О высшихъ и низшихъ предѣлахъ вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи.

В. А. Стеклова.

§ 1.

Въ настоящей замѣткѣ я не желаю дать общаго теоретически стройнаго метода для рѣшенія вопроса объ отысканіи предѣловъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи; цѣль будетъ достигнута, если удастся найти такой частный пріемъ, который давалъ-бы возможность рѣшить эти вопросы въ большинствѣ случаевъ съ меньшей затратой времени, съ меньшимъ числомъ вычисленій.

Изъ существующихъ способовъ опредѣленія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней уравненій наиболѣе употребительны два: Ньютона и Лагерра. Первый основанъ на извѣстныхъ свойствахъ производныхъ данной функціи, представляющей лѣвую часть уравненія; второй на нѣкоторыхъ свойствахъ особыхъ функцій Лагерра. Первый точнѣе въ теоретическомъ отношеніи; второй болѣе удобенъ въ практическомъ. Остановимся на послѣднемъ.

Пусть

$$f(x) = V_0 = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

заданное уравненіе.

Составимъ рядъ функцій

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}, \\ V_2 &= x^{n-2} + A_1 x^{n-3} + \ldots + A_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{n-2} &= x^2 + A_1 x + A_2, \\ V_{n-1} &= x + A_1, \\ V_n &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Если при $x = \alpha$ $(\alpha > 0)$ всѣ функціи $V_i (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots n)$ положительны, то α есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія.

Замѣтивъ [1]), что всякое

$$V_k = x V_{k+1} + A_{n-k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

найдемъ, что при $\alpha_1 > \alpha$

$$V_{n-1}(\alpha_1) > V_{n-1}(\alpha),\ V_{n-2}(\alpha_1) > V_{n-2}(\alpha) \ldots,\ V_0(\alpha_1) > V_0(\alpha), \ldots (2_1)$$

откуда слѣдуетъ, что, при возрастаніи x отъ α до ∞, функція V_0 возрастаетъ, оставаясь всегда положительною, и слѣдовательно $x = \alpha$ есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (1).

Преимущество способа Лагерра передъ Ньютоновымъ состоитъ въ сравнительно простѣйшемъ вычисленіи функцій $V_1 \ldots V_{n-1}$, законъ образованія которыхъ дается равенствомъ (2), но во всякомъ случаѣ этотъ способъ можетъ потребовать весьма сложныхъ вычисленій, особенно если искомый предѣлъ и степень уравненія достаточно высоки. Не имѣя напередъ никакой догадки о первомъ, мы должны подставлять рядъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ (если хотимъ найти его въ цѣлыхъ числахъ) отъ нуля до нѣкотораго k и каждый разъ вычислять рядъ функцій (α), что можетъ составить очень длинную операцію, особенно если коэффиціенты большія числа.

Понятно, замѣтимъ между прочимъ, что теорема Лагерра дастъ низшій предѣлъ положительныхъ корней разсматриваемаго уравненія, если, положивъ $x = \dfrac{1}{x_1}$, опредѣлимъ при помощи ея высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f_1(x_1) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n = 0, \quad \ldots\ldots (3)$$

которое назовемъ обратнымъ уравненіемъ.

---

[1]) Привожу доказательство, данное г. Мясоѣдовымъ въ статьѣ „Двѣ теоремы Высшей Алгебры“. См. Математич. Сборникъ, томъ XI, стр. 617.

Высшіе и низшіе предѣлы отрицательныхъ корней получатся, если вмѣсто x введемъ перемѣнную $-x_2$, а затѣмъ вмѣсто x_2 обратную ей $\frac{1}{x_3}$, и будемъ искать высшіе предѣлы положительныхъ корней такимъ образомъ преобразованныхъ уравненій.

§ 2.

Въ настоящей замѣткѣ я постараюсь показать, что въ большинствѣ случаевъ можно отыскать предѣлы корней несравненно простѣйшимъ пріемомъ, не прибѣгая къ сколько-нибудь сложнымъ вычисленіямъ. Для этого установимъ слѣдующее, почти очевидное, предложеніе.

