

Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости

С.В. Колосова, М.В. Сидоров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Рассматривается плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в конечной односвязной области. Предлагается метод расчета течения, основанный на совместном применении методов R-функций, проекционных и последовательных приближений. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

2000 Mathematics Subject Classification 42A70.

Для построения численных методов расчета вязких течений наиболее часто используется система уравнений Навье-Стокса в переменных "функция тока - вихрь" или эквивалентное ей нелинейное уравнение четвертого порядка для функции тока (см. [3, 6]). Несмотря на обилие методов решения, этот раздел вычислительной гидродинамики еще далек от завершения. Это связано, прежде всего, с нелинейностью исходной задачи и отсутствием хороших методик оценки погрешности, а также с четвертым порядком решаемого уравнения. Особенно это относится к течениям в сложных областях.

В данной работе авторами предлагается метод расчета плоского течения вязкой жидкости, основанный на применении процесса последовательных приближений по нелинейности и метода R-функций. Предложенный метод тестируется на модельной задаче расчета течения в квадратной каверне с движущейся верхней стенкой.

Плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в переменных "скорость-давление" описывается известной системой уравнений Навье-Стокса [1]

$$\nu \Delta V_1 = V_1 \frac{\partial V_1}{\partial X} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - f_1, \quad (1)$$

$$\nu \Delta V_2 = V_1 \frac{\partial V_2}{\partial X} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial Y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} - f_2 \quad (2)$$

и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial V_1}{\partial X} + \frac{\partial V_2}{\partial Y} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V} = \{V_1, V_2\}$ – вектор скорости жидкости, P – давление, $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ – вектор массовой силы, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность жидкости.

Далее будем рассматривать безразмерные переменные $v_1 = \frac{V_1}{U_0}$, $v_2 = \frac{V_2}{U_0}$, $x = \frac{X}{L}$, $y = \frac{Y}{L}$, где U_0 – характерная скорость, L – характерная длина. В двумерном плоскопараллельном течении уравнение неразрывности (3) интегрируется с помощью функции тока $\psi(x, y)$, определяемой соотношениями

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Тогда, введя завихренность

$$\zeta = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (5)$$

систему (1) – (3) в случае, когда вектор массовых сил потенциален, можно свести к системе

$$-\Delta \zeta + Re \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

$$-\Delta \psi = \zeta, \quad (7)$$

где $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$ – число Рейнольдса.

Система (6) – (7) уже не содержит давление, однако в общем случае не удастся корректно задать граничные условия для завихренности на твердых стенках и при решении задач эти условия приходится задавать приближенно [2]. Этого можно избежать, перейдя к эквивалентному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока

$$\Delta^2 \psi + Re \left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для функции тока могут быть получены из условий, накладываемых на вектор $\mathbf{v}$. Если жидкость примыкает к неподвижной стенке, то в этих точках скорость жидкости обращается в нуль. Это означает, что в нуль обращаются нормальная и тангенциальная составляющие скорости (т.н. условие прилипания). Если же жидкость примыкает к подвижной твердой стенке, то в таких точках скорость жидкости должна по величине и направлению совпадать со скоростью соответствующей точки стенки. Таким образом, на границе области течения можно задать значение функции тока ψ и ее нормальной производной $\frac{\partial \psi}{\partial n}$.

Обзор методов решения систем (1) – (3) и (6), (7) можно найти в [3, 6].

Рассмотрим задачу о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости для функции тока

$$\Delta^2 \psi - Re \left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (9)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (10)$$

где Ω – ограниченная односвязная область, s – длина дуги вдоль границы $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к жидкости.

Пусть $B(\psi) = \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ – нелинейная часть уравнения (9). Очевидно, что $B(\psi)$ можно представить также в виде $B(\psi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta \psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \psi \right)$.

Предположим, что известна функция $\omega(x, y)$, удовлетворяющая условиям: $\omega > 0$ в Ω , $\omega = 0$ на $\partial\Omega$, $|\nabla \omega| = 1$ на $\partial\Omega$. Построение такой функции можно осуществить с помощью R-функций [4]. Легко проверить, что функция $\tilde{\varphi} = f - \omega(g + D_1 f)$, где $f = ECf_0$, $g = ECg_0$ – продолжения в область Ω функций f_0 и g_0 соответственно (EC – оператор продолжения граничных условий), $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$, удовлетворяет условиям (10). Тогда, сделав в уравнении (9) замену $\psi = \tilde{\varphi} + u$, получим следующую задачу

$$\Delta^2 u = -\Delta^2 \tilde{\varphi} + ReB(u + \tilde{\varphi}), \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

Решение задачи (11), (12) представим в виде последовательных приближений, формируемых по схеме

$$\Delta^2 u^{(n+1)} = F_n, \quad (13)$$

$$u^{(n+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (14)$$

где $F_n = \Delta^2 \tilde{\varphi} + B(u^{(n)} + \tilde{\varphi})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. В качестве начального приближения $u^{(0)}$ можно выбрать, например, течение Стокса (решение задачи (9) – (10) при $Re = 0$).

Доказывается, что при малых числах Рейнольдса последовательные приближения, формируемые по схеме (13) – (14) сходятся к единственному обобщенному решению задачи (9), (10).

Известно [5], что оператор краевой задачи (13), (14) положительно определен и при фиксированном $F_n \in L_2(\Omega)$ ее решение может быть найдено как точка минимума в H_{Δ^2} функционала

$$J(w) = \int_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2F_n w] dx dy, \quad (15)$$

где H_{Δ^2} – соответствующее энергетическое пространство.

Приближенное решение задачи (13), (14) представим в виде

$$u_N^{(n+1)}(x, y) = \sum_{k=1}^N c_k^{(n+1)} \varphi_k(x, y), \quad (16)$$

где $\varphi_k(x, y) = \omega^2(x, y) \tau_k(x, y)$, $\tau_k(x, y)$ – полная система линейно независимых функций; $c_k^{(n+1)}$ – неопределенные коэффициенты.

Для определения постоянных $c_k^{(n+1)}$ получаем систему Ритца, соответствующую функционалу (15),

$$\sum_{k=1}^N a_{kj} c_k^{(n+1)} = b_j^{(n+1)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (17)$$

где

$$a_{kj} = [\varphi_k, \varphi_j] = \int_{\Omega} \Delta \varphi_k \Delta \varphi_j dx dy, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} b_j^{(n+1)} &= \left(-\Delta^2 \tilde{\varphi} + \operatorname{Re} B(u^{(n)} + \tilde{\varphi}), \varphi_j \right) = \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \tilde{\varphi} \Delta \varphi_j dx dy + \end{aligned} \quad (19)$$

$$+ \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (u^{(n)} + \tilde{\varphi})}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial (u^{(n)} + \tilde{\varphi})}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] \Delta (u^{(n)} + \tilde{\varphi}) dx dy$$

Таким образом, нелинейная задача (9) - (10) может быть сведена к последовательности линейных задач.

В качестве критерия окончания вычислительного процесса можно взять, например, условия $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$ или $\frac{\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}}{\|u^{(n+1)}\|_{L_2(\Omega)}} < \varepsilon$.

В качестве модельной рассмотрим задачу о плоском стационарном течении в квадратной каверне с движущейся с постоянной скоростью верхней стенкой. Эта задача сводится к интегрированию в области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ уравнения (9) с граничными условиями

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0, & x=0, \quad x=1, \quad y=0; \\ -1, & y=1. \end{cases} \quad (20)$$

Функции $\tilde{\varphi}(x, y)$ и $\omega(x, y)$ возьмем в виде

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \omega(x, y) \frac{xy(1-x)}{x(1-x) + y(1-y)}, \quad \omega(x, y) = [x(1-x)] \wedge_\alpha [y(1-y)],$$

где $\wedge_\alpha$ — знак R-конъюнкции [4].

На $(n+1)$ -й итерации приближенное решение задачи (9), (20) в соответствии со схемой (16) ищем в виде

$$\psi_N^{(n+1)}(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y) + \omega^2(x, y) \sum_{\substack{i+k=0 \\ i, k \geq 0}}^N c_{ik}^{(n+1)} \tau_{ik}(x, y). \quad (21)$$

Вычислительные эксперименты проводились для случаев, когда в качестве $\tau_{ik}(x, y)$ были выбраны сплайны и смещенные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[0, 1]$. Сплайны показали большую вычислительную устойчивость.

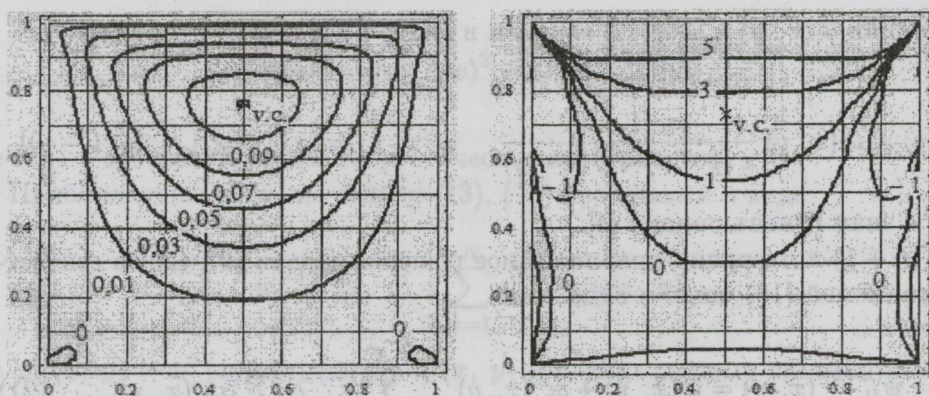
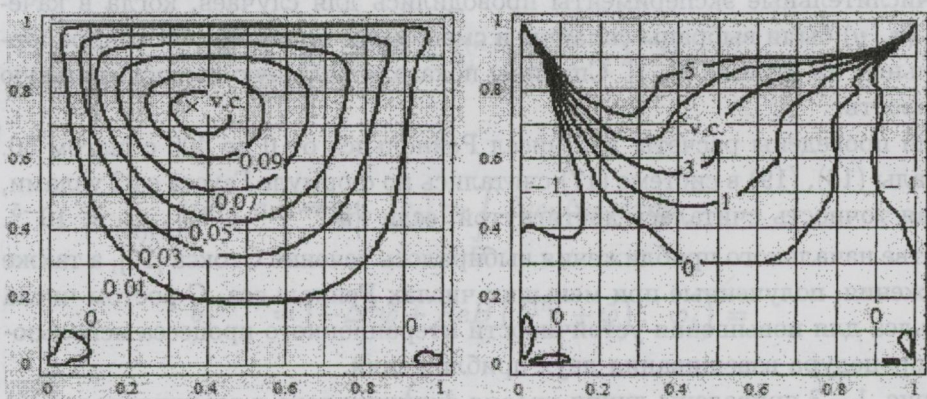
Были проведены расчеты для чисел Рейнольдса от 0 до 400 с шагом 50. Интегралы (18), (19) в системе (17) считались по формуле Гаусса с 32 узлами, заданная точность считалась достигнутой, если $\|u^{(n+1)} - u^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} < 10^{-5}$. В качестве начального приближения выбиралось течение Стокса [10], а также приближения, полученные при меньших числах Рейнольдса. С ростом числа Рейнольдса для повышения устойчивости итерационного процесса использовалась процедура взвешивания двух приближений.

На рис. 1–3 приведены линии уровня функции тока и завихренности (5) для чисел Рейнольдса 0, 100, 400 на сетке сплайнов с шагом $h = 0,1$ (169 базисных функции). Как видно, с ростом числа Рейнольдса увеличивается зона центрального циркуляционного движения. Кроме того, в нижних углах каверны возникают вторичные угловые вихри, которые имеют тенденцию к росту с увеличением Re .

Анализ профилей скорости в среднем вертикальном сечении каверны ($x = 0,5$) показывает, что с ростом Re растет скорость циркуляционного движения от значения 0,205 при $Re = 0$ до значения 0,349 при $Re = 400$, а точка максимума скорости сдвигается ко дну каверны.

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, приведенными в [8, 9].

Предлагаемый метод показал свою эффективность на модельной задаче и, по мнению авторов, обладает рядом преимуществ. Матрица системы (17) является симметричной и не изменяется от итерации к итерации, т.е. становится универсальной. Это дает возможность использовать одну и ту же матрицу при различных числах Рейнольдса и на каждой итерации пересчитывать только правую часть системы, что снижает вычислительные затраты по сравнению с другими методами.

Рис. 1: Линии уровня функции тока и завихренности для $Re=0$ Рис. 2: Линии уровня функции тока и завихренности для $Re=100$

Кроме того, исходные уравнения не заменяются приближенными, в отличие от метода, предложенного в [7] (линеаризация по методу Ньютона-Канторовича), что повышает надежность метода и позволяет избежать громоздких выкладок.

В отличие от сеточных методов решение получается в явном аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование. Например, зная функцию тока, можно по формуле (7) найти завихренность; решив соответствующую задачу Неймана для уравнения Пуассона найти давление.

Предложенный в работе подход с некоторыми изменениями может быть распространен на случай многосвязной области и на системы уравнений вида (9), например, на уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска в переменных "функция тока - температура".

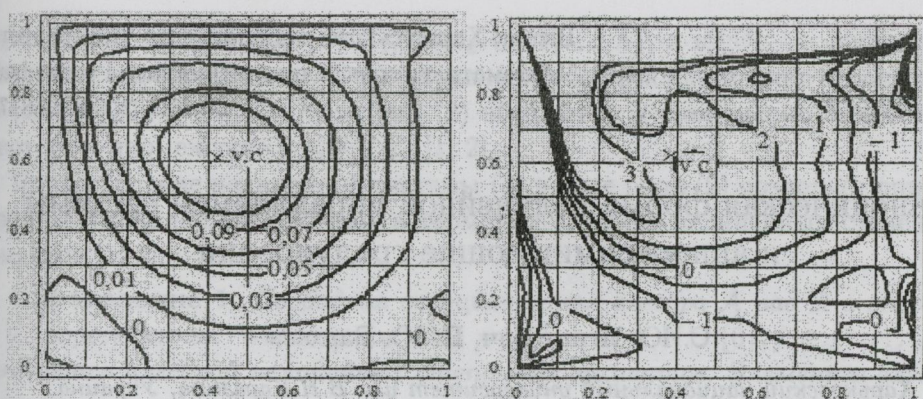


Рис. 3: Линии уровня функции тока и завихренности для $Re=400$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
3. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 352 с.
4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. Думка, 1982. – 552 с.
5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. – М.: Мир, 1991. – Т. 1, 504 с.
7. Рвачев В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе "Поле-3" // Мат. методы и физ.-мех. поля., – 1991. – 33. – С. 95–99.
8. Burggraf O.R. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows // J. Fluid Mech., – 1966. – 24, N.1. – P. 113–151.
9. Белов И.А., Исаев С.А. Циркуляционное движение жидкости в прямоугольной каверне при средних и больших числах Рейнольдса. // Ж. прикл. мех. и техн. физики., – 1982. – 1. – С. 41–45.
10. Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету течения в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика, – 2002. – 4. – С. 54–56.

Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градуировки

С. Ю. Игнатович, П. Ю. Бархаев

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина

В работе рассматриваются алгебраические структуры, порожденные представлением аффинной управляемой системы в виде ряда нелинейных степенных моментов. Различным способам суммирования ряда соответствуют различные градуировки алгебры нелинейных степенных моментов. Предлагается способ сведения бесконечномерных градуировок к конечномерным для построения канонической формы нелинейных управляемых систем.

2000 Mathematics Subject Classification 93B10, 93B25.

Рассмотрим нелинейную управляемую систему вида

$$\dot{x} = a(t, x) + \sum_{i=1}^h u_i b_i(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u_1, \dots, u_h \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $a(t, x)$, $b_1(t, x), \dots, b_h(t, x)$ – аналитические вектор-функции в окрестности нуля в $\mathbb{R}^{n+1}$, а точка $x = 0$ является стационарной точкой системы (т.е. $a(t, 0) \equiv 0$ на некотором отрезке, включающем $t = 0$). Такая система порождает отображение $x^0 = S_{a, b_1, \dots, b_h}(\theta, u)$, сопоставляющее управлению $u(t) = (u_1(t), \dots, u_h(t))$ начальную точку $x(0) = x^0$, которую это управление переводит в ноль за время θ . Это отображение допускает разложение в ряд по нелинейным степенным моментам

$$S_{a, b_1, \dots, b_h}(\theta, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_1 + \dots + m_k + k = m} v_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} \xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}(\theta, u), \quad (2)$$

где нелинейные степенные моменты $\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}(\theta, u)$ имеют вид

$$\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}(\theta, u) = \int_0^\theta \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{k-1}} \tau_1^{m_1} \tau_2^{m_2} \dots \tau_k^{m_k} \prod_{j=1}^k u_{i_j}(\tau_j) d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1, \quad (3)$$

$k \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, h\}$, а $v_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ — постоянные векторные коэффициенты. Если управление $u(t)$ удовлетворяет ограничениям $|u_i(t)| \leq 1$, $i = 1, \dots, h$, то ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на некотором промежутке $0 \leq \theta \leq T_0$ [1, 2].

