{\overline{T}_0}$ — безразмерная температура; $\overline{T}_0$ — температура цапфы;

$$a^2=\frac{2\varkappa\,c_p\,\overline{T}_0}{(\omega r)^2}+1.$$

Интеграл уравнения энергии при граничных условиях

$$v_\varphi(\varphi,\,0)=1 \qquad T(\varphi,\,0)=1$$

$$v_\varphi(\varphi,\,1)=0 \qquad \left[\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]_{\eta=1}=0$$

в выше приведенных обозначениях имеет вид

$$T = \frac{a^2 - v_\varphi^2}{a^2 - 1} \tag{10}$$

$$\left(\frac{\delta}{R} \ll 1; \text{ число } Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = 1\right).$$

Подставляя (8) — (10) в интегральные соотношения (1) и переходя к переменным (φ, η), получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{d}{d\varphi}\left[hp\int_0^1 \frac{v_\varphi^2}{a^2 - v_\varphi^2}\,d\eta\right] = -h\frac{dp}{d\varphi} + \frac{\nu_0}{\omega\delta^2 h}\left[\left(\frac{a^2 - v_\varphi^2}{a^2 - 1}\right)^m \frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=1} \\ &p = p(\varphi) \\ &hp\int_0^1 \frac{v_\varphi}{a^2 - v_\varphi^2}\,d\eta = Q = \text{const.} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

При дозвуковой скорости газа в смазочном слое, имеем

$$\frac{v_\varphi}{a} < \sqrt{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}}.$$

Предполагая $\left(\frac{v_\varphi}{a}\right)^2 \ll 1$, $a^2 \gg 1$, из (11) получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\varkappa}{(\varkappa - 1)a^2}\frac{d}{d\varphi}\left[hp\int_0^1 v_\varphi^2\,d\eta\right] = -h\frac{dp}{d\varphi} + \frac{\nu_0}{\omega\delta^2 h}\left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=1} \\ &p = p(\varphi) \\ &hp\int_0^1 v_\varphi\,d\eta = Q' = \text{cosnt.} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Выбирая для v_φ простейшее выражение

$$v_\varphi = A(\varphi)\,\eta^2 + B(\varphi)\,\eta + C(\varphi),$$

получим из (12) аналогично задаче гидродинамической теории смазки уравнение для определения функции давления $P(\varphi)$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{\varepsilon z \sin\varphi - \frac{L}{z(0)}\,z^2(1 - z)}{h\left(1 + \frac{4}{9}M - Mz^2\right)}, \tag{13}$$

где

$$z(\varphi) = \frac{2Q'}{p(\varphi)\,h(\varphi)}; \quad M = \frac{3\varkappa}{5(\varkappa - 1)a^2}$$

$$L = \frac{6\nu_0}{\omega\delta^2(1 + \varepsilon)\,p(0)}; \quad z(0) = \frac{2Q'}{p(0)(1 + \varepsilon)}.$$

Можно показать, что при определенном значении $z(0)$ существует периодическое решение уравнения (13) $z(\varphi)=z(\varphi+2\pi)$, которое определяет искомую функцию давления $p(\varphi)$ для цилиндрического подшипника с газовой смазкой и может быть найдено численным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Лойцянский. Аэродинамика пограничного слоя. Гостехиздат, 1941.
2. Н. Е. Жуковский. Избранные сочинения, т. 1. М.—Л. Гостехтеоретиздат, 1948, стр. 282—296.