Между коэффиціентами A_n, $A_{n-1}, \ldots A_1$ и $(n-1)$ параметрами

$$k_1, \quad k_2 \ldots k_{n-1}$$

всегда можно установить $(n-1)$ равенствъ вида

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= -k_1(A_{n-1}+k_{n-1}),\\
k_{n-1} &= k_1(A_{n-2}+k_{n-2}),\\
k_{n-2} &= k_1(A_{n-3}+k_{n-3}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
k_3 &= k_1(A_2+k_2),\\
k_2 &= k_1(A_1+k_1),
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

причемъ параметръ k_1, входящій множителемъ въ правыя части всѣхъ этихъ равенствъ, будетъ необходимо однимъ изъ корней уравненія

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = 0.$$

Помноживъ обѣ части этихъ равенствъ (4), начиная съ третьяго послѣдовательно на k_1, $k_1{}^2 \ldots$ до k_1^{n-3} и сложивъ всѣ, за исключеніемъ перваго, получимъ

$$k_{n-1} = k_1A_{n-2} + k_1{}^2A_{n-3} + \ldots + k_1^{n-2}A_1 + k_1^{n-1},$$

откуда, при помощи перваго изъ нихъ, находимъ

$$k_1^n + A_1k_1^{n-1} + \ldots + k_1{}^2A_{n-2} + k_1A_{n-1} + A_n = 0. \quad . \quad . \quad (5)$$

Давъ k_1 значеніе одного изъ корней уравненія (5), опредѣлимъ изъ равенствъ (4), начиная съ послѣдняго, всѣ $k_i(i=2, 3\ldots n-1)$, а первое обратится въ тождество

$$(A_n)=(A_n),$$

гдѣ (A_n) обозначаетъ численное значеніе коэффиціента A_n. При всякомъ же k_1, отличномъ отъ одного изъ корней разсматриваемаго уравненія, правая часть перваго равенства будетъ или $>$ или $< A_n$, коэффиціента при нулевой степени k_1 въ уравненіи (5).

Систему равенствъ (4) можно разсматривать, слѣдовательно, только какъ особое изображеніе уравненія (5), и подстановка въ первое изъ нихъ k_{n-1}, вычисленнаго послѣдовательно, при данномъ k_1, изъ остальныхъ равенствъ, есть не что иное какъ подстановка даннаго значенія k_1 въ изслѣдуемое уравненіе (5). Отсюда непосредственно заключаемъ, что если дадимъ k_1 значеніе большее наибольшаго изъ положительныхъ корней уравненія, то

$$A_n > -k_1(A_{n-1}+k_{n-1}), \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

гдѣ подъ k_1 разумѣется данное его значеніе (или большее), а подъ k_{n-1} вычисленное по равенствамъ (4). Если, далѣе, дадимъ k_1 два значенія k'_1 и k_1'', вычислимъ соотвѣтствующія имъ значенія k'_{n-1} и k''_{n-1} и составимъ выраженія

$$-k'_1(A_{n-1}+k'_{n-1}) \quad \text{и} \quad -k''_1(A_{n-1}+k''_{n-1}),$$

то, если между k'_1 и k''_1 заключается четное число корней уравненія (5) или ни одного

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1}+k'_{n-1}),\ A_n \gtrless -k''_1(A_{n-1}+k''_{n-1}), \quad \ldots (7)$$

если же нечетное или одинъ, то

$$A_n \gtrless -k'_1(A_{n-1}+k'_{n-1}),\ A_n \lessgtr -k''_1(A_{n-1}+k''_{n-1}), \ldots \ldots (8)$$

причемъ въ выраженіяхъ (7) и (8) надо брать одновременно верхніе или нижніе знаки.