Представление нелинейной системы (1) в виде ряда (2) позволяет описать свойства управляемой системы в терминах алгебры нелинейных степенных моментов [1, 3].

Определение 1. Свободная ассоциативная алгебра A над $\mathbb{R}$ с операцией $\vee$, порожденная "алфавитом" $\text{Bas} = \{\xi_m^j : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{1, \dots, h\}\}$, называется алгеброй нелинейных степенных моментов. Элементы алгебры — это (конечные) линейные комбинации "слов" вида $\xi_{m_1}^{i_1} \vee \dots \vee \xi_{m_k}^{i_k}$. Далее для краткости будем использовать обозначение $\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} = \xi_{m_1}^{i_1} \vee \dots \vee \xi_{m_k}^{i_k}$.

Естественной "реализацией" алгебры A является множество (конечных) линейных комбинаций функционалов от $u(t)$ вида (3).

Способ суммирования ряда, указанный в формуле (2), соответствует градуировке в алгебре нелинейных степенных моментов.

Определение 2. Пусть M — коммутативная полугруппа по сложению. Говорят, что алгебра A градуирована полугруппой M , если она допускает разложение в прямую сумму однородных подпространств $A = \sum_{\alpha \in M} A_\alpha$, удовлетворяющих условию $A_\alpha \vee A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ для любых $\alpha, \beta \in M$.

Градуировкой алгебры A будем называть пару $\mu = (M, \{A_\alpha\}_{\alpha \in M})$.

Рассмотрим, например, градуировку $\mu = (\mathbb{N}, \{A_m\}_{m \in \mathbb{N}})$, для которой $A_m = \text{Lin}\{\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} : m_1 + \dots + m_k + k = m; k \geq 1; m_j \geq 0; 1 \leq i_j \leq h\}$. Заметим, что в этом случае однородные подпространства A_m являются конечномерными. Тогда ряд (2) суммируется в соответствии с естественным порядком в полугруппе $\mathbb{N}$. Оказывается, задание такой градуировки позволяет построить классификацию нелинейных аффинных систем с управлением, удовлетворяющим ограничению $|u_i(t)| \leq 1$, $i = 1, \dots, h$, в смысле быстрогодействия [3].

Другие ограничения на управление порождают другие градуировки; так, в работе [6] построена классификация систем в смысле асимптотического поведения множеств управляемости при ограничениях на управление вида $|u_i(t)| \leq t^{q_i}$, $i = 1, \dots, h$, где $q_1, \dots, q_h$ — некоторые неотрицательные числа. Однородные подпространства в этой градуировке имеют вид $A_\alpha = \text{Lin}\{\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} : m_1 + \dots + m_k + k + q_{i_1} + \dots + q_{i_k} = \alpha; k \geq 1; m_j \geq 0; 1 \leq i_j \leq h\}$ и также конечномерны.

Для исследования различных задач теории управления могут быть использованы и другие градуировки. Например, в задаче управляемости наиболее естественной является градуировка "по длине" нелинейного степенного момента, в которой однородные подпространства имеют вид $A_k = \text{Lin}\{\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} : m_j \geq 0; 1 \leq i_j \leq h\}$ и являются бесконечномерными (применение градуировок в задаче управляемости впервые предложено в [4]).

В данной работе дается описание всех градуировок, в которых однородные

подпространства конечномерны (параграф 2). На случай таких градуировок обобщаются теоремы о разложении алгебры и об асимптотическом приближении нелинейной системы [3] (параграф 3). Наконец, в параграфе 4 показано, что при некоторых дополнительных предположениях бесконечномерная градуировка может быть аппроксимирована конечномерной в том смысле, что каноническая форма ряда нелинейных степенных моментов для заданной системы (1) в этой конечномерной градуировке совпадает с канонической формой ряда в исходной бесконечномерной градуировке.

§2. Структура канонических конечномерных градуировок

Определение 3. Будем называть градуировку конечномерной, если каждое однородное подпространство A_α конечномерно.

Определение 4. Будем говорить, что элемент $a \in A$ имеет порядок α (в градуировке μ), если он принадлежит подпространству A_α . Более кратко будем записывать $\text{ord}_\mu a = \alpha$. Будем говорить, что элемент $a \in A$ является μ -однородным, если он имеет некоторый порядок в градуировке μ .

Определение 5. Назовем градуировку $\mu = (M, \{A_\alpha\}_{\alpha \in M})$ канонической, если каждый элемент порождающего базиса $\xi_m^j \in \text{Bas}$ является μ -однородным.

В данной работе в качестве полугруппы M мы рассматриваем полугруппу натуральных чисел, $M = \mathbb{N}$.

Укажем способ построения конечномерных канонических градуировок.

Теорема 1. Пусть порождающий базис алгебры представлен в виде объединения конечных непересекающихся подмножеств, $\text{Bas} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ (множества B_k могут быть пустыми). Определим подпространства A_k формулой

$$A_k = \text{Lin} \{ B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_s} : s \geq 1, k_1 + \dots + k_s = k \}. \quad (4)$$

Тогда $\mu = (\mathbb{N}, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ является канонической конечномерной градуировкой.

Доказательство. В силу построения, $A_i \vee A_j \subset A_{i+j}$, поэтому μ является градуировкой. Эта градуировка каноническая, поскольку каждый элемент ξ_m^i принадлежит некоторому B_k , а значит, имеет порядок k . Конечномерность подпространств (4) непосредственно следует из конечности множеств B_k . $\square$

Замечание. Пусть $\mu = (\mathbb{N}, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ – каноническая градуировка. Тогда подпространство A_1 является линейной оболочкой элементов из порождающего базиса Bas . Действительно, предположим, $\xi_{m_1 \dots m_s}^{j_1 \dots j_s} \in A_1$, причем $s > 1$. Так как μ – каноническая градуировка, то каждый из моментов $\xi_{m_i}^{j_i}$, $1 \leq i \leq s$, принадлежит некоторому подпространству A_{k_i} , $k_i \in \mathbb{N}$. Тогда $A_{k_1} \vee \dots \vee A_{k_s} \subset A_1$, а значит, $k_1 + \dots + k_s = 1$, что невозможно, так как $k_i \in \mathbb{N}$ и $s > 1$.

Докажем, теперь, что все канонические конечномерные градуировки могут быть построены способом, указанным в теореме 1.

Теорема 2. Пусть $\mu = (\mathbb{N}, \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ – каноническая конечномерная градуировка. Тогда существует такое разбиение порождающего базиса на конечные множества, $\text{Bas} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, что однородные подпространства A_k совпадают с подпространствами вида (4).

Доказательство проведем индукцией по порядку однородности k пространств A_k .

Положим $B_k = A_k \cap \text{Bas}$, $k \in \mathbb{N}$. Из конечномерности градуировки μ следует конечность множеств B_k . В силу приведенного выше замечания подпространство A_1 совпадает с $\text{Lin}\{B_1\}$. Предполагая, что представление (4) имеет место для всех A_i , $1 \leq i \leq k-1$, докажем его для A_k .

Очевидно, что $A_k \supset \text{Lin}\{B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_s} : s \geq 1, k_1 + \dots + k_s = k\}$. Докажем обратное включение. Рассмотрим произвольный базисный элемент $\xi_{m_1 \dots m_s}^{j_1 \dots j_s} \in A_k$. Если его длина равна 1, т.е. $s = 1$, то по построению он принадлежит B_k . Если длина больше единицы, $s > 1$, то он представим в виде произведения $\xi_{m_1 \dots m_s}^{j_1 \dots j_s} = \xi_{m_1 \dots m_{s-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}} \vee \xi_{m_s}^{j_s}$. При этом $\xi_{m_1 \dots m_{s-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}} \in A_{p_1}$, $\xi_{m_s}^{j_s} \in B_{p_2}$, где p_1, p_2 – некоторые натуральные числа, такие, что $p_1 + p_2 = k$. Поскольку $p_1 \leq k-1$, по предположению индукции получаем, что $\xi_{m_1 \dots m_{s-1}}^{j_1 \dots j_{s-1}} \in \text{Lin}\{B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_{s-1}} : s-1 \geq 1, k_1 + \dots + k_{s-1} = p_1\}$, так что $\xi_{m_1 \dots m_s}^{j_1 \dots j_s} \in \text{Lin}\{B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_{s-1}} : s-1 \geq 1, k_1 + \dots + k_{s-1} = p_1\} \vee \text{Lin}\{B_{p_2}\} \subset \text{Lin}\{B_{k_1} \vee \dots \vee B_{k_s} : s \geq 1, k_1 + \dots + k_s = k\}$. $\square$

Пример. Градуировка $\mu = (\mathbb{N}, \{A_m\}_{m \in \mathbb{N}})$, для которой $A_m = \text{Lin}\{\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} : m_1 + \dots + m_k + k = m; k \geq 1; m_j \geq 0; 1 \leq i_j \leq h\}$, отвечает разбиению $\text{Bas} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, где $B_k = \{\xi_{k-1}^j : 1 \leq j \leq h\}$.

§3. Разложение алгебры по правому идеалу и каноническая форма нелинейной системы

Введем некоторые дополнительные операции в алгебре A . Первая из них, операция *shuffle-произведения* [5], соответствует произведению нелинейных степенных моментов как функционалов вида (3).

Определение 6. Рассмотрим алгебру нелинейных степенных моментов, дополненную единицей, $A^e = A + \mathbb{R}$. Операция *shuffle-произведения* * определяется рекуррентным соотношением

$$\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} * \xi_{n_1 \dots n_s}^{j_1 \dots j_s} = \xi_{m_1}^{i_1} \vee (\xi_{m_2 \dots m_k}^{i_2 \dots i_k} * \xi_{n_1 \dots n_s}^{j_1 \dots j_s}) + \xi_{n_1}^{j_1} \vee (\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} * \xi_{n_2 \dots n_s}^{j_2 \dots j_s}),$$

где полагаем $a * 1 = 1 * a = a$ для всех $a \in A^e$.

Эта операция является ассоциативной и коммутативной. Для любого подмножества $B \subset A$ обозначим $B^{sh} = \text{Lin}\{b_1 * \dots * b_m : m \geq 2; b_1, \dots, b_m \in B\}$.

Введем в алгебре A как линейном пространстве над $\mathbb{R}$ скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, считая множество "слов" $\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ ортонормированным базисом. Для любого подмножества $B \subset A$ обозначим $B^\perp = \{y : \langle y, z \rangle = 0 \text{ для любого } z \in B\}$.

Определим коммутатор двух элементов алгебры A формулой $[x, y] = x \vee y - y \vee x$. Пусть L – алгебра Ли над $\mathbb{R}$ с операцией $[\cdot, \cdot]$, порожденная элементами $\text{Bas} = \{\xi_m^j : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{1, \dots, h\}\}$. Элементы алгебры Ли L будем называть Ли-элементами.

Определение 7. Говорят, что $J(F)$ является правым идеалом, порожденным множеством $F \subset A$, если $J(F) = \text{Lin}\{f \vee a : f \in F, a \in A^e\}$.

Пусть μ – каноническая конечномерная градуировка. Зададим некоторое множество F μ -однородных Ли-элементов и построим правый идеал $J = J(F)$. Тогда имеем представление $J(F) = \sum_{m=1}^{\infty} (J(F) \cap A_m)$. Поскольку подпространства A_m конечномерны, каждое из них допускает ортогональное разложение $A_m = (J(F) \cap A_m) \oplus P_m$, где $P_m = (J(F) \cap A_m)^{\perp} \cap A_m$, так что $J(F)^{\perp} = \sum_{m=1}^{\infty} P_m$. Следовательно, алгебра A допускает ортогональное разложение $A = J(F) \oplus J(F)^{\perp}$.

Нетрудно показать, что подпространство $L_F = L \cap J(F)$ является под-алгеброй Ли алгебры Ли L . Заметим, что в случае, когда по крайней мере два элемента Bas не принадлежат F (в дальнейшем будет рассмотрен только такой случай), найдется счетное множество линейно независимых μ -однородных Ли-элементов $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$, таких, что $L = L_F + \text{Lin}\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ (другими словами, множество $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ дополняет базис L_F до базиса L). Обозначая символом $\sim$ ортогональное проектирование на подпространство $J(F)^{\perp}$, получаем, что элементы $\{\tilde{b}_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют базис подпространства $\tilde{L}$. Аналогично [3] можно показать, что $J(F)^{\perp} = \tilde{L} \oplus \tilde{L}^{sh}$, причем элементы

$$\{\tilde{b}_{j_1} * \dots * \tilde{b}_{j_m} : m \geq 2, 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m\}$$

образуют базис $\tilde{L}^{sh}$. Следовательно, имеет место ортогональное разложение алгебры

$$A = J(F) \oplus \tilde{L} \oplus \tilde{L}^{sh}. \quad (5)$$

Опишем процедуру построения идеала, отвечающего системе (1). Соответствующее ей отображение $S_{a, b_1, \dots, b_h}(\theta, u)$ вида (2) естественным образом порождает линейное отображение $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое сопоставляет базисному элементу $\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ коэффициент $v_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ в разложении (2). Далее предполагаем, что система (1) является n -мерной, т.е. удовлетворяет условию

$$\dim v(L) = n. \quad (6)$$

Зафиксируем конечномерную каноническую градуировку μ и рассмотрим последовательность подпространств $\mathbb{R}^n$, определяемых следующим образом: $D_0 = \{0\}$, $D_k = v(L \cap \sum_{i=1}^k A_i)$, $k \geq 1$. Тогда условие (6) означает, что найдутся n таких μ -однородных Ли-элементов $\ell_1, \dots, \ell_n$, что $\text{Lin}\{v(\ell_1), \dots, v(\ell_n)\} = \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности считаем, что $\text{ord}_{\mu} \ell_i \leq \text{ord}_{\mu} \ell_j$ при $i < j$. Итак, каждое подпространство $L \cap A_k$ допускает разложение в прямую сумму $L \cap A_k = G_k + F_k$, где $\dim G_k = \dim D_k - \dim D_{k-1}$, а $v(F_k) \subset D_{k-1}$. Заметим, что подпространства G_k и F_k конечномерны, а при $k > r_0 = \text{ord}_{\mu} \ell_n$ имеем

$G_k = \{0\}$. Заметим еще, что Ли-элементы $\ell_1, \dots, \ell_n$ образуют базис подпространства $\sum_{k=1}^{r_0} G_k$.

Построим правый идеал по системе (1) следующим образом:

$$J = \text{Lin} \{p \vee a : p \in F_m, m = 1, \dots, r_0, a \in A^e\}. \quad (7)$$

Тогда элементы $\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_n$ образуют базис подпространства $\tilde{L} \cap (A_1 \oplus \dots \oplus A_{r_0})$, а следовательно, элементы $\tilde{\ell}_{i_1} * \dots * \tilde{\ell}_{i_s}$, $s \geq 2$, образуют базис подпространства $\tilde{L}^{sh} \cap (A_1 \oplus \dots \oplus A_{r_0})$. С другой стороны, как показано в [1], отображение v обладает следующим свойством: $v(J \cap A_m) \subset v(\sum_{i < m} A_i)$. Далее считаем, что $v(\tilde{\ell}_i) = e_i$ (этого можно добиться линейной заменой переменных в системе (1)). Тогда ряд (2) покомпонентно может быть представлен в виде

$$(S_{a,b_1,\dots,b_h}(\theta, u))_k = \tilde{\ell}_k + \sum_{s \geq 2; \text{ord}_\mu \tilde{\ell}_{i_1} + \dots + \text{ord}_\mu \tilde{\ell}_{i_s} = \text{ord}_\mu \tilde{\ell}_k} \beta_{i_1 \dots i_s}^k \tilde{\ell}_{i_1} * \dots * \tilde{\ell}_{i_s} + R_k,$$

где R_k содержит нелинейные степенные моменты порядка выше $\text{ord}_\mu \tilde{\ell}_k$. Поскольку в последнем представлении $\text{ord}_\mu \tilde{\ell}_{i_j} < \text{ord}_\mu \tilde{\ell}_k$, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Существует полиномиальная невырожденная замена переменных $\Phi(x)$ в системе (1), которая приводит ряд нелинейных степенных моментов (2) к каноническому виду*

$$\Phi(S_{a,b_1,\dots,b_h}(\theta, u)) = \begin{pmatrix} \tilde{\ell}_1 \\ \dots \\ \tilde{\ell}_n \end{pmatrix} + \rho, \quad (8)$$

где i -я компонента ρ содержит нелинейные степенные моменты порядка больше $\text{ord}_\mu \tilde{\ell}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы об аппроксимации [3], которое, в свою очередь, существенно использует конечномерность градуировки μ . Для постороения канонической формы ряда (8) в случае бесконечномерной градуировки мы введем понятие конечномерной аппроксимирующей градуировки.

§4. Аппроксимирующие градуировки

Отметим, что в случае, когда градуировка μ алгебры A бесконечномерна, алгебра может не допускать разложения (5). Более того, алгебра может не допускать разложения $A = J(F) \oplus J(F)^\perp$, где $J(F)$ – правый идеал, построенный по множеству F μ -однородных Ли-элементов.

Пример. Пусть μ – градуировка “по длине”, а множество F состоит из элементов $\alpha_m \xi_m^1 - \xi_0^1$, $m \geq 1$, таких, что $\alpha_m \neq 0$, $m \geq 1$. Тогда элемент $\xi_0^1 \notin F$ нельзя представить в виде суммы $\xi_0^1 = y + z$, где $y \in J(F)$, $z \in J(F)^\perp$. Примером системы вида (1), имеющей такой идеал, может служить одномерная

система с одномерным управлением $\dot{x} = e^t u_1$, $x \in \mathbb{R}$. Действительно, ряд (2) для этой системы имеет вид $S(\theta, u) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \xi_m^1(\theta, u)$, так что $v_m^1 = -\frac{1}{m!}$, $m \geq 0$, и, следовательно, $m!v(\xi_m^1) - v(\xi_0^1) = 0$, $m \geq 1$. Таким образом, применяя к этой системе процедуру построения идеала (7), описанную в §3, получаем, что идеал системы имеет вид $J = J(F_1)$, $F_1 = \{m!v(\xi_m^1) - v(\xi_0^1) : m \geq 1\}$.

Покажем далее, что при некоторых дополнительных предположениях приведение к канонической форме ряда (2), соответствующего системе, возможно и в случае бесконечномерной градуировки.

В качестве примера рассмотрим градуировку $\mu = (N, \{A_r\}_{r \in \mathbb{N}})$ "по длине". Зафиксируем n -мерную систему вида (1). Пусть v — отображение, определяемое рядом (2), и пусть для каждого $r \geq 1$ имеет место представление

$$L \cap A_r = L'_r \oplus L''_r, \quad (9)$$

где L'_r, L''_r — подпространства, состоящие из μ -однородных Ли-элементов, причем для каждого $r \geq 1$

$$\begin{aligned} v(L''_r) &\subset v(L'_1 \oplus \dots \oplus L'_{r-1}), \\ \dim(L'_1 \oplus \dots \oplus L'_r) &= \dim(v(L'_1 \oplus \dots \oplus L'_r)). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что тогда подпространство $L' = \sum_{r=1}^{\infty} L'_r$ является n -мерным.

Пусть $\{\ell_i\}_{i=1}^n$ — базис L' , составленный из μ -однородных Ли-элементов, причем считаем $\text{ord}_{\mu} \ell_i \leq \text{ord}_{\mu} \ell_j$ при $i < j$. Каждый такой Ли-элемент ℓ_i представляет собой конечную линейную комбинацию базисных элементов вида $\xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$, каждый из которых, в свою очередь, является произведением конечного множества элементов порождающего базиса Bas . Пусть $\text{Bas}' \subset \text{Bas}$ — (конечное) множество всех таких порождающих элементов. Построим аппроксимирующую градуировку μ_a по формуле (4), полагая

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{Lin}\{\text{Bas}'\}, \quad B_2 = \dots = B_{r_0} = \emptyset, \\ B_r &= \text{Lin}\{\xi_m^i : \xi_m^i \in \text{Bas} \setminus (\text{Bas}' \cup B_{r_0+1} \cup \dots \cup B_{r-1})\}, \quad r \geq r_0 + 1, \end{aligned}$$

где $r_0 = \text{ord}_{\mu} \ell_n$. Как доказано выше, μ_a является канонической конечномерной градуировкой.

Применяя теорему 3, получаем, что ряд нелинейных степенных моментов (2), соответствующий системе (1), полиномиальным преобразованием приводится к канонической форме (8), где компоненты ρ_i содержат нелинейные степенные моменты, имеющие в аппроксимирующей градуировке μ_a порядок больше $\text{ord}_{\mu_a} \tilde{\ell}_i$, $i = 1, \dots, n$. Покажем, что эти моменты имеют порядок больше $\text{ord}_{\mu} \tilde{\ell}_i$ и в исходной градуировке μ .

Зафиксируем i и рассмотрим нелинейный степенной момент $z = \xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$, входящий в ρ_i (с ненулевым коэффициентом). Предположим, что этот элемент имеет порядок не больше $\text{ord}_{\mu} \tilde{\ell}_i$ в исходной градуировке "по длине", т.е. $\text{ord}_{\mu} z = k \leq \text{ord}_{\mu} \tilde{\ell}_i$. Заметим, что если z является произведением элементов $\xi_{m_1}^{i_1}, \dots, \xi_{m_k}^{i_k} \in \text{Bas}'$, то $\text{ord}_{\mu} z = \text{ord}_{\mu_a} z > \text{ord}_{\mu_a} \tilde{\ell}_i = \text{ord}_{\mu} \tilde{\ell}_i$. Следовательно, найдется хотя бы один такой номер $1 \leq j \leq k$, что $\xi_{m_j}^{i_j} \notin \text{Bas}'$.

Тогда элемент z можно представить в виде суммы $z = \sum \ell_s \vee y_s$, где $\ell_s \in L''_{r_s}$, $r_s = \text{ord}_\mu \ell_s$, а y_s — нелинейные степенные моменты. Например, если $\xi_{m_2}^{i_2} \notin \text{Bas}'$, то $z = \xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k} = -\xi_{m_2}^{i_2} \xi_{m_1 m_3 \dots m_k}^{i_1 i_3 \dots i_k} + [\xi_{m_1}^{i_1}, \xi_{m_2}^{i_2}] \xi_{m_3 \dots m_k}^{i_3 \dots i_k}$, так что $\ell_1 = -\xi_{m_2}^{i_2} \in L'_1$, $\ell_2 = [\xi_{m_1}^{i_1}, \xi_{m_2}^{i_2}] \in L'_2$. Однако в силу (10) имеем $v(\ell_s) \subset v(L'_1 + \dots + L'_{r_s-1})$, следовательно, $v(\ell_s \vee y_s) \in \sum_{\text{ord}_\mu \ell < r_s} v(\ell \vee y_s)$.

Итак, если нелинейный степенной момент $z = \xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ содержит элемент $\xi_{m_j}^{i_j} \notin \text{Bas}'$, то $v(z) \in \text{Lin}\{v(z_s^1)\}$, где $\text{ord}_\mu z_s^1 < \text{ord}_\mu z$. Применяя далее эти рассуждения к элементам z_s^1 , получим (за конечное число шагов), что $v(z) \in \text{Lin}\{v(\hat{z}_s)\}$, где $\text{ord}_\mu \hat{z}_s < \text{ord}_\mu z$, причем нелинейные степенные моменты $\hat{z}_s$ содержат только элементы Bas' . Следовательно, $\text{ord}_\mu \hat{z}_s = \text{ord}_{\mu_a} \hat{z}_s$. Итак, имеем $\text{ord}_{\mu_a} \hat{z}_s = \text{ord}_\mu \hat{z}_s < \text{ord}_\mu z \leq \text{ord}_\mu \tilde{\ell}_i = \text{ord}_{\mu_a} \tilde{\ell}_i$. Это означает, что $(v(\hat{z}_s))_i = 0$, а следовательно, элемент $z = \xi_{m_1 \dots m_k}^{i_1 \dots i_k}$ не входит в ρ_i .

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть для ряда (2), отвечающего системе (1), выполнено условие (9), (10). Тогда существует полиномиальная невырожденная замена переменных $\Phi(x)$ в системе (1), которая приводит ряд нелинейных степенных моментов (2) к каноническому виду (8), где компоненты ρ_i содержат нелинейные степенные моменты порядка больше $\text{ord}_\mu \tilde{\ell}_i$, $i = 1, \dots, n$, в градуировке "по длине".

Замечание. Хотя рассуждения были проведены для градуировки "по длине", они могут быть перенесены на случай произвольной канонической бесконечномерной градуировки.

Пример. Пусть $n = 3$, $h = 2$. Рассмотрим следующую систему вида (1):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ x_1^2 + x_2^3 + x_1 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^2 + x_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 \quad (11)$$

Для этой системы ряд нелинейных степенных моментов (2) имеет вид

$$S_{a,b_1,b_2}(\theta, u) = \begin{pmatrix} -\xi_0^1 \\ -\xi_0^2 \\ -2\xi_{01}^{11} + \xi_{00}^{11} + 6\xi_{001}^{222} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Рассмотрим в алгебре нелинейных степенных моментов градуировку "по длине". Рассмотрим подпространство $L \cap \mathcal{A}_1$, являющееся линейной оболочкой моментов длины 1. Оно допускает представление $L \cap \mathcal{A}_1 = L'_1 \oplus L''_1$, где

$$\begin{aligned} L'_1 &= \text{Lin}\{\xi_0^1, \xi_0^2\}, \\ L''_1 &= \text{Lin}\{\xi_m^i : m \geq 1, i = 1, 2\}, \end{aligned}$$

причем $v(L'_1) = \text{Lin}\{e_1, e_2\}$, а $v(L''_1) = 0$. Далее, для подпространства $L \cap \mathcal{A}_2$ рассмотрим следующее представление: $L \cap \mathcal{A}_2 = L'_2 \oplus L''_2$, где

$$\begin{aligned} L'_2 &= \text{Lin}\{\xi_0^1, \xi_1^1\}, \\ L''_2 &= \text{Lin}\{[\xi_m^i, \xi_k^j] : m, k \geq 0, i, j = 1, 2\} \setminus \{[\xi_0^1, \xi_1^1]\}. \end{aligned}$$

Тогда $v(L'_1 + L'_2) = \mathbb{R}^3$. Для всех $r \geq 3$ имеем $L'_r = \{0\}$, $L''_r = L \cap A_r$. Таким образом, условие (10) выполнено. В качестве базиса $L' = L'_1 + L'_2$ выберем элементы $\ell_1 = \xi_0^1$, $\ell_2 = \xi_0^2$, $\ell_3 = [\xi_0^1, \xi_1^1]$, тогда $\text{Bas}' = \{\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_1^1\}$. Построим конечномерную аппроксимирующую градуировку μ_a по формуле (4), полагая

$$B_1 = \text{Lin}\{\xi_0^1, \xi_0^2, \xi_1^1\}, B_2 = \emptyset, \\ B_3 = \text{Lin}\{\xi_1^2\}, B_{2r} = \text{Lin}\{\xi_r^1\}, B_{2r+1} = \text{Lin}\{\xi_r^2\}, r \geq 2.$$

Тогда имеем $\text{ord}_{\mu_a} \ell_1 = \text{ord}_{\mu_a} \ell_2 = 1$ и $\text{ord}_{\mu_a} \ell_3 = \text{ord}_{\mu_a} \xi_{00}^{11} = 2$. В то же время элемент ξ_{001}^{222} (имеющий длину 3) в градуировке μ_a имеет порядок 5.

Учитывая, что в аппроксимирующей градуировке $v(L \cap (A_1 + A_2)) = 3$, положим $r_0 = 2$ и $F_1 = \text{Lin}\{\xi_1^1\}$, $F_2 = \text{Lin}\{[\xi_0^1, \xi_0^2], [\xi_0^2, \xi_1^1]\}$ и построим правый идеал J , отвечающий системе (11), по формуле (7). Тогда имеем $\tilde{\ell}_1 = \ell_1 = \xi_0^1$, $\tilde{\ell}_2 = \ell_2 = \xi_0^2$, $\tilde{\ell}_3 = \xi_{01}^{11}$ (поскольку $\xi_{10}^{11} \in J$). Далее, имеем $\xi_{00}^{11} = \frac{1}{2}\xi_0^1 * \xi_0^1$. Следовательно, полиномиальная замена переменных в системе (11) вида $z = \Phi(x) = (x_1, x_2, x_3 - \frac{1}{2}x_1^2)$ приводит ряд (12) к следующей канонической форме в градуировке μ_a

$$\Phi(S_{a,b_1,b_2}(\theta, u)) = \begin{pmatrix} -\xi_0^1 \\ -\xi_0^2 \\ -2\xi_{01}^{11} \end{pmatrix} + \rho, \quad (13)$$

где $\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\rho_3 = 6\xi_{001}^{222}$, так что ρ_3 содержит момент, имеющий порядок больший, чем порядок ξ_{01}^{11} , как в аппроксимирующей градуировке, так и в исходной градуировке "по длине". Таким образом, замена переменных $z = \Phi(x)$ приводит ряд (12) к канонической форме (13) и в градуировке "по длине".

ЛИТЕРАТУРА

1. G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich. Moment approach to nonlinear time optimality // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2000. – **38**. – P. 1707-1728.
2. G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, Representations of control systems in the Fliess algebra and in the algebra of nonlinear power moments // Syst. Control Lett. – 2002. – **47**. – P. 227-235.
3. G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment min-problems // SIAM J. on Control and Optimiz. – 2003. – **42**, No.4. – P.1325-1346.
4. R. M. Bianchini, G. Stefani. Graded approximations and controllability along a trajectory // SIAM J. Control and Optimiz. – 1990. – **28**. – P. 903-924.
5. R. Ree. Lie elements and an algebra associated with shuffles // Annals of Math. – 1958. – **68**, No.2. – P. 210-220.
6. G. M. Sklyar, S. Yu. Ignatovich, P. Yu. Barkhaev. Algebraic classification of nonlinear steering problems with constraints on control // Advances in Math., to appear.

Теорема о сохранении непрерывности

С.Д. Димитрова, Д.Б. Димитров

НТУ "ХПИ", Украина, ИУ-Варна, Болгария

В статье изучается вопрос о сохранении непрерывности решений разностного уравнения $\Phi(hx) - \Phi(x) = F_h(x)$, где функции заданы на мультипликативной топологической группе со значениями в сепарабельном пространстве Фреше. Для множества значений решения требуется слабая полнота и ограниченность на некотором относительно плотном множестве. Тогда из непрерывности правой части следует непрерывность решения. Рассмотрен и локальный вариант. Из доказанных теорем о сохранении непрерывности как следствия получаются теоремы о почти периодичности, Левитановской почти периодичности, почти автоморфности решений разностного уравнения и соответствующие теоремы об интеграле и криволинейном интеграле, не зависящем от пути интегрирования. Теорема о непрерывности обобщает многие результаты: теорему Боля-Бора, теорему Кадеца, теорему Досса, теорему Болеса, теорему Любарского, результаты авторов о криволинейном интеграле. Одновременно с этим она переносит их на более широкий класс пространств Фреше и уменьшает требование полной ограниченности на ограниченность на некотором относительно плотном множестве.

2000 *Mathematics Subject Classification* 43A60.

Настоящая работа изучает сохранение непрерывности решений разностного уравнения

$$\begin{cases} \phi(hx) - \phi(x) = F_h(x) \\ \phi(e) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где функции заданы на мультипликативной топологической группе G со значениями в сепарабельном пространстве Фреше. В [4] было показано, что из непрерывности правой части (1) и ограниченности решения на некотором относительно плотном множестве в пространствах Фреше, не содержащих подпространств изоморфных c_0 следует, что решение также непрерывно. В данной работе на пространство значений не накладываются особые ограничения. Вместо этого требуется слабая полнота множества значений решения. Приведен и локальный вариант непрерывности. Из доказанных теорем о сохранении непрерывности как следствия получаются теоремы о почти периодичности, Левитановской почти периодичности, почти автоморфности решений разностного уравнения и соответствующие теоремы об интеграле и

криволинейном интеграле, не зависящем от пути интегрирования. Терминология и основные определения даны в [4].

Сформулируем сначала локальное свойство непрерывности.

Теорема 1 Если Y -пространство Фреше, решение уравнения (1) существует и ограничено в некоторой окрестности V точки, множество значений решения $\phi(Vx)$ находится в относительно слабо полном множестве в Y , правая часть $F_h(x)$ непрерывна в точке x для любого $h \in V$, тогда решение непрерывно в точке.

Доказательство. Топологию пространства Y можно задать при помощи эквивалентной счетной возрастающей системы полунорм вида

$$p_1(y) \leq p_2(y) \leq \dots \leq p_k(y) \leq \dots$$

Докажем, что решение $\phi(x)$ непрерывно в точке. Допустим противное. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$, полунорма p , последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \rightarrow e$:

$$p[\phi(x_\alpha x) - \phi(x)] \geq \varepsilon_0 \quad \alpha \in A \quad (2)$$

Аналогично тому как в [4, теорема 1] из последовательности $\{x_\alpha\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{h_s\}_{s=1}^\infty$, для которой сходятся ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\langle y^*, F_{h_s}(x) \rangle|, \quad \forall y^* \in Y^*,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} p_k(F_{h_1 h_2 \dots h_s}(h_{s+1}x) - F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x)), \quad \forall k \in N, \quad \forall s, \quad h_1 h_2 \dots h_s \in V,$$

и это верно для любой ее подпоследовательности.