Принявъ во вниманіе условія неравенства (6), мы, по одному взгляду на равенства (4), заключаемъ о возможности въ какомъ угодно частномъ случаѣ вычислить высшій предѣлъ положительныхъ корней съ достаточной точностью, полагая его, впрочемъ, большимъ единицы, что въ большинствѣ случаевъ соотвѣтствуетъ дѣйствительности, за исключеніемъ того, когда всѣ корни заключаются между 0 и 1. Послѣдній случай, впрочемъ, всегда можно подвести подъ первый, стоитъ только замѣнить

$$x \text{ черезъ } x_1 - 1$$

и искать высшій предѣлъ положительныхъ корней преобразованнаго уравненія, который несомнѣнно будетъ > 1.

Не входя въ длинный рядъ общихъ разсужденій, я разсмотрю нѣсколько частныхъ примѣровъ и сравню отысканіе высшихъ предѣловъ положительныхъ корней по данному пріему и способу Лагерра, для чего я въ началѣ статьи и изложилъ вкратцѣ содержаніе послѣдняго.

§ 3.

Возьмемъ извѣстное уравненіе Лагранжа [1])

$$x^3 - 7x + 7 = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Примѣняя способъ Лагерра, составляемъ функціи

$$V_0 = x^3 - 7x + 7\,,$$
$$V_1 = x^2 - 7\,,$$
$$V_2 = x\,,$$
$$V_3 = 1\,.$$

Подставляя въ этотъ рядъ значенія $x = 0, 1, 2, 3$, получаемъ таблицу

x	V_0	V_1	V_2	V_3
0	$+$	$-$	0	$+$
1	$+$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$-$	$+$	$+$
3	$+$	$+$	$+$	$+$

,

откуда и заключаемъ, что 3 есть искомый предѣлъ. Такимъ образомъ, для достиженія добытаго результата пришлось выполнить 6 вычисле-

---

[1]) См. Serret, „Cours d'Algèbre supérieure". T. I. и Математическій Сборникъ, Т. XI, стр. 618.

ній, хотя и не сложныхъ, что, конечно, зависитъ отъ простоты взятаго уравненія.

Примѣнимъ нашъ способъ. Въ данномъ случаѣ

$$A_n = 7\,,\quad A_{n-1} = -7\,,\quad A_{n-2} = 0$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} 7 &= -k_1(-7+k_2)\,, \\ k_2 &= k_1{}^2. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Высшій предѣлъ найдется, если удовлетворимъ условію

$$7 > k_1(7-k_2)\,, \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

откуда очевидно, что при

$$k_2 > 7$$

или

$$k_1 > \sqrt{7}$$

неравенство (11) будетъ удовлетворено, а, слѣдовательно, $\sqrt{7}$ и есть высшій предѣлъ положительныхъ корней. Результатъ очевидный и болѣе точный, чѣмъ по способу Лагерра.

Для нахожденія низшаго предѣла составимъ обратное уравненіе

$$7x^3 - 7x^2 + 1 = 0\,,$$

или

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{7} = 0\,,$$

причемъ

$$A_n = \frac{1}{7}\,,\quad A_{n-1} = 0\,,\quad A_{n-2} = -1\,,$$

такъ что

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{7} &= -k_1 k_2\,, \\ k_2 &= k_1(-1+k_1)\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что при всякомъ

$$k_1 > 1$$

k_2 положительно, и первое равенство ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть удовлетворено. Слѣдовательно, 1 и есть низшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія. Способъ Лагерра даетъ тотъ же предѣлъ.

Этотъ примѣръ уже до нѣкоторой степени указываетъ на выгоду даннаго нами частнаго пріема, но она станетъ еще очевиднѣе, если возьмемъ болѣе сложное уравненіе. Пусть, напримѣръ, требуется найти высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x + 4567x - 89012 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Примѣняя способъ Лагерра, мы должны составить семь функцій V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, а именно:

$$V_0 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 + 123x^3 + 4567x - 89012\,,$$

$$V_1 = x^5 - 12x^4 + 60x^3 + 123x^2 + 4567\,,$$

$$V_2 = x^4 - 12x^3 + 60x^2 + 123x\,,$$

$$V_3 = x^3 - 12x^2 + 60x + 123\,,$$

$$V_4 = x^2 - 12x + 60\,,$$

$$V_5 = x - 12\,,$$

и, принявъ x или равнымъ, или большимъ 12, произвести пять довольно сложныхъ вычисленій; число 12 и будетъ искомымъ предѣломъ.