Ряд $\sum_{s=1}^{\infty} [F_{h_1 h_2 \dots h_s}(h_{s+1}x) - F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x)]$, сходится сильно к элементу пространства Y . Следовательно, $\forall y^* \in Y^*$ существует предел

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \langle y^*, F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{k-1} \langle y^*, F_{h_s}(x) \rangle +$$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{k-1} [F_{h_1 h_2 \dots h_s}(h_{s+1}x) - F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x)].$$

Это означает, что последовательность

$$\{F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x)\}_{s=1}^\infty = \{\phi(h_1 h_2 \dots h_s x) - \phi(x)\}_{s=1}^\infty$$

сходится на любом функционале $y^* \in Y^*$ для любой подпоследовательности $\{h_{n_k}\}_{k=1}^\infty$. Так как множество значений решения находится в слабо полном множестве, то $F_{h_1 h_2 \dots h_s}(x) = \phi(h_1 h_2 \dots h_s x) - \phi(x)$ сходится к элементу из Y . Тогда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \langle y^*, F_{h_s}(x) \rangle = \langle y^*, z \rangle, \quad z \in Y.$$

Это означает, что ряд $\sum_{s=1}^{\infty} F_{h_s}(x)$ слабо сходится к элементу $F \in X$. Это верно для каждой подпоследовательности, т.е. он сходится слабо безусловно. Согласно теореме Орлича-Петтиса [7], распространенной и на пространства Фреше, ряд безусловно сходится, следовательно общий член стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} p(F_{h_s}(x)) = \lim_{s \rightarrow \infty} p(\phi(h_s x) - \phi(x)) = 0$$

что противоречит неравенству (2).

Замечание. Точка x может принадлежать и пополнению группы G .

Если правая часть уравнения (1) непрерывна в любой точке группы G имеет место следующий результат.

Теорема 2 Если Y -пространство Фреше, правая часть $F_h(x)$ непрерывна по x для любого h ($x, h \in G$), решение уравнения (1) существует и ограничено на некотором относительно плотном множестве, множество значений решения находится в относительно слабо полном множестве в Y , тогда решение непрерывно на топологической группе $(G, \mathfrak{F})$.

Доказательство. Из ограниченности на некотором относительно плотном множестве и непрерывности правых частей следует ограниченность решения в некоторой окрестности единицы [4, лемма 7]. Применяя теорему 1 получаем непрерывность в единице. Используя непрерывность решения в единице, непрерывность правой части и тождество

$$\phi(hx) - \phi(x) = F_{\theta}(mx_0) - F_{\theta}(x_0) + \phi(mx_0) - \phi(x_0), \quad x = \theta x_0, \quad m = \theta^{-1}h\theta,$$

получаем непрерывность решения в любой точке.

Следствие 1 Пусть на топологической группе $(G, \mathfrak{F})$ задано разностное уравнение (1) с почти периодической по Левитану правой частью. Если множество значений решения $\{\phi(x)\}_{x \in E}$ ограничено на некотором относительно плотном множестве E и множество значений решения $\phi(x)$ принадлежит слабо полному множеству в пространстве Фреше Y , то решение $\phi(x)$ является почти периодической по Левитану функцией.

Доказательство. Решение непрерывно в исходной топологии группы. На группе G введем более слабую топологию $\mathfrak{F}_N$ с помощью окрестностей:

$$B_{\sigma, \varepsilon}(N) = \left\{ \tau \in G : \sup_{h \in \sigma} \sup_{a \in N} p[F_h(\tau a) - F_h(a)] < \varepsilon \right\},$$

$\varepsilon > 0$, σ, N -конечные множества группы G . В введенной топологии функции $F_h(x)$ непрерывны. Окрестности $B_{\sigma, \varepsilon}(N)$ являются относительно плотными множествами. Из теоремы 2 следует непрерывность решения $\phi(x)$ в топологии $\mathfrak{Z}_N$, что означает его почти периодичность по Левитану.

Имея ввиду, что интеграл с переменным верхним пределом и криволинейный интеграл, не зависящий от пути интегрирования, удовлетворяют уравнению (1), из следствия 1 имеем результаты авторов [3], Болеса [1], Любарского [10].

Следствие 2 Пусть на группе G задано разностное уравнение (1) с почти автоморфной правой частью. Если множество значений решения $\{\phi(x)\}_{x \in E}$ ограничено на некотором относительно плотном множестве E и множество значений решения $\phi(x)$ принадлежит слабо полному множеству в пространстве Фреше Y , то решение $\phi(x)$ является почти автоморфной функцией.

Доказательство. На группе G вводится топология $\mathfrak{Z}_N$ как в следствии 1. Так как правая часть компактна при любом h и топология $\mathfrak{Z}_N$ состоит из относительно плотных множеств, то решение имеет относительно компактную область значений [4, лемма 6]. Компактная почти периодическая по Левитану функция является почти автоморфной [5], [2], [12].

Из следствия получаются результаты Болеса [1], авторов [3].

Следствие 3 Пусть на топологической группе $(G, \mathfrak{Z})$ задано разностное уравнение (1) с почти периодической правой частью. Если множество значений решения $\{\phi(x)\}_{x \in E}$ ограничено на некотором относительно плотном множестве E и множество значений решения $\phi(x)$ принадлежит слабо полному множеству в пространстве Фреше Y , то решение $\phi(x)$ является почти периодической функцией.

Доказательство. Так как правая часть непрерывна, то и решение непрерывно /теорема 2/ в исходной топологии группы. Всякая почти периодическая функция является почти автоморфной и согласно следствию 2 решение является непрерывной почти автоморфной функцией и поэтому является компактной функцией. На группе вводится топология $\mathfrak{Z}_1$ при помощи окрестностей

$$B_{\sigma, \varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{h \in \sigma} \sup_{a \in G} p[F_h(\tau a) - F_h(a)] < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

σ -конечное множество группы G .

Группа $(G, \mathfrak{Z}_1)$ является предкомпактной. Правая часть уравнения (1) является непрерывной в этой топологии. Решение непрерывно /теорема 2/ в этой топологии. Пополним группу до компактной группы T в этой топологии. Так как правая часть при любом $h \in G$ является почти периодической, то она непрерывна на T в топологии $\mathfrak{Z}_1$. Группа G плотна в T . Используя теорему 1 получаем, что решение непрерывно на T . Значит оно равномерно непрерывно на T и на G и является почти периодической функцией на группе G .

Из следствия 3 вытекают ранее полученные результаты Боля-Бора [9], Доса [11], Кадеца [8, теорема 2], Димитровой [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Болес Б. Р. Обобщение двух теорем М.И.Кадеца о неопределенном интеграле абстрактных почти периодических функций // Мат. заметки, 1971. -3.- С. 311-320.
2. Болес Басит Р. Некоторые задачи теории почти-периодических функций // Канд. дис., МГУ, 1971.
3. Димитров Д. Б., Димитрова С. Д. Почти автоморфность криволинейного интеграла в произвольных пространствах Фреше // Известия, ИУ-Варна - 1, 2001 - С. 35-46.
4. С. Д. Димитрова, Д. Б. Димитров, Об одном обобщении теоремы Боля-Бора для абстрактных функций, заданных на группе // Вісник ХНУ - Серія "Математика, прикладна математика і механіка"- 2003. - 582, - С. 150 - 161.
5. Димитрова С. Д., Димитров Д. Б. Эквивалентные определения абстрактных L -почти-периодических и почти автоморфных функций, заданных на группе // Известия, ИУ-Варна - 2, 2002 - С. 19-28.
6. Димитрова С. Д. Криволинейный интеграл от почти периодических и почти периодических по Левитану абстрактных функций. // Вісник ХНУ - Серія "Математика, прикладна математика і механіка"- 2001. -514, - С. 106-114.
7. Дэй М. М. Нормированные линейные пространства.-М.:ИЛ,-1961.- 232. с.
8. Кадец М. И. Об интегрировании почти периодических функций со значениями в пространстве Банаха. // Функциональный анализ и его приложения, -1969. - 3. - С. 71-74.
9. Левитан Б. М. Почти периодические функции. ГИТТЛ, 1953, 397 с.
10. Любарский М. Г. О неопределенном интеграле почти периодической по Левитану функции. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. -ХГУ, - 1972. - С. 139-150.
11. Doss R. On bounded functions with almost periodic differences. // Proc. Amer. Math. Soc. - 12. - 1961.-3.-p. 488-489.
12. Reich A. Prakompakte Gruppen and Fastperiodizitat. // Math. Z., 1970. - С. 218-234.

Распространение волн давления в толстостенной трубке
конечной длины из вязкоупругого материала:
приложение к распространению пульсовых волн в
артериальных руслах

Н.Н.Кизилова

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина

В работе представлены результаты исследования параметров волнового движения вязкой несжимаемой жидкости в системе, состоящей из длинной толстостенной вязкоупругой трубки, соединенной последовательно с двумя элементами, имеющими заданные проводимости. Система представляет собой модель артериального русла внутреннего органа, включенного в общую систему кровообращения. В рамках линеаризованных уравнений движения жидкости и стенки получено решение задачи в виде разложений по отдельным гармоникам, а также выражения для входной проводимости системы с учетом отражения волн на конце трубки. Численными методами получено решение дисперсионного уравнения и исследовано влияние механических и геометрических параметров модели на скорость распространения и затухания волн. Проведен анализ входной проводимости системы в широком диапазоне параметров модели, соответствующих артериальной системе человека. Показано, что входная проводимость достигает экстремальных значений на частотах, которые определяются длиной трубки. При этом амплитуда входной проводимости системы сильно зависит от параметров терминального элемента модели и слабо – от плотности и вязкости жидкости и материала стенки трубки, а также от ее внутреннего и внешнего диаметров. Полученные результаты могут быть положены в основу дополнительных и новых методик клинической диагностики состояния отдельных внутренних органов.

2000Mathematics Subject Classification 76D33, 76Z05, 74F10, 92C35.

1. Введение Волновые процессы в артериальных руслах животных и человека исследуются на основе моделей механики сплошных сред, описывающих распространение и отражение волн в системах деформируемых трубок с заданной геометрией [1]. При моделировании артериальных русел различных внутренних органов используется представление о дихотомически ветвящихся самоподобных системах трубок, для которых соотношения между длинами и диаметрами смежных трубок могут быть заданы на основе осреднения

результатов измерений [2,3]. Важным практическим приложением полученных теоретических результатов является физическое обоснование существующих методик диагностики заболеваний по параметрам пульсовых колебаний давления в артериях. Существующие методики, восходящие к традиционной восточной медицине, связаны с оценкой пульсовых смещений стенки сосуда при определенном его поджатии извне пальцами терапевта или датчиками соответствующего прибора. Новая методика, основанная на анализе спектра давления в произвольной поверхностной артерии, базируется на наличии у сосудистых русел отдельных органов собственных уникальных наборов резонансных частот [4-6]. Последнее свойство исследовалось на квазиодномерной модели движения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубке [7], в дихотомически ветвящихся системах трубок при наличии или отсутствии дополнительных соединений (анастомозов) [8,9]. Было показано, что резонансные свойства самоподобных ветвящихся русел определяются длиной начальной трубки и геометрией ветвлений [7-9]. Однако, поскольку для начальной артерии русла органа соотношение между толщиной стенки h и внутренним диаметром d удовлетворяет соотношению $h/d \geq 0.1$, то волновые явления в них должны быть рассмотрены на модели толстостенной трубки [1].

В данной работе представлены результаты исследования закономерностей распространения и отражения волн давления в толстостенной трубке из вязкоупругого материала, изучены резонансные свойства модели артериального русла внутреннего органа, которые могут быть положены в основу анализа результатов клинических измерений пульса и новых методик пульсовой диагностики.

2. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричное волновое движение вязкой несжимаемой жидкости в длинной толстостенной трубке кругового сечения, имеющей длину L и радиус a_0 , причем $a_0/L \ll 1$. Материал трубки считается несжимаемым однородным изотропным вязкоупругим. Трубка соединена последовательно с двумя элементами, имеющими проводимости $\Psi^\pm$ (рис.1), причем в общем случае $\Psi^\pm = \Psi_1^\pm + i\Psi_2^\pm$. Система может рассматриваться как модель артериального русла органа, который является элементом системы кровообращения. При этом трубка соответствует питающей артерии органа, проводимость Ψ^- отвечает терминальному элементу [1], соответствующему ветвящемуся артериальному руслу, расположенному вниз по течению, а проводимость Ψ^+ соответствует системе артерий, по которым кровь доставляется от сердца к данному органу. В физиологической литературе Ψ^+ называется передаточной функцией, а ее параметры определяются экспериментально [10]. Величина Ψ^- может быть рассчитана для русла с заданной геометрией и отражает состояние кровообращения в органе [3,7-9], а при экспериментальных исследованиях внутриорганной гемодинамики может быть вычислена как отношение амплитуд расхода Q и давления на входе в артериальное русло $\Psi = Q/p$ [1]. Давление P^- соответствует давлению в

венозном русле и может быть положено равным нулю, а P^+ - давление на входе в систему кровообращения, которое определяется работой сердечной мышцы и считается заданным.

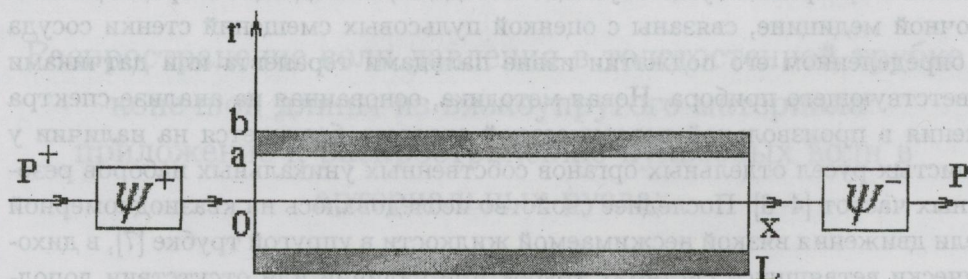


Рис.1. Схема сосудистого русла.

Полная система уравнений задачи, включающая линеаризованные уравнения Навье-Стокса в связанной с трубкой цилиндрической системе координат [1] и уравнения движения толстостенной цилиндрической оболочки [11], имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \\ \rho_w \frac{\partial u_r}{\partial t} &= -\frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu_w \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right) \\ \rho_w \frac{\partial u_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_w \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$ - скорость движения жидкости, $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ - перемещение точек стенки, p - гидростатическое давление в жидкости, ρ и ν - плотность и кинематическая вязкость жидкости, ρ_w и μ_w - плотность и динамический модуль жесткости материала стенки, θ - давление в стенке. Граничные условия на оси трубки представляют обычные условия осевой симметрии профиля скорости; на границе стенка-жидкость $r = a$ - условия непрерывности скорости и механических напряжений; на внешней границе - условия ненагруженности стенки:

$$r = 0: \quad v_r = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0,$$

$$r = a: v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}, \nu \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \mu_w \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$-p + 2\nu\rho \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\theta + 2\mu_w \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$r = b: \mu_w \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = 0, \quad -\theta + 2\mu_w \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0.$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость и стенка неподвижны $v_{r,x}|_{t=0} = 0$, $u_{r,x}|_{t=0} = 0$, а на входе в трубку $x = 0$ задана падающая волна $P^+ = P_f e^{i\omega t}$ с круговой частотой ω и амплитудой $P_f = P^+|_{t=0}$. При этом в соответствии с общей теорией в жидкости будут распространяться бегущие волны вида $f(t \pm x/c)$ при $t > 0$ со скоростью c вверх и вниз по течению. Кроме этого будем считать, что закрепление концов трубки (сердечная мышца в качестве входного резервуара и терминальное сосудистое русло на выходном сечении трубки) ограничивает перемещения ее стенок, так что $u_{r,x}|_{x=0,L} = 0$.

При исследовании волновых явлений в жидкости рассматривается распространение малых возмущений в виде суперпозиции бегущих волн [1]. Решение (1)–(2) описывает перемещение волн давления вверх и вниз по течению жидкости. Прохождение волны будет вызывать малые изменения радиуса трубки относительно начального значения 0 [1]. После решения задачи (1)–(2) профиль наружной и внутренней поверхностей трубки может быть определен по известному распределению перемещений $u_r(a)$, $u_r(b)$. Задача (1)–(2) рассматривалась в разных постановках, причем для случая продольно закрепленной трубки ($u_x(b) = 0$) решение задачи (1)–(2), полученное в 1957 г. Womersley [1], наиболее часто используется для проведения численных расчетов в литературе по физиологии кровообращения. В настоящей работе предложена схема артериального русла (рис.1), в которой наличие дополнительных элементов с проводимостями $\Psi_{\pm}$ будет приводить к отражению волн на концах трубки. Многочисленные расчеты показали, что учет отражения волны при $x = L$ приводит к получению реалистических двугорбых профилей давления и потока в трубке, соответствующих результатам измерений. Амплитуда и фаза отраженной волны определяются соотношением проводимостей трубок в месте их соединения. Для получения параметров отраженной волны следует задать условия непрерывности давления и расхода на конце трубки, которые записываются для интегральных параметров потока [1,7–9]:

$$x = 0: (P^+ - \langle p \rangle) \Psi^+ = Q, \quad x = L: (\langle p \rangle - P^-) \Psi^- = Q \quad (3)$$

где $\langle p \rangle = \frac{2}{a^2} \int_0^a r p dr$, $Q = 2\pi \int_0^a r v_x dr$ – среднее по сечению давление и объемный расход, давления P^+ и P^- считаются заданными (рис.1).