Въ данномъ случаѣ вопросъ все таки упрощенъ тѣмъ обстоятельствомъ, что коэффиціентъ члена, слѣдующаго за высшей степенью x-а есть величина отрицательная и высшій предѣлъ корней не $>$ этого коэффиціента, но съ этимъ вводится новое практическое неудобство: предѣлъ, полученный этимъ пріемомъ, не можетъ быть ниже численнаго значенія послѣдняго, тогда какъ высшій предѣлъ положительныхъ корней можетъ оказаться значительно ниже его. Съ другой стороны упомянутый коэффиціентъ можетъ быть слишкомъ малъ, и тогда придется произвести длинный рядъ выкладокъ.

Обращаемся къ нашему способу, причемъ

$$A_n = -89012\,, \quad A_{n-1} = 4567\,, \quad A_{n-2} = 0, \quad A_{n-3} = 123\,,$$

$$A_{n-4} = 60\,, \quad A_{n-5} = -12\,,$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned}
89012 &= k_1(4567 + k_5), \\
k_5 &= k_1 k_4, \\
k_4 &= k_1(123 + k_3), \\
k_3 &= k_1(60 + k_2), \\
k_2 &= k_1(-12 + k_1).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Отсюда непосредственно заключаемъ, что при

$$k_1 > 12$$

всѣ

$$k_i (i = 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ 5)$$

возрастаютъ, оставаясь положительными, а наименьшее значеніе k_5 будетъ соотвѣтствовать $k_1 = 12$; при этомъ

$$\begin{aligned}
k_2 &= 0\,, \\
k_3 &= 12.60 = 720\,, \\
k_4 &= 12(123 + 720) = 9116\,, \\
k_5 &= 12.9116.
\end{aligned}$$

Изъ этой таблицы съ очевидностью слѣдуетъ, что и при $k_1 = 12$ равенство первое изъ (14) удовлетворено быть не можетъ, а, слѣдовательно, число 12 и есть высшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія. Во многихъ случаяхъ мы легко можемъ найти, замѣтимъ между прочимъ, болѣе низкій предѣлъ корней, чѣмъ по пріему Лагерра. Возьмемъ уравненіе

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$$

и составимъ равенства

$$\begin{aligned}
-6 &= -k_1(5 + k_3)\,, \\
k_3 &= k_1(5 + k_2)\,, \\
k_2 &= k_1(-5 + k_1).
\end{aligned}$$

Искомый предѣлъ найдется изъ условія

$$5k_1 + k_1 k_3 > 6\,.$$

Предполагая $k_1 > 1$, находимъ выполненнымъ это условіе, если

$$5 + k_3 > 6\,,$$

т. е. если

$$k_3 > 1\,,$$

или

$$5 + k_2 > 1\,,\quad k_2 > -4\,.$$

Такъ какъ корни уравненія

$$k_1{}^2 - 5k_1 + 4 = 0\,,$$

суть

$$k_1 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}\,,$$

то

$$k_2 > -4 \quad \text{при} \quad k_1 > 4\,,$$

причемъ, очевидно,

$$k_3 > 1\,,\quad 5 + k_3 > 6\,,\quad 5k_1 + k_1 k_3 > 6\,.$$

Слѣдовательно, 4 и есть высшій предѣлъ положительныхъ корней даннаго уравненія. Способъ Лагерра даетъ число 5; формула-же Ролля

$$k_1 \geqq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}}\,,$$

гдѣ A коэффиціентъ при высшей степени, a положительное число не меньшее каждаго изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ уравненія, дастъ число 6.

Возьмемъ еще примѣръ, приведенный г. Сохоцкимъ на отысканіе предѣла положительныхъ корней по способу Ролля, именно уравненіе

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0\,,$$

для котораго высшій предѣлъ корней равенъ

$$1 + \sqrt[5]{109}\,,$$

или 4. Примѣняя способъ Лагерра, получаемъ

$$V_0 = x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109\,,$$

$$V_1 = x^4 + x^3 + x + 5\,,$$

$$V_2 = x^3 + x^2 + 1\,,$$

$$V_3 = x^2 + x\,,$$

$$V_4 = x + 1\,.$$

При $x > 0$ всѣ функціи $V_i (i = 4, 2 \ldots 1)$ положительны. Слѣдуетъ разсмотрѣть только V_0.