По данным измерений для ряда артерий их вязкоупругие свойства удовлетворительно описываются трехэлементными реологическими моделями, так

что для динамического модуля жесткости можно взять следующую зависимость [1,12]:

$$\mu_w = \frac{1 + i\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_2} \mu_0$$

где $\tau_{1,2}$ – времена запаздывания и релаксации, μ_0 – статический модуль жесткости материала.

3. Решение задачи. Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде разложений

$$f(t, r, x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(r) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \quad (4)$$

где $f = \{p, v_r, v_x, u_r, u_x, \theta\}$ – неизвестные функции, $F = \{P, V_r, V_x, U_r, U_x, \Theta\}$ – амплитуды, $\gamma_j = \alpha_j - i\zeta_j$, α_j и ζ_j – волновое число и постоянная затухания j -й гармоники, $\omega_j = 2\pi j f_0$ – круговая частота, f_0 – частота первой гармоники, которая определяется заданной частотой сокращений сердца, обычно $f_0 = 1 \div 1.5$ Гц. Подставляя (4) в (1) и удовлетворяя граничным условиям на оси трубки, получим:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{j=0}^{\infty} C_{1j} J_0(\xi_j) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \\ V_r &= \sum_{j=0}^{\infty} i\gamma_j (C_{2j} J_1(\xi_j) + C_{3j} J_1(\psi_j)) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \\ V_x &= \sum_{j=0}^{\infty} i(C_{2j} \gamma_j J_1(\xi_j) + C_{3j} \beta_j J_1(\psi_j)) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \\ U_r &= \sum_{j=0}^{\infty} i\gamma_j (C_{4j} J_1(\kappa_j r) + C_{5j} Y_1(\kappa_j r) + C_{6j} J_1(\xi_j) + C_{7j} Y_1(\xi_j)) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \\ U_x &= \sum_{j=0}^{\infty} (C_{4j} \kappa_j J_0(\kappa_j r) + C_{5j} \kappa_j Y_0(\kappa_j r) + C_{6j} i\gamma_j J_0(\xi_j) + C_{7j} i\gamma_j Y_0(\xi_j)) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \\ \Theta &= \sum_{j=0}^{\infty} (C_{8j} J_0(\xi_j) + C_{9j} Y_0(\xi_j)) e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\xi_j = i\gamma_j r$, $\psi_j = i\beta_j r$, $C_{2j} = iC_{1j}/(\rho\omega_j)$, $C_{8j} = C_{6j}\rho_w\omega_j^2$, $C_{9j} = C_{7j}\rho_w\omega_j^2$, $\beta_j^2 = \gamma_j^2 + i\omega_j/\nu$, $\kappa_j^2 = \omega_j^2\rho_w/\mu_w - \gamma_j^2$, C_{1j} – C_{9j} – неизвестные постоянные, $J_{0,1}$,

$Y_{0,1}$ – функции Бесселя первого и второго рода. Подставляя (5) в оставшиеся граничные условия (2), получим однородную систему линейных уравнений для неизвестных C_{2j} – C_{7j} :

$$M \begin{pmatrix} C_{3j} \\ C_{4j} \\ C_{5j} \\ C_{6j} \\ C_{7j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} g_9 & g_{10} & g_{13} & g_{14} & g_{11} & g_{12} \\ g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} & g_{19} & g_{20} \\ g_3(a, Y) & g_3(a, J) & g_4(a, Y) & g_4(a, J) & g_6 & g_5 \\ g_1(a, Y) & g_1(a, J) & g_2(a, Y) & g_2(a, J) & g_8 & g_7 \\ g_3(b, Y) & g_3(b, J) & g_4(b, Y) & g_4(b, J) & 0 & 0 \\ g_1(b, Y) & g_1(b, J) & g_2(b, Y) & g_2(b, J) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $g_1(x, G) = \rho_w \omega_j^2 G_0(ix\gamma_j) - 2\mu_w \gamma_j^2 G_1'(ix\gamma_j)$, $g_2(x, G) = 2i\gamma_j \kappa_j G_1'(i\kappa_j)$, $g_3(x, G) = 2\mu_w \gamma_j^2 G_1(ix\gamma_j)$, $g_4(x, G) = (\gamma_j^2 - \kappa_j^2) G_1(x\kappa_j)$, $g_5 = -2\nu\rho_j^2 J_1(i\alpha\gamma_j)$, $g_6 = -\nu\rho_j^2 (\gamma_j^2 + \kappa_j^2) J_1(i\alpha\kappa_j)$, $g_7 = 2\nu\rho_j^2 J_1'(i\alpha\gamma_j) + i\rho_w \omega_j J_0(i\alpha\gamma_j)$,

$g_8 = 2\nu\rho_j \gamma_j \kappa_j J_1'(i\alpha\kappa_j)$, $g_9 = i\omega_j \gamma_j Y_0(i\alpha\gamma_j)$, $g_{10} = i\omega_j \gamma_j J_0(i\alpha\gamma_j)$, $g_{11} = -\kappa_j J_0(i\alpha\kappa_j)$, $g_{12} = -\gamma_j J_0(i\alpha\gamma_j)$, $g_{13} = \omega_n \kappa_j Y_0(\alpha\kappa_j)/\mu_w$, $g_{14} = \omega_n \kappa_n J_0(\alpha\kappa_j)/\mu_w$, $g_{15} = \omega_j Y_1(i\alpha\gamma_j)$, $g_{16} = \omega_j J_1(i\alpha\gamma_j)$, $g_{17} = \omega_j Y_1(\alpha\kappa_j)/\mu_w$, $g_{18} = \omega_n J_1(\alpha\kappa_j)/\mu_w$, $g_{19} = iJ_1(i\alpha\kappa_j)$, $g_{20} = iJ_1(i\alpha\gamma_j)$. Штрих обозначает производную от соответствующей функции Бесселя по ее аргументу.

Система (6) имеет нетривиальное решение если $\det(M) = 0$. Последнее условие приводит к дисперсионному уравнению, из которого можно определить комплексную постоянную распространения $\gamma_j(\omega_j)$. Решение (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{3j} &= -\Delta_{53} C_{2j} / \Delta_{63}, & C_{4j} &= \Delta_{43} C_{2j} / \Delta_{63}, & C_{5j} &= -\Delta_{33} C_{2j} / \Delta_{63}, \\ C_{6j} &= \Delta_{23} C_{2j} / \Delta_{63}, & C_{7j} &= -\Delta_{13} C_{2j} / \Delta_{63} \end{aligned}$$

где $C_{2j} = iC_{1j}/(\rho\omega_j)$, Δ_{ij} – минор 5-го порядка, который получается из M путем удаления i -й строки и j -го столбца. Используя полученные соотношения, можно вычислить амплитуды отдельных гармоник объемного расхода $Q_j = 2\pi \int_0^a r V_x(r) dr$ и входной проводимости $\Psi_j = Q_j / \langle P_j \rangle$, $\langle P_j \rangle = \frac{2}{a^2} \int_0^a r P_j(r) dr$:

$$Q_j = \operatorname{Re} \left(\frac{\gamma_j C_{1j} J_0(i\alpha\gamma_j) \Lambda_j \Psi_{0j}}{\bar{\gamma}_j} \right), \quad \Psi_j = -\frac{i\Psi_{0j} \Lambda_j}{\bar{\gamma}_j}, \quad (7)$$

$$\Lambda_j = \frac{2(J_1(i\alpha\kappa_j) \Delta_{53} / \Delta_{63} - J_1(i\alpha\gamma_j))}{\alpha\gamma_j J_0(i\alpha\gamma_j)}$$

где $\Psi_{0j} = \pi a_0^2 / (\rho c_j)$ – характеристическая проводимость трубки для j -й гармоники, распространяющейся со скоростью c_j .

Теперь, после вычисления интегральных параметров течения $\langle p \rangle$, Q можно использовать условия (3) для определения характеристик отраженной волны. Обозначим амплитуды волн, распространяющиеся вдоль оси x и в противоположном направлении P_f и P_b соответственно. Тогда решение задачи для амплитуд давления и расхода с учетом отражения волн можно представить в виде суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$\begin{aligned} P_j &= P_{fj} e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} + P_{bj} e^{i(\omega_j t + \gamma_j (x - 2L))}, \\ Q_j &= \Psi_{0j} (P_{fj} e^{i(\omega_j t - \gamma_j x)} - P_{bj} e^{i(\omega_j t + \gamma_j (x - 2L))}) \end{aligned} \quad (8)$$

где P_{bj} , P_{fj} – осредненные по сечению гармоники давления p в разложении (5), которые являются решением задачи (1)–(2). При этом амплитуда отраженной волны определяется из условий (3), а амплитуда падающей волны – из начальных условий (2). На конце трубки фазы падающей и отраженной волн совпадают, как это следует из (8) при подстановке $x = L$. Подставляя (7) в (3), получим выражения для амплитуды падающей волны и коэффициента отражения $\Gamma_j = P_{bj} / P_{fj}$ на конце трубки в виде:

$$\begin{aligned} P_{fj} &= \frac{P_j \left(\Psi_{0j} (\Psi^-)^{-1} + 1 \right) e^{\gamma_j L} + P_j^- \left(\Psi_{0j} (\Psi^+)^{-1} - 1 \right)}{2 \left(\left(1 + \Psi_{0j}^2 (\Psi^+ \Psi^-)^{-1} \right) sh(\gamma_j L) + \Psi_{0j} \left((\Psi^+)^{-1} + (\Psi^-)^{-1} \right) ch(\gamma_j L) \right)} \\ \Gamma_j &= \frac{P_j \left(\Psi_{0j} (\Psi^-)^{-1} - 1 \right) + P_j^- e^{\gamma_j L} \left(\Psi_{0j} (\Psi^+)^{-1} + 1 \right)}{P_j \left(\Psi_{0j} (\Psi^-)^{-1} + 1 \right) + P_j^- e^{-\gamma_j L} \left(\Psi_{0j} (\Psi^+)^{-1} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Psi^\pm$ – коэффициенты в разложениях соответствующих функций в ряды вида (4).

После интегрирования и определения среднего давления получим выражения для входной проводимости $\Psi_j = \psi_j e^{i\phi_j}$, где $\{\psi_j, \phi_j\}_{j=0}^\infty$ – амплитудный и фазовый спектр входной проводимости. Эти параметры могут быть получены экспериментально путем синхронного измерения средней скорости и давления на входе в артериальное русло органа [1]. Исследование зависимости амплитудного и фазового спектра от механических параметров системы представляет собой актуальную задачу, поскольку позволяет выяснить возможные принципы диагностики состояния органа по параметрам отраженной волны давления (пульсовая диагностика) и скорости кровотока.

4. Численные расчеты и анализ результатов. Решение дисперсионного уравнения исследовалось ранее для тонкостенных трубок $((b - a)/a \leq$

0.1) при разных условиях закрепления ($u_x = 0$), при ряде упрощающих предположений ($v_r|_{r=a} = 0$, $\partial v_x / \partial r|_{r=a} = 0$) [1]. При этом вид матрицы M существенно упрощается, а дисперсионное уравнение сводится к биквадратному относительно γ_j , причем во всех рассмотренных случаях для волн в жидкости выражение для γ_j имеет вид [1]:

$$\gamma_j = \frac{\omega_j}{c_0 \sqrt{1 - F_{10j}}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{b-a}{2a\rho\mu_0}}, \quad F_{01j} = \frac{2J_1(\beta_j i^{3/2})}{\beta_j i^{3/2} J_0(\beta_j i^{3/2})}, \quad \beta_j = a \sqrt{\frac{\omega_j}{\rho\nu}}$$

где $\alpha_j = \text{Re}(\gamma_j)$, $\zeta_j = -\text{Im}(\gamma_j)$. Исследование приближенных решений полученного выше дисперсионного уравнения путем разложения функций $J_{0,1}$, $Y_{0,1}$ в ряды приводит к появлению значительных погрешностей в определении ζ_j по сравнению с результатами измерений для артериальных сосудов [12]. Поэтому в данной работе решение уравнения проводилось численно методом итераций. Для численных расчетов использовались следующие значения параметров трубки и жидкости: $a = 2.5 \cdot 10^{-3}$ м, $b = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $\rho = 1.05$ кг/м³, $\nu = 4.29 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho_w = 1.12$ кг/м³, $\tau_1 = 0.045$ с, $\tau_2 = 0.035$ с, $\mu_0 = 6 \cdot 10^5$ Па, $f_0 = 1.25$ Гц.

Традиционно дисперсионные зависимости представляются в виде непрерывных кривых $c(\omega)$, которые являются решением дисперсионного уравнения. В качестве иллюстрации результаты расчетов дисперсионной зависимости $c(\omega)$ приведены на рис.2а для трубок с разными внутренними радиусами при постоянстве остальных параметров. При этом скорости отдельных мод могут быть найдены на основе кривых, приведенных на рис.2а, путем выбора дискретного набора значений круговой частоты $\{2\pi n f_0\}_{n=1}^N$ для заданного значения f_0 . Из рис.2а видно, что, начиная с некоторого значения диаметра трубки, скорость выходит на постоянный уровень значений, который определяется только упруговязкими свойствами материала трубки и слабо зависит от частоты гармоник. Таким образом, при $f_0 = 1$ Гц для артерий с диаметром $d > 0.005$ м дисперсия скорости существенна лишь для первых четырех гармоник. Затухание волн, как следует из (4), определяется величиной $e^{-\zeta_j x}$. Параметр $k_j = e^{-\zeta_j \lambda_j}$, где λ_j — длина волны j -й гармоники, называется скоростью затухания гармоники [1]. Результаты расчетов зависимости $k(\omega)$ в виде непрерывных кривых для трубок с разными радиусами приведены на рис.2б. Значения скорости затухания для отдельных мод также могут быть оценены по представленным кривым путем выбора дискретного набора значений ω_j . Полученная зависимость $k(\omega)$ согласуется с результатами предыдущих теоретических расчетов и данными измерений для артериальной системы собаки и человека [1,12]. Затухание высокочастотных гармоник приводит к тому, что первые 4-6 гармоник разложений вида (4) практически полностью описывают параметры волн, зарегистрированных в крупных и средних артериях.

Результаты расчетов входной проводимости с учетом отражения волн на конце трубки по формулам (7),(9) показали, что при вариации всех параметров модели в пределах двух порядков относительно приведенных выше

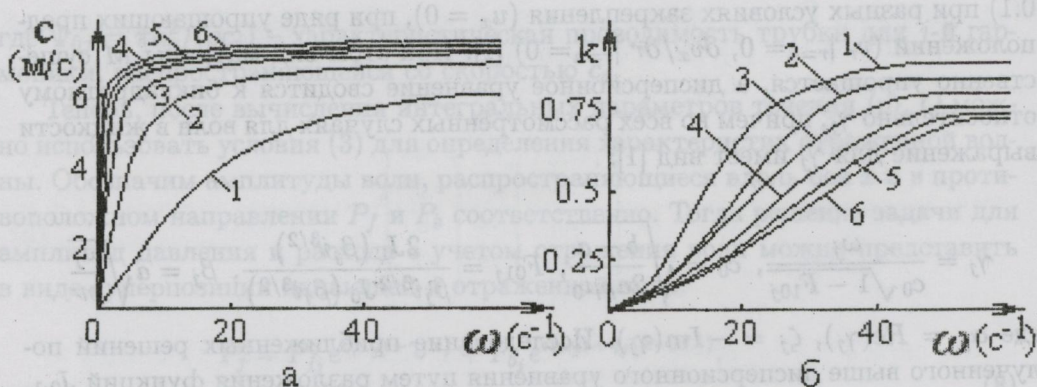


Рис.2. Зависимости $c(\omega)$ (а) и $k(\omega)$ (б). Кривые 1-6 соответствуют значениям $a = (1-6) \cdot 10^{-3}$ м с шагом 10^{-3} м.

характерных средних значений, входная проводимость слабо зависит от значений $a, b, (b-a)/a, \nu, \rho, \rho_w$, но существенно меняется при изменении вязкоупругих свойств стенки $\tau_{1,2}, \mu_0$ и, в особенности, длины трубки и величины проводимостей $\Psi^\pm$. При этом для любого фиксированного набора параметров зависимость амплитуды входной проводимости от частоты $\psi(\omega)$ имеет локальные максимумы и минимумы. В качестве иллюстрации зависимость между безразмерными параметрами ψ° и $\eta = \operatorname{tg}(\omega L/c)$ приведена на рис.3 для разных значений безразмерных проводимостей $\Psi^\pm/\Psi_0$ элементов модели. Численный анализ показывает, что изменения экстремальных значений ψ° определяются параметрами терминального элемента, то есть структурой и состоянием кровообращения в артериальном русле исследуемого органа, как его резистивной частью, так и величиной, связанной с податливостью артерий и кровенаполнением органа [1]. Таким образом, для заданной трубки всегда имеется набор частот, на которых входная проводимость имеет максимум (минимум). При этом волна давления, отраженная на входе в трубку и распространяющаяся в обратном направлении по сосудистой системе, будет на соответствующих частотах достигать минимума (максимума). Кроме этого, волна объемного расхода на входе в трубку будет иметь на соответствующих частотах максимальное (минимальное) значение. Полученные расчетные результаты могут быть проверены путем регистрации спектра волны давления в магистральных артериях или спектра волны расхода при ее измерении с помощью ультразвуковых датчиков [1]. В настоящее время отсутствуют детальные количественные исследования гемодинамики внутренних органов, которые позволили бы однозначно определить патологическое или нормальное состояние органа по набору значений $\operatorname{Re}(\Psi^-)$, $\operatorname{Im}(\Psi^-)$. Однако, обсуждая методику пульсовой диагностики традиционной восточной медицины, следует отметить, что вариации значений параметров $\operatorname{Re}(\Psi^-/\Psi_0)$, $\operatorname{Im}(\Psi^-/\Psi_0)$ в диапазоне возможных значений $[0; 1]$ соответствуют патологическим состояниям, классифицируемым в терминах избытка/недостатка. Следовательно, исследование экстремумов зависимости $\psi^\circ(\eta)$ или $Q(\eta)$ в ходе экспериментов

или клинических измерений позволит как составить подробную классификацию конкретных патологий, так и предложить новые варианты классической методики пульсовой диагностики, связанные с анализом экстремумов амплитудного и фазового спектра. Следует отметить, что качественные зависимости, подобные приведенным на рис.3, действительно обнаружены в ходе масштабных клинических исследований [4-6].

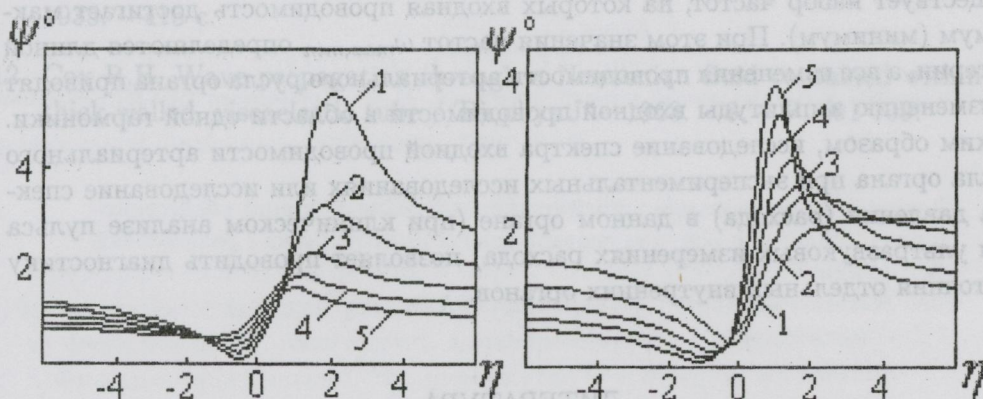


Рис.3. Зависимости $\psi^\circ(\eta)$ для случаев $Im(\Psi^-/\Psi_0) = 0.5$ (а) и $Re(\Psi^-/\Psi_0) = 0.5$ (б). Кривые 1-5 соответствуют $Re(\Psi^-/\Psi_0) = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ (а) и $Im(\Psi^-/\Psi_0) = 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ (б).

Приведенные выше зависимости соответствуют аналогичным соотношениям, полученным для квазиодномерной модели осесимметричного движения вязкой жидкости в трубке с терминальным элементом [7] и для модели Уомерсли тонкостенной трубки с продольным закреплением [8]. Таким образом, учет конечной толщины стенок трубки дает новую количественную информацию о влиянии толщины, вязких и упругих свойств трубки на параметры волн давления и расхода и входную проводимость рассматриваемой системы. Результаты численного исследования по полученным выше соотношениям показали, что влияние толщины трубки в диапазоне $b - a \in [0.1a; a]$ слабо влияет как на величину проводимости ψ° , так и на значения частот, на которых $\psi^\circ(\eta)$ достигает экстремальных значений. Вариации параметров $\mu_0, \tau_{1,2}$ вызывают значительные изменения скорости распространения волны и амплитуды входной проводимости ψ° в узком диапазоне значений в окрестности $\omega_{max,min}$. Принимая, что для артериальной системы человека $f_0 = 1 - 1.5$ Гц, можно получить, что эти диапазоны значений лежат всегда в пределах одной гармоники, которая однозначно определяется длиной трубки (питающей артерии органа) и соответствуют изменению амплитуды этой гармоники. Таким образом, при спектральном анализе все изменения входной проводимости, связанные с возможными патологическими изменениями значений $Re(\Psi^-)$, $Im(\Psi^-)$, будут лежать в пределах одной гармоники.

5. Заключение. Предложенная в работе модель артериальной системы внутреннего органа позволяет количественно оценить влияние геометрии питающей артерии, упругих и вязких свойств ее стенки, а также проводимости артериальных русел, расположенных вверх и вниз по течению, на скорость распространения и затухания волн давления в жидкости и на величину входной проводимости системы. Показано, что в широком диапазоне вариации параметров системы в пределах значений, соответствующих норме и патологии, существует набор частот, на которых входная проводимость достигает максимума (минимума). При этом значения частот $\omega_{max,min}$ определяются длиной артерии, а все изменения проводимости артериального русла органа приводят к изменению амплитуды входной проводимости в области одной гармоник. Таким образом, исследование спектра входной проводимости артериального русла органа при экспериментальных исследованиях или исследование спектра давления (расхода) в данном органе (при клиническом анализе пульса или ультразвуковых измерениях расхода) позволяет проводить диагностику состояния отдельных внутренних органов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Milnor W.R. Hemodynamics. – Baltimore: Williams and Wilkins, 1989. – 419 p.
2. Dawson C.A., Krenz G.S., Karau K.L. et al Structure-function relationships in the pulmonary arterial tree //J.Appl.Physiol. – 1999. – **86**. – P. 569-583.
3. Bondarenko M.Ye., Kizilova N.N. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks //Russian J.Biomech. – 2002. – N4. – P. 52-62.
4. Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K. Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics //Circ. Res. – 1991. – **69**. – P. 246-249.
5. Yu G.L., Wang Y.L., Wang W.K. Resonance in the kidney system of rats //Amer. J. Physiol. – 1994. V.267. – P. H1544-1548.
6. Young S.T., Wang W.K., Chang L.S., Kuo T.S. The filter properties of the arterial beds of organs in rats //Acta. Physiol. Scand. – 1992. – **145**. – P. 401-406.
7. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел //Известия РАН. Серия МЖГ. – 2003. – N5. – С. 127-137.
8. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел с анастомозами //Мат.моделирование. – 2003. – **15**. – С. 65-71.

9. Kizilova N.N. Pulse wave reflections in branching arterial networks and pulse diagnosis methods // J.Chinese Inst. of Engineers. – 2003. – **26**. – P. 869-880.
10. Karamanoglu M., Gallacher D.E., Avolio A.P., O'Rourke M.F. Pressure wave propagation in a multibranched model of the human upper limb // Amer.J.Physiology. – 1995. – **269**. – P. H1363-H1369.
11. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.:ОНТИ НКТП СССР. – 1935. – 415 с.
12. Cox R.H. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick-walled, viscoelastic tube // Biophys.J. – 1968. – **8**. – P. 691-709.

Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда
Тейлора

Т.В. Рвачева

Національний аерокосмічний університет ім. Н.Е. Жуковського (ХАИ), Україна

Доказано существование асимптотики базисных функций обобщенного ряда Тейлора, и получен первый член асимптотических разложений этих функций.

2000 Mathematics Subject Classification 42A70.

Предварительные результаты

Цель статьи — доказать, что существует асимптотика при $n \rightarrow \infty$ для базисных функций $\varphi_{n,k}$ обобщенного ряда Тейлора, предложенного В.А. Рвачевым в [1] (подробнее в [2],[3], см. также [4]). Определения функций $\varphi_{n,k}$, а также отличающихся от них множителями функций $\tilde{\varphi}_{n,k}(x)$ будут даны ниже. Пусть

$$N_n = \{-2^{n-1}, -2^{n-1} + 1, \dots, 2^{n-1} - 1, 2^{n-1}\}, n \neq 0; N_0 = \{-1, 0, 1\};$$

$$x_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^{n-1}} \right\}, n \neq 0, k \in N_n; x_{0,k} = \{k\}, k \in N_0.$$

В [2] доказано, что если $f \in C^\infty[-1, 1]$ и

$$\|f^{(k)}\|_{C[-1,1]} \leq c(f) \rho^k(f) 2^{\frac{k(k+1)}{2}}, 1 \leq \rho(f) < 2, k = 0, 1, 2, \dots,$$

то f разлагается в обобщенный ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in N_n} f^{(n)}(x_{n,k}) \tilde{\varphi}_{n,k}(x),$$

где базисные функции $\tilde{\varphi}_{n,k}(x)$ однозначно определяются из условий:

$$\|\tilde{\varphi}_{n,k}^{(m)}\|_{C[-1,1]} \leq c(\tilde{\varphi}_{n,k}) 2^{\frac{m(m+1)}{2}}, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\tilde{\varphi}_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = \delta_n^m \delta_k^s, m, n = 0, 1, 2, \dots, k \in N_n, s \in N_m$$

где δ_n^m - символ Кронекера. Функции $\tilde{\varphi}_{n,k}$ играют роль функций $\frac{x^n}{n!}$ в обычных рядах Тейлора.

Мы будем рассматривать функции $\varphi_{n,k}$, имеющие другую нормировку:

$$\varphi_{n,k}^{(m)}(x_{m,s}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \delta_n^m \delta_k^s. \quad (2)$$

Для построения функций $\varphi_{n,k}$ нам понадобится функция

$$up(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin t2^{-k}}{t2^{-k}} dt$$

являющаяся финитным решением уравнения

$$y'(x) = 2y(2x+1) - 2y(2x-1).$$

Приведем те свойства функции $up(x)$, которые понадобятся нам для получения асимптотики для функций $\varphi_{n,k}$.

- а) Функция $up(x)$ - бесконечно дифференцируемая с носителем $[-1, 1]$.
- б) Функция $up(x)$ четная. На промежутке $[-1, 0]$ $up(x)$ возрастает.
- в) $up(0) = 1$
- г) Производная n -го порядка функции $up(x)$ вычисляется по формуле (см. [5], стр. 124, формула (3.63)):

$$up^{(n)}(x) = 2^{C_{n+1}^2} \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k up(2^n x + 2^n + 1 - 2k),$$

где $\delta_1 = 1$, $\delta_{2k} = -\delta_k$, $\delta_{2k-1} = \delta_k$.

д) Значения функции $up(x)$ в точках вида $-1 + 2^{-n}$ вычисляются по формулам (см. [5], стр. 125, формула (3.68)):

$$up(-1 + 2^{-n}) = \frac{b_{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!},$$

где $b_n = \int_0^1 x^n up(x) dx$

Получение асимптотики для $\varphi_{n,k}$

Покажем вначале, что существует асимптотика для функций $\varphi_{n,0}$.

В [1] на стр. 100 указана рекуррентная формула для нахождения $\tilde{\varphi}_{n,0}$ на $[-1, 0]$:

$$\tilde{\varphi}_{n,0}(x) = 2^{-n+1} \int_{-1}^x \tilde{\varphi}_{n-1,0}(2t) dt - C up(x)$$

Подставив в эту формулу $\tilde{\varphi}_{0,0}(x) = up(x)$ и воспользовавшись функционально-дифференциальным уравнением для $up(x)$, указанным выше, получим, что функция $\tilde{\varphi}_{1,0}$ на $[-1, 0]$ есть линейная комбинация функций $up(x)$ и

$up(x - \frac{1}{2})$. Повторяя эти рассуждения, можно получить, что функция $\tilde{\varphi}_{n,0}$, а значит, и $\varphi_{n,0}$ может быть представлена на $[-1; 0]$ в виде:

$$\varphi_{n,0}(x) = x_n up(x) + x_{n-1} up(x - \frac{1}{2}) + x_{n-2} up(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + \dots + x_0 up(x - 1 + \frac{1}{2^n}).$$

Функции $\varphi_{n,k}$ должны быть бесконечно дифференцируемыми на $[-1, 1]$. Поэтому на промежутке $[0, 1]$ функции $\varphi_{n,0}$ с четными номерами n продлим четным образом; с нечетными номерами — нечетным образом. Тогда ограничения (1) для $\varphi_{n,0}$ будут выполняться (это следует из свойств б)-г) функции $up(x)$.) Проверим, что условия (2) дают $n+1$ уравнение для нахождения коэффициентов $x_0, \dots, x_n$.

1. Пусть $m > n$, $k \in \{-2^{m-1}, -2^{m-1} + 1, \dots, -1, 0\}$

$$\text{Тогда } \varphi_{n,0}^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}}) = x_n up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}}) + x_{n-1} up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}} - \frac{1}{2}) + x_{n-2} up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}} - (1 - \frac{1}{2^2})) + \dots + x_0 up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}} - (1 - \frac{1}{2^n})) =$$

$$= x_n up^{(m)}(\frac{k_n}{2^{m-1}}) + x_{n-1} up^{(m)}(\frac{k_{n-1}}{2^{m-1}}) + \dots + x_0 up^{(m)}(\frac{k_0}{2^{m-1}}), \quad k_i \in Z$$

Из свойств а) и г) функции $up(x)$ следует, что каждое слагаемое в этой сумме обращается в 0, а значит,

$$\varphi_{n,0}^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}}) = 0 \quad \forall m > n \text{ и } \forall k \in \{-2^{m-1}, -2^{m-1} + 1, \dots, -1, 0\}$$

2. Пусть $m \leq n$ и $k \in \{-2^{m-1}, -2^{m-1} + 1, \dots, -1\}$

Тогда

$$\varphi_{n,0}^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}}) = x_n up^{(m)}(\frac{k_n}{2^{m-1}}) + \dots + x_{n-m+1} up^{(m)}(\frac{k_{n-m+1}}{2^{m-1}}) + x_{n-m} up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}} - (1 - \frac{1}{2^m})) + \dots + x_0 up^{(m)}(\frac{k}{2^{m-1}} - (1 - \frac{1}{2^n})), \quad k_i \in Z$$

Первые m слагаемых, равны нулю по свойствам а), г) функции $up(x)$. Остальные слагаемые также равны нулю, т. к. функции $up(x - (1 - \frac{1}{2^m}))$, $up(x - (1 - \frac{1}{2^{m+1}}))$, ..., $up(x - (1 - \frac{1}{2^n}))$ тождественно равны нулю при $x \leq -\frac{1}{2^m}$ (свойство а) функции $up(x)$.)

Значит, для $m > n$ и для $m \leq n$ при $k \neq 0$ условия для $\varphi_{n,0}$ выполняются автоматически (при любых коэффициентах x_i .)

3. Пусть теперь $m \leq n$ и $k = 0$.

Тогда условия (1) ($m = n, n-1, \dots, 0$) дают систему уравнений:

$$\begin{cases} x_0 up^{(n)}(-1 + \frac{1}{2^n}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ x_1 up^{(n-1)}(-1 + \frac{1}{2^{n-1}}) + x_0 up^{(n-1)}(-1 + \frac{1}{2^n}) = 0 \\ \dots \\ x_n up^{(0)} + x_{n-1} up(-\frac{1}{2}) + \dots + x_0 up(-1 + \frac{1}{2^n}) = 0 \end{cases}$$

Пользуясь тем, что, по свойству г) функции $up(x)$

$$up^{(m)}(-1 + \frac{1}{2^k}) = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} up(-1 + \frac{1}{2^{k-m}}) \quad (k \geq m), \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} x_0 \alpha_0 = 1, \\ x_1 \alpha_0 + x_0 \alpha_1 = 0, \\ \dots \\ x_n \alpha_0 + x_{n-1} \alpha_1 + \dots + x_0 \alpha_n = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha_k = up(-1 + \frac{1}{2^k})$.

Введем функции:

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m z^m \text{ и } \Lambda(z) = \frac{1}{\Phi(z)}$$

Разложим функцию $\Lambda(z)$ в ряд Маклорена:

$$\Lambda(z) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m z^m.$$

Тогда из того, что $\Lambda(z)\Phi(z) = 1$ следует, что первые $n+1$ коэффициентов x_m разложения $\Lambda(z)$ будут удовлетворять системе (3) для любого n .