При $x = 1$, $x = 2$, функція $V_0 < 0$, а при $x = 3$, имѣемъ $V_0 > 0$. Слѣдовательно, 3 есть высшій предѣлъ.

Примѣняя указанный нами пріемъ, получаемъ

$$109 = k_1(5 + k_4),$$
$$k_4 = k_1(1 + k_3),$$
$$k_3 = k_1 k_2,$$
$$k_2 = k_1(1 + k_1),$$

откуда слѣдуетъ, что если

$$k_1(5 + k_4) > 109, \quad k_1 k_4 > 109, \quad k_1{}^3 k_2 > 109, \quad k_1{}^5 > 109,$$

т. е. если $k_1 > 3$, функція $V_0 > 0$ и, слѣдовательно, 3 есть высшій предѣлъ.

Величина предѣла та же, что и при способѣ Лагерра, и почти никакихъ вычисленій.

Всѣ предыдущіе примѣры я бралъ наудачу; изъ нихъ нѣкоторые, именно первые три, служили примѣрами для уясненія способа Лагерра и вытекающихъ изъ него слѣдствій въ упомянутой выше статьѣ г. Мясоѣдова.

Чтобы болѣе уяснить выгоду даннаго пріема, разсмотримъ нарочно случай, когда отрицательный коэффиціентъ при членѣ, слѣдующемъ за высшей степенью x-а, весьма малъ сравнительно съ числомъ, выражающимъ дѣйствительный высшій предѣлъ положительныхъ корней. Пусть

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= x^4 - 2x^3 - 1333x^2 + 1334x + 2666, \\ V_1 &= x^3 - 2x^2 - 1333x + 1334, \\ V_2 &= x^2 - 2x - 1333, \\ V_3 &= x - 2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

т. е. ищется высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$x^4 - 2x^3 - 1333x^2 + 1334x + 2666 = 0.$$

Искомый предѣлъ > 2 и > 30, какъ легко видѣть на основаніи второго изъ равенствъ (15), но < 40. Слѣдуетъ взять промежуточное число между 30 и 40. При $x = 35$, $x = 37$ функція $V_2 < 0$, а при $x = 38$

$$V_2 > 0, \quad V_1 > 0 \quad \text{и} \quad V_0 > 0.$$

Слѣдовательно, 38 и есть искомый предѣлъ. Продолжительность этихъ вычисленій очевидна.

Составимъ теперь равенства (14)

$$2666 = -k_1(1334 + k_3),$$

$$k_3 = k_1(-1333 + k_2),$$

$$k_2 = k_1(-2 + k_1).$$

При всякомъ $k_1 > 2$ параметръ k_2 возрастаетъ, оставаясь положительнымъ. Условіе

$$2666 > -k_1(1334 + k_3) \ldots\ldots\ldots (16)$$

будетъ удовлетворено, если

$$k_3 > 0,$$

или

$$k_1(k_2 - 1333) > 0, \quad k_2 > 1333,$$

$$k_1{}^2 - 2k_1 > 1333 \ldots\ldots\ldots (17)$$

Корни уравненія

$$k_1{}^2 - 2k_1 = 1333$$

суть

$$k_1 = 1 + \sqrt{1334}, \qquad k_2 = 1 - \sqrt{1334},$$

откуда слѣдуетъ, что при всякомъ $k_1 > 38$, условіе (17), а слѣдовательно и (16), удовлетворены. Такимъ образомъ, $k_1 = 38$ и есть высшій предѣлъ. Формула Ролля даетъ за высшій предѣлъ число 1334.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что данный способъ требуетъ болѣе разсужденій въ каждомъ частномъ случаѣ, чѣмъ вычисленій, по самому характеру своему несомнѣнно примѣнимъ ко всевозможнымъ случаямъ и всегда даетъ искомый предѣлъ. Правда, съ возрастаніемъ степени уравненія сужденія эти усложняются, но въ такой же мѣрѣ усложняются и вычисленія по способу Лагерра, что мы видѣли во второмъ примѣрѣ. Въ случаяхъ же не слишкомъ высокихъ степеней уравненія, преимущество предлагаемаго способа мнѣ кажется очевиднымъ.