Для коэффициентов α_n функции $\Phi(z)$ известны хорошие асимптотические оценки (см. свойство д) функции $up(x)$). Это позволяет без труда вычислить несколько первых корней функции $\Phi(z)$ с точностью до 10^{-6} . Результаты вычислений дают

$$\lambda = z_1 = -3,228718, \quad z_2 = -8,847538, \quad z_3 = -22,462366.$$

Следовательно, функция $\frac{1}{\Phi(z)}$ в области $|z| \leq 8$ имеет единственный полюс λ (первого порядка). Для нас важна величина $\text{Res}\left(\frac{1}{\Phi(z)}, \lambda\right) = \frac{1}{\Phi'(\lambda)}$, которую мы в дальнейшем будем обозначать d . Заметим, что $d = 6,614673$ с точностью 10^{-6} . Мы получили, что функция

$$\mu(z) = \frac{1}{\Phi(z)} - \frac{d}{z - \lambda}$$

является аналитической для $|z| \leq 8$:

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m,$$

где $|u_m| \leq \frac{M}{8^m}$, $M = \max_{|z|=8} \mu(z)$.

С другой стороны, в круге $|z| < \lambda$

$$\frac{d}{z - \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{1 - z/\lambda} = -\frac{1}{\lambda} d \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^m.$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{\lambda^{m+1}} + u_m\right) z^m, \quad |z| < \lambda,$$

то есть асимптотика для x_n имеет вид:

$$x_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}} + u_n, \quad |u_n| \leq \frac{M}{8^n}. \quad (4)$$

Определим на $[-1; 0]$ функцию:

$$ab(x) = up(x) + \lambda up(x - \frac{1}{2}) + \lambda^2 up(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + \dots + \lambda^n up(x - 1 + \frac{1}{2^n}) + \dots \quad (5)$$

Лемма 1. Для любых $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| \leq C \frac{n|\lambda|^n}{8^n},$$

где $c_n = -\frac{d}{\lambda^{n+1}}$.

Доказательство. Пусть $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$. Тогда

$$ab(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m up(x - 1 + \frac{1}{2^m})$$

В этом случае из (4) получим:

$$\begin{aligned} |ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m up(x - 1 + \frac{1}{2^m}) - \frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n x_m up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m up(x - 1 + \frac{1}{2^m}) - \frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n (c_m + u_m) up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m up(x - 1 + \frac{1}{2^m}) - \sum_{m=1}^n \frac{c_m}{c_n} up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n u_m up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^{n-1} \lambda^m up(x - 1 + \frac{1}{2^m}) - \sum_{m=1}^n \lambda^{n-m} up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n u_m up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n u_m up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right|. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$

$$|ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| \leq \frac{1}{|c_n|} \sum_{m=1}^n |up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}})| \frac{M}{8^m}.$$

Поскольку функция $up(x)$ монотонно возрастает на $[-1, 0]$ (см. свойство б)),

$$\left| up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| \leq up(-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \leq 2^{-\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}} \frac{1}{(n-m-1)!}$$

при $n-m-1 \geq 0$; а при $n=m$ $up(x - 1 + \frac{1}{2^{n-m}}) = up(x) \leq 1$ (свойства б), в) функции $up(x)$.)

Отсюда:

$$\begin{aligned} |ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| &\leq \frac{1}{|c_n|} \left(\sum_{m=1}^{n-1} 2^{-\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}} \cdot \frac{1}{(n-m-1)!} \cdot \frac{M}{8^m} + \frac{M}{8^n} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|c_n|} \left(\sum_{m=1}^{n-1} 2^{-\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}} \cdot \frac{M}{8^m} + \frac{M}{8^n} \right) = \frac{1}{|c_n|} \sum_{m=1}^n 2^{-\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}} \cdot \frac{M}{8^m} = \\ &= \frac{1}{|c_n|} \sum_{m=1}^n M \cdot 2^{-\frac{m^2}{2} + (n-\frac{7}{2})m - \frac{n^2-n}{2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\max_m (-\frac{m^2}{2} + (n - \frac{7}{2})m - \frac{n^2-n}{2})$ достигается при $m = n - \frac{7}{2}$.

Следовательно, $|ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| \leq \frac{1}{|c_n|} \sum_{m=1}^n M \cdot 2^{\frac{(n-\frac{7}{2})^2}{2} - \frac{n^2-n}{2}} =$
 $= \frac{1}{|c_n|} Mn \cdot 2^{\frac{49}{8}} \cdot 8^{-n} = \frac{C_1 n}{|c_n|} 8^{-n} = C \frac{n|\lambda|^n}{8^n}.$

Лемма 2. Для любых $x \in [-\frac{1}{2^n}; 0]$ и $n \in N$ справедливы оценки:

- 1) $|\frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| \leq C \frac{|\lambda|^n}{n! 2^{\frac{n^2-n}{2}}},$
- 2) $|ab(x)| \leq \frac{c}{8^n}.$

Доказательство. 1) Для оценки $|\frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)|$ воспользуемся формулой Тейлора с остатком в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x) &= \frac{1}{c_n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{n,0}^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi_{n,0}^{(n)}(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{c_n(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi_{n,0}^{(n)}(t) dt, \end{aligned}$$

поскольку $\varphi_{n,0}^{(k)}(0) = 0, k < n$.

Для дальнейшей оценки воспользуемся леммой 6 из [2], [3], которая формулируется следующим образом:

Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{i \in N_k} c_i \tilde{\varphi}_{k,i}(x), \text{ и } |c_i| \leq M 2^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Тогда:

$$\|\varphi^{(n)}\|_{C[-1,1]} \leq \begin{cases} CM 2^{\frac{n(n+1)}{2}}, & n \geq k; \\ CM 2^{\frac{n(n+1)}{2} + n - k}, & n < k. \end{cases}$$

Применив этот результат к функции $\varphi_{n,0}(t)$, получим: $\|\varphi_{n,0}^{(n)}\|_{C[-1,1]} \leq C 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

Отсюда:

$$\begin{aligned} |\frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x)| &\leq \frac{1}{|c_n|(n-1)!} \int_x^0 (t-x)^{n-1} |\varphi_{n,0}^{(n)}(t)| dt \leq \frac{C \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|c_n|(n-1)!} \int_x^0 (t-x)^{n-1} dt = \\ &= \frac{C \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|c_n|(n-1)!} \frac{(-x)^n}{n} \leq \frac{C \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|c_n|(n-1)! n \cdot 2^{n^2}} = \tilde{C} \frac{|\lambda|^n}{n(n-1)! \cdot 2^{\frac{n^2-n}{2}}}. \end{aligned}$$

2) Для оценки функции $ab(x)$ вблизи нуля получим функционально-дифференциальное уравнение, которому эта функция удовлетворяет.

Запишем (5) в виде:

$$ab(x) = up(x) + \lambda(up(x - \frac{1}{2}) + \lambda up(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + \dots + \lambda^{n-1} up(x - 1 + \frac{1}{2^n}) + \dots)$$

и продифференцируем:

$$\begin{aligned} ab'(x) &= up'(x) + 2\lambda(up(2(x - \frac{1}{2}) + 1) + \lambda up(2(x - 1 + \frac{1}{2^2}) + 1) + \dots \\ &\dots + \lambda^{k-1} up(2(x - 1 + \frac{1}{2^k}) + 1) + \dots) = \\ &up'(x) + 2\lambda(up(2x) + \lambda up(2x - \frac{1}{2}) + \lambda^2 up(2x - 1 + \frac{1}{2^2}) + \dots + \\ &+ \lambda^n up(2x - 1 + \frac{1}{2^n}) + \dots) = up'(x) + 2\lambda ab(2x), \quad x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} ab''(x) &= up''(x) + 4\lambda up'(2x) + 8\lambda^2 ab(4x), \quad x \in [-1, 0]; \\ ab'''(x) &= up'''(x) + 2^3 \lambda up''(2x) + 2^5 \lambda^2 up'(4x) + 2^6 \lambda^3 ab(8x), \quad x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Для получения нужной оценки достаточно воспользоваться для функции $ab(x)$ формулой Тейлора в интегральной форме. Функция $ab(x)$ в нуле по построению равна нулю вместе со всеми своими производными.

Следовательно,

$$ab(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (up'''(t) + 2^3 \lambda up''(2t) + 2^5 \lambda^2 up'(4t) + \lambda^3 2^6 ab(8t))(x-t)^2 dt. \quad (6)$$

Обозначим $\tilde{C} = \max_{x \in [-1, 0]} |ab(x)|$

Тогда из (6) получим: $|ab(x)| \leq \tilde{C} \int_x^0 (x-t)^2 dt = -Cx^3 \leq \frac{C}{8^n}$ при $x \in [-\frac{1}{2^n}, 0]$.

Пусть $ab_c(x)$ — это функция $ab(x)$, четно продленная на отрезок $[-1; 1]$, а $ab_s(x) = ab(x)$, продленная на $[-1; 1]$ нечетно. Как отмечалось выше при построении функций $\varphi_{n,0}$ функции $\varphi_{2n,0}$ — четные, а функции $\varphi_{2n+1,0}$ — нечетные. Тогда справедлива

Теорема 1. Функции $\frac{1}{c_{2n}} \varphi_{2n,0}(x)$ и $\frac{1}{c_{2n+1}} \varphi_{2n+1,0}(x)$ равномерно при $n \rightarrow \infty$ сходятся на отрезке $[-1; 1]$ соответственно к функциям $ab_c(x)$ и $ab_s(x)$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{c_{2n}} \varphi_{2n,0} - ab_c \right\|_{C[-1;1]} &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \\ \left\| \frac{1}{c_{2n+1}} \varphi_{2n+1,0} - ab_s \right\|_{C[-1;1]} &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2.

Итак, асимптотика для базисных функций $\varphi_{n,0}$ построена. Теперь для построения асимптотики базисных функций $\varphi_{n,k}$, $k \neq 0$, достаточно уметь построить эти функции из функций $\varphi_{n,0}$.

Далее для удобства изложения введем новые обозначения для базисных функций $\varphi_{n,k}$. Определим функции $\hat{\varphi}_{n,t}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ следующим образом: пусть $t = \frac{k}{2^{n-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \leq 2^{n-1}$ для $n > 0$ или $t = k$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \leq 1$ для $n = 0$. Тогда положим

$$\hat{\varphi}_{n,t} = \varphi_{n,k}.$$

Заметим, что при таком обозначении

$$\hat{\varphi}_{n,0} = \varphi_{n,0}.$$

Функцию $\hat{\varphi}_{n, \frac{s}{2^n-1}}$, т. е., функцию, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{n, \frac{s}{2^n-1}}^{(m)}\left(\frac{k}{2^{m-1}}\right) &= 0 \quad \forall m \neq n, k \in N_m; \\ \hat{\varphi}_{n, \frac{s}{2^n-1}}^{(n)}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) &= 0 \quad \forall k \in N_n, k \neq s; \\ \hat{\varphi}_{n, \frac{s}{2^n-1}}^{(n)}\left(\frac{s}{2^{n-1}}\right) &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}},\end{aligned}\quad (7)$$

будем строить по индукции следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{n, \frac{s}{2^n-1}}(x) &= \varphi_{n,0}\left(x - \frac{s}{2^{n-1}}\right) - [\varphi_{n,0}\left(-1 - \frac{s}{2^{n-1}}\right)\hat{\varphi}_{0,-1}(x) + \varphi_{n,0}\left(-\frac{s}{2^{n-1}}\right)\hat{\varphi}_{0,0}(x) + \\ &+ \varphi_{n,0}\left(1 - \frac{s}{2^{n-1}}\right)\hat{\varphi}_{0,1}(x)] - \\ &- \sum_{j=2}^n \frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}} \sum_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} \varphi_{n,0}^{(j-1)}\left(\frac{l}{2^{j-2}} - \frac{s}{2^{n-1}}\right)\hat{\varphi}_{j-1, \frac{l}{2^{j-2}}}(x)\end{aligned}\quad (8)$$

считая функции $\hat{\varphi}_{k, \frac{l}{2^{k-1}}}$ $\forall l \in N_k \forall k = 0, \dots, n-1$ уже построенными. Функции $\hat{\varphi}_{0,-1}$ и $\hat{\varphi}_{0,1}$ (база индукции), очевидно, получаются из функций $\varphi_{0,0}$ посредством сдвига на единицу влево (вправо). Непосредственно проверяется, что функции, построенные по правилу (8), будут удовлетворять условиям (7). Кроме того, некоторое число последних слагаемых в (8) могут быть нулевыми (в зависимости от точки $\frac{s}{2^{n-1}}$). Если $\frac{s}{2^{n-1}} = \frac{p}{2^m}$, где $m \leq n-1$ и дробь $\frac{p}{2^m}$ — несократимая, то

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{n, \frac{p}{2^m}}(x) &= \varphi_{n,0}\left(x - \frac{p}{2^m}\right) - [\varphi_{n,0}\left(-1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,-1}(x) + \varphi_{n,0}\left(-\frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,0}(x) + \\ &+ \varphi_{n,0}\left(1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,1}(x)] - \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}} \sum_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} \varphi_{n,0}^{(j-1)}\left(\frac{l}{2^{j-2}} - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{j-1, \frac{l}{2^{j-2}}}(x).\end{aligned}$$

Другими словами, число слагаемых здесь зависит только от точки, но не от порядка функции. Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned}\Phi_{\frac{p}{2^m}}^c(x) &= ab_c\left(x - \frac{p}{2^m}\right) - [ab_c\left(-1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,-1}(x) + ab_c\left(-\frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,0}(x) + \\ &+ ab_c\left(1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,1}(x)] - \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}} \sum_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_c^{(j-1)}\left(\frac{l}{2^{j-2}} - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{j-1, \frac{l}{2^{j-2}}}(x) \\ \Phi_{\frac{p}{2^m}}^s(x) &= ab_s\left(x - \frac{p}{2^m}\right) - [ab_s\left(-1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,-1}(x) + ab_s\left(-\frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,0}(x) + \\ &+ ab_s\left(1 - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{0,1}(x)] - \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{2^{\frac{j(j-1)}{2}}} \sum_{l=-2^{j-2}}^{2^{j-2}} ab_s^{(j-1)}\left(\frac{l}{2^{j-2}} - \frac{p}{2^m}\right)\hat{\varphi}_{j-1, \frac{l}{2^{j-2}}}(x)\end{aligned}$$

Покажем, что эти функции являются асимптотиками при $n \rightarrow \infty$ для $\frac{1}{c_{2n}}\hat{\varphi}_{2n, \frac{p}{2^m}}$ и $\frac{1}{c_{2n+1}}\hat{\varphi}_{2n+1, \frac{p}{2^m}}$ соответственно. Для это нам потребуются следующие две леммы:

Лемма 3. Для любого $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$ и $\forall k, n \in N, n > k$ справедлива оценка:

$$|ab^{(k)}(x) - \frac{1}{c_n}\varphi_{n,0}^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{|c_n|} \frac{c(k) + \tilde{c}(k)(n-k)}{6^n}.$$

Доказательство. В лемме 1 было показано, что для любого $x \in [-1, -\frac{1}{2^n}]$

$$ab(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}(x) = -\frac{1}{c_n} \sum_{m=1}^n u_m up(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}),$$

где $|u_m| \leq \frac{M}{8^m}$. Отсюда

$$ab^{(k)}(x) - \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}^{(k)}(x) = -\frac{1}{c_n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} u_m up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) + \sum_{m=n-k+1}^n u_m up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right].$$

(Мы можем считать порядок производной k меньшим n). Оценим вначале первую сумму. Легко видеть, что функции $up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}})$, $m = 1, \dots, n-k$, являются неубывающими на $[-1, 0]$, следовательно $\forall x \in [-1, 0]$

$$|up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}})| = 2^{\frac{k(k+1)}{2}} up(2^k x - 1 + \frac{1}{2^{n-m-k}}) \leq \leq 2^{\frac{k(k+1)}{2}} up(-1 + \frac{1}{2^{n-m-k}}) = 2^{\frac{k(k+1)}{2} - C_{n-m-k}^2} \leq 2^{\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(n-m-k-1)(n-m-k)}{2}}$$

для любого $m \leq n-k$.

Следовательно,

$$\left| \sum_{m=1}^{n-k} u_m up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| \leq \sum_{m=1}^{n-k} \frac{M}{8^m} 2^{\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(n-m-k-1)(n-m-k)}{2}} = M \sum_{m=1}^{n-k} 2^{\eta(m)},$$

где $\eta(m) = -3m - \frac{(n-m)(n-m-2k-1)}{2}$.

Очевидно, $\eta(m) \leq \eta(n - \frac{2k+1}{2} - 3)$, следовательно

$$\left| \sum_{m=1}^{n-k} u_m up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| \leq \frac{M}{8^n} (n-k) C(k),$$

где $C(k) = 2^{3(k+\frac{1}{2}) + \frac{9}{2} + \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2}}$.

Вторая сумма оценивается следующим образом:

$$\left| \sum_{m=n-k+1}^n u_m up^{(k)}(x-1 + \frac{1}{2^{n-m}}) \right| \leq 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{M}{8^{n-k+1}} k.$$

Из этих двух оценок сразу следует утверждение леммы.

Лемма 4. Для любого $x \in [-\frac{1}{2^n}, 0]$ и $k, n \in N$ справедливы оценки:

$$1) \left| \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}^{(k)}(x) \right| \leq \frac{C|\lambda|^n}{(n-k)! 2^{\frac{n^2}{2} - n(k+\frac{1}{2})}};$$

$$2) |ab^{(k)}(x)| \leq \frac{C(k)}{2^n}.$$

Доказательство. 1) Разложим $\frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}^{(k)}(x)$ по формуле Тейлора до порядка $n - (k+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}^{(k)}(x) &= \frac{1}{c_n} \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{\varphi_{n,0}^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{(n-k-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} \varphi_{n,0}^{(n)}(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{c_n(n-k-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} \varphi_{n,0}^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 6 из [2], [3], получим оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{c_n} \varphi_{n,0}^{(k)}(x) \right| &\leq \frac{1}{|c_n|(n-k-1)!} \int_0^0 (t-x)^{n-k-1} |\varphi_{n,0}^{(n)}(t)| dt \leq \frac{C 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|c_n|(n-k-1)!} \cdot \frac{(t-x)^{n-k}}{(n-k)!} \Big|_x = \\ &= \frac{C 2^{\frac{n(n+1)}{2}} (-x)^{n-k}}{|c_n|(n-k)!} \leq \frac{C 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{|c_n|(n-k)! 2^{n(n-k)}} = \tilde{C} \frac{|\lambda|^n}{(n-k)! 2^{\frac{n^2}{2} - n(k+\frac{1}{2})}}. \end{aligned}$$

2) Любую производную $ab(x)$ можно оценить на $[-1, 0]$ константой: $|ab^{(s)}(x)| \leq C(s)$. Разложим $ab^{(k)}(x)$ по формуле Тейлора до второго порядка:

$$ab^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{ab^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 ab^{(k+3)}(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 ab^{(k+3)}(t) dt.$$

Отсюда

$$|ab^{(k)}(x)| = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 |ab^{(k+3)}(t)| dt \leq \frac{C(k+3)}{2} \cdot \frac{(t-x)^3}{3} \Big|_x^0 = \frac{C(k+3)}{6} (-x)^3 \leq \frac{C(k+3)}{6 \cdot 2^n} = \frac{\widetilde{C}(k)}{2^n}.$$

Из утверждений лемм 3 и 4 следует

Лемма 5. Для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{1}{c_{2n}} \varphi_{2n,0}^{(k)} - ab_c^{(k)} \right\|_{C[-1,1]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\left\| \frac{1}{c_{2n+1}} \varphi_{2n+1,0}^{(k)} - ab_s^{(k)} \right\|_{C[-1,1]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сформулируем теперь общую теорему об асимптотике базисных функций, "отвечающих" за точку $\frac{p}{2^m}$.

Теорема 2. Функции $\frac{1}{c_{2n}} \widehat{\varphi}_{2n, \frac{p}{2^m}}(x)$ и $\frac{1}{c_{2n+1}} \widehat{\varphi}_{2n+1, \frac{p}{2^m}}(x)$ равномерно при $n \rightarrow \infty$ сходятся на отрезке $[-1, 1]$ соответственно к функциям $\Phi_{\frac{p}{2^m}}^c(x)$ и $\Phi_{\frac{p}{2^m}}^s(x)$.

Доказательство теоремы сразу следует из утверждения леммы 5

В терминах функций $\varphi_{n,k}$ теорема 2 формулируется следующим образом:

Теорема 2'. Пусть x^* - фиксированная двоично-рациональная точка отрезка $[-1, 1]$, и пусть $x^* = \frac{p}{2^m}$, где p - нечетное. Тогда функции $\frac{1}{c_{2n}} \varphi_{2n,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n-1}} = x^*$, и $\frac{1}{c_{2n+1}} \varphi_{2n+1,k}(x)$, где $\frac{k}{2^{2n}} = x^*$, равномерно при $n \rightarrow \infty$ сходятся на отрезке $[-1, 1]$ соответственно к функциям $\Phi_{\frac{p}{2^m}}^c(x)$ и $\Phi_{\frac{p}{2^m}}^s(x)$.

В 1986 г. была поставлена задача ([6], задача 44, с. 59): исследовать поведение базисных функций обобщенного ряда Тейлора с большими номерами и найти удобные формулы для их вычисления. Теоремы 1 и 2 решают эту задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В. А. Обобщенные ряды Тейлора для бесконечно дифференцируемых функций // Мат. методы анализа динамических систем. - 1982, вып. 6, С. 99-102
2. Рвачев В. А. Финитные решения функционально-дифференциальных уравнений и их применение // Усп. мат. наук. - 1990 - 45, вып. 1(271) - С. 77-103

3. Rvachev V. A. Compactly supported solutions of functional differential equations and their applications. // Russ. Math. Surveys – 45 (1990) – P. 87–120
4. Lemarie-Rieusset P. G. Fonctions d'echelle interpolantes, polynomes de Bernstein et ondelettes non stationnaires // Rev. Mat. Iberoamericana (1997), v. 13, No. 1, P.91–188
5. Рвачев В. Л., Рвачев В. А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1979. – 196 с.
6. Теория R-функций и актуальные проблемы прикладной математики. – Киев: Наук. думка, 1986. – 264 с.

АНОТАЦІЇ

УДК 533.72

Вихрові потоки в газі з шершавих куль.

Гордєвський В. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 3–12.

Розглянуто нелінійне рівняння Больцмана для моделі шершавих куль. Воно описує еволюцію розрідженого газу з твердих молекул, що обертаються. Побудовані явні наближені розв'язки цього рівняння у вигляді лінійних комбінацій двох нестационарних неоднорідних розподілів. Такі розподіли відповідають вихровим потокам, які здатні обертатися навколо своїх осей та рухатися поступально в довільному напрямку. Вивчено асимптотичну поведінку рівномірно-інтегрального відхилення між частинами рівняння. В деяких випадках цей відхил може бути зробленим скільки завгодно малим, отже відповідні розв'язки дають наближене описання процесу взаємодії між двома вихровими потоками.

Бібліогр.: 17 найм.

УДК 517.977

Синтез інерційних керувань для трикутних систем.

Коробов В. І., Скорик В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 13–22.

Розглядається задача допустимого синтезу керування для трикутної системи з геометричними обмеженнями на керування та його похідні. Дослідження проводяться на основі методу функції керованості. Будуються відповідні керування. Обчислюється час руху, знаходяться траєкторії. Результати проілюстровані прикладом.

Мал.: 2. Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.518.6

Про одну властивість субгармонійних майже періодичних функцій.

Рахнін А. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 23–29.

Доведено, що якщо субгармонійна функція є майже періодичною у смузі та її логарифм є субгармонійною функцією, то цей логарифм є узагальненою майже періодичною функцією.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.5

Многочленні асимптотичні зображення субгармонічних функцій з вилученою змінною.

А г р а н о в и ч П. З. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 30–34.

У роботі розглядаються плюрісубгармонічні функції у $D \times \mathbb{C}$, де D є область у просторі $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, міра яких зосереджена на множині $D \times \{w : \Im w = 0\}$. Для цих функцій у термінах многочленних асимптотичних зображень встановлена залежність між поведінкою самої функції в нескінченності по вилученій змінній та функцією розподіла її міри.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 514

Мінімальні поверхні в групі Гейзенберга.

М а с а л ь ц е в Л. А., П е т р о в Е. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 35–45.

Досліджуються лінійчаті і $SO(2)$ -інваріантні мінімальні поверхні в тривимірній групі Гейзенберга з лівоінваріантною метрикою $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. Доведене неіснування цілком геодезичних поверхонь.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.9

Функціональні моделі комутативної системи лінійних операторів.

Н а б о к а В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 46–60.

Побудовані функціональні моделі для комутативної системи лінійних обмежених операторів A_1, A_2 у випадку, коли ця система операторів не має дисипативних операторів, тобто $A_1x_1 + A_2x_2$ не являється дисипативним оператором для будь-яких $x_1, x_2 \in R$, при цьому $\dim G = 2$, де $G = \text{span}(A_k - A_k^*)h$, $k = 1, 2$; $h \in H$.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.9 + 532.5

Застосування методу R-функцій до розрахунку плоских плинів грузлої рідини.

К о л о с о в а С. В., С і д о р о в М. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 61–67.

Розглядається течія в'язкої нестисливої рідини у скінченій однозв'язній двовимірній області. Запропоновано метод розрахунку течії, що базується на спільному застосуванні методів R-функцій, проекційних та послідовних

наближень. Наведено результати обчислювального експерименту.

Мал.: 3. Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.977

Канонічна форма нелінійної керованої системи та апроксимуючі градуїровки.

І г н а т о в и ч С. Ю., Б а р х а є в П. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 68–76.

В роботі розглядаються алгебраїчні структури, породжені представленням афінної керованої системи у вигляді ряду нелінійних степеневих моментів. Різним способам підсумовування ряду відповідають різні градуїровки алгебри нелінійних степеневих моментів. Пропонується спосіб зведення нескінченновимірних градуїровок до скінченновимірних для побудови канонічної форми нелінійних керованих систем.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 513.88

Теорема о збереженні безперервності.

Д и м и т р о в а С. Д., Д и м и т р о в Д. Б. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 77–81.

В статті вивчається питання о збереженні безперервності рішень різностного рівняння $\Phi(hx) - \Phi(x) = F(h, x)$, де функції задані на мультиплікативній топологічній групі зі значеннями у сепарабельному просторі Фреше. Щодо множини значень рішення потрібно слаба повнота та обмеженість на якійсь відносно щільній множині. Тоді з безперервності правої частини впливає безперервність рішення. Розглянуто ще й локальний варіант. З доказаних теорем о збереженні безперервності як наслідок утворюються теореми о майже періодичності, Левітановській майже періодичності, майже автоморфності рішень різностного рівняння та відповідні теореми об інтегралі та криволінійному інтегралі, що не залежить від шляху інтегрування. Теорема о безперервності узагальнює в один багато інших результатів: теорему Боля-Бора, теорему Кадеца, теорему Доса, теорему Болеса, теорему Любарського, результати авторів о криволінійному інтегралі. Одночасно з цим вона переносить їх на більш широкий клас просторів Фреше та зменшує вимогу повної обмеженості - вимагаючи обмеженість на деякому відносно щільній множині.

Бібліогр.: 12 найм.

УДК 532.595+612.13

Розповсюдження хвиль тиску в товстостінній трубці з в'язко-пружного матеріалу при заданих умовах відбиття.

К і з і л о в а Н. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 82–93.

У роботі наведені результати дослідження параметрів хвильового руху в'язкої нестисливої рідини в системі, яка складається з довгої товстостінної в'язкопружної трубки, яка з'єднана послідовно з двома елементами із заданими провідностями. Система являє собою модель артеріального русла внутрішнього органа, який включений в загальну систему кровообігу. У рамках лінеаризованих рівнянь руху рідини і стінки отримано рішення задачі у вигляді розкладань по окремих гармоніках, а також вираження для вхідної провідності системи з урахуванням відбиття хвиль на кінці трубки. Чисельними методами отримано рішення дисперсійного рівняння і досліджено вплив механічних і геометричних параметрів моделі на швидкість поширення і загасання хвиль. Проведено аналіз вхідної провідності системи в широкому діапазоні варіації параметрів моделі, які відповідають артеріальній системі людини. Показано, що вхідна провідність досягає екстремальних значень на частотах, які визначаються довжиною трубки. При цьому амплітуда провідності сильно залежить від параметрів термінального елемента моделі і слабко – від щільності і в'язкості рідини і матеріалу стінки трубки, а також від її внутрішнього і зовнішнього діаметрів. Отримані результати можуть бути покладені в основу додаткових і нових методик клінічної діагностики стану окремих внутрішніх органів.

Мал.: 3. Бібліогр.: 12 найм.

УДК 517

Про асимптотику базисних функцій узагальненого ряду Тейлора.

Р в а ч о в а Т.В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 94–104.

Доведене існування асимптотики базисних функцій узагальненого ряду Тейлора, і одержано відповідні асимптотичні функції.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.9

Застосування методу Рунге-Кутси до розрахунку функцій Тейлора.

Колосова С.В., Сидоров М.В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2003, № 602. Математика, прикладна математика і механіка, с. 105–110.

Розглядається застосування методу Рунге-Кутси до розрахунку функцій Тейлора.

Бібліогр.: 6 найм.

Gordevskyy V.D.

Коробов В.И., Ск
треугольных

Рахнин А.В. Об
ческих функц

Агранович П.З.
субгармониче

Масальцев Л.А.,
пе Гейзенберг

Набока В.А. Фун
нейных опера

Колосова С.В., С
расчету плоск

Игнатович С.Ю.,
ной управлен

Димитрова С.Д.,
ривности

Кизилова Н.Н. Р
трубке конеч
ние к распрос

Рвачева Т.В. Об а
Тейлора

АНОТАЦІЇ

ЗМІСТ

Gordevskyy V.D. Vortical flows in a gas of rough spheres	3
Коробов В.И., Скорик В.А. Синтез инерционных управлений для треугольных систем	13
Рахнин А.В. Об одном свойстве субгармонических почти периодических функций	23
Агранович П.З. Многочленные асимптотические представления субгармонических функций с выделенной переменной	30
Масальцев Л.А., Петров Е.В. Минимальные поверхности в группе Гейзенберга	35
Набока В.А. Функциональные модели коммутативной системы линейных операторов	46
Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости	61
Игнатович С.Ю., Бархаев П.Ю. Каноническая форма нелинейной управляемой системы и аппроксимирующие градуировки	68
Димитрова С.Д., Димитров Д.Б. Теорема о сохранении непрерывности	77
Кизилова Н.Н. Распространение волн давления в толстостенной трубке конечной длины из вязкоупругого материала: приложение к распространению пульсовых волн в артериальных руслах	82
Рвачева Т.В. Об асимптотике базисных функций обобщенного ряда Тейлора	94
АНОТАЦІЇ	105

CONTENTS

Gordevsky V.D. Vortical flows in a gas of rough spheres	3
Korobov V.I., Skoryk V.A. Synthesis of inertial controls for triangular systems	13
Rakhnin A.V. About one property of the subharmonic almost periodic functions.	23
Agranovich P.Z. Polynomial asymptotic representations for subharmonic functions with chosen variable	30
Masaltsev L.A., Petrov E.V. Minimal surfaces in the Heisenberg group	35
Naboka V.A. The functional models for the commutative system of the linear limited operators	46
Kolossova S.V., Sidorov M.V. The R-functions method application for numerical studies of a 2D viscous flow	61
Ignatovich S.Yu., Barkhaev P. Yu. The canonical form of a nonlinear control system and approximating gradings	68
Dimitrova S.D., Dimitrov D.B. Theorem of saving the continuity	77
Kizilova N.N. Pressure wave propagation in thick-walled viscoelastic tube at given reflection conditions	82
Rvachova T.V. On the asymptotics of the basic functions of a generalized Taylor series	94
SUMMARY	105

Visit our Web-page

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

to find

- Information for Manuscript Preparation
- Abstracts
- Editorial Board

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету
№ 602 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 10.12.2003 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.
Умовн.- друк. арк. – 7,0
Обл.- вид. арк. – 8,2
Наклад 100 прим.
Ціна договірна

11-00

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет
Видавничий центр ХНУ.
Відруковано ПП "Азамаєв В.Р."
61144 Харків-144, вул. Героїв праці, 17.

Visit our Web-page

Gardevskiy V.D. Vortical flows in gas in small spheres <http://www-mechmath.univer.khar'kov.ua/veatgik> 3

to find

Korobov V.I., Skoryk V.A. Synthesis of integral controls for triangular systems 13

Information for Manuscript Preparation

Rakhnin A.V. About one property of the subharmonic Abelian functions 23

Editorial Board

Agranovich P.Z. Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with chosen variable 30

Masaltsev I.A., Petrov E.V. Minimal surfaces in the Heisenberg group 55

Naboka V.A. The functional models for the commutative systems of the linear limited operators 66

Kolosova S.V., Sidorov M.V. The R-functions method application for numerical studies of a 2D viscous flow 70

Ignatovich S.Yu., Barkhaev P.Yu. The exponential form of a nonlinear control system with respect to the input 75

Dimitrova S.D., Dimitrov D.B. Theorem on the continuity of the solutions of the system of equations 77

Kizilova N.N. Pressure wave propagation in the tube at given reflection conditions 81

Rvachova T.V. On the asymptotics of the Taylor series generalization 82

SUMMARY

105

61077, Харьков, м. Окопів, 4, Харківський національний університет
Відділення центр ХНУ
Відділення ПП "Азарт" Б.Р.
61144 Харків-144, вул. Топова вулиця, 17

ОБОВ'ЯЗКОВИЙ
ПРИМІРНИК