§ 4.

Изображеніе алгебраическаго уравненія въ видѣ системы равенствъ (14) не только даетъ возможность быстро, при помощи не сложныхъ соображеній, найти предѣлы, между которыми заключаются вещественные корни даннаго уравненія, но во многихъ случаяхъ позволяетъ съ не меньшею простотою и отдѣлить корни. Опредѣлимъ условія отсутствія корня между данными предѣлами α и β. Если между двумя значеніями $k_1 = \alpha$ и β существуетъ корень, то хотя разъ должно удовлетвориться равенство

$$A_n = -k_1(A_{n-1} + k_{n-1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

т. е. при нѣкоторомъ значеніи k_1, большемъ α и меньшемъ β, должно существовать по крайней мѣрѣ одно такое значеніе k_{n-1}, что равенство (18) обратится въ тождество.

Пусть

$$1) \quad A_n > 0, \qquad A_{n-1} > 0,$$

$$2) \quad A_n > 0, \qquad A_{n-1} < 0,$$

$$3) \quad A_n < 0, \qquad A_{n-1} > 0,$$

$$4) \quad A_n < 0, \qquad A_{n-1} < 0.$$

Разсмотримъ каждый случай отдѣльно.

1) При измѣненіи k_1 отъ α до β отношеніе $\frac{A_n}{k_1}$ убываетъ отъ $\frac{A_n}{\alpha}$ до $\frac{A_n}{\beta}$. Для удовлетворенія равенства (18) k_{n-1} необходимо должно получить такое значеніе (при измѣненіи k_1 отъ α до β), чтобы

$$-(A_{n-1} + k_{n-1}) \geq \frac{A_n}{\beta},$$

т. е. чтобы

$$k_{n-1} \leq -\left(\frac{A_n}{\beta} + A_{n-1}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Такимъ образомъ k_{n-1} необходимо должно принять хотя разъ отрицательное значеніе, по числовой величинѣ $> \left[\frac{A_n}{\beta} + A_{n-1}\right]$.

2) Условіе существованія корня для втораго случая, очевидно, то же самое, только k_{n-1} можетъ быть положительнымъ, но меньшимъ нѣкотораго предѣла, если числовое значеніе $(A_{n-1}) > \frac{A_n}{\beta}$.

3) Обозначивъ черезъ (A_n) численное значеніе A_n, получимъ изъ равенства (18)

$$(A_n) = k_1(A_{n-1} + k_{n-1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18_1)$$

откуда заключаемъ, что въ случаѣ существованія корня между α и β должно быть выполнено условіе

$$k_{n-1} > \frac{(A_n)}{\beta} - A_{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

причемъ k_{n-1} должно пріобрѣсть положительное значеніе, не меньшее нѣкотораго предѣла, если $A_{n-1} < \frac{(A_n)}{\beta}$, или и отрицательное, но по числовому значенію меньшее числовой величины $\frac{(A_n)}{\beta} - A_{n-1}$, если $A_{n-1} > \left(\frac{A_n}{\beta}\right)$.

4) Легко видѣть, что для послѣдняго случая (4) условіе (20) останется неизмѣннымъ, только k_{n-1} должно принять положительное значеніе, не меньшее $\frac{(A_n)}{\beta} + (A_{n-1})$, гдѣ (A_{n-1}) обозначаетъ численное значеніе коэффиціента A_{n-1}. Само собой разумѣется, можно получить и другой рядъ неравенствъ, обратныхъ указаннымъ, причемъ вмѣсто β будетъ входить въ нихъ число α.

Равенства, слѣдующія за первымъ изъ (14), дадутъ возможность построить рядъ подобныхъ же неравенствъ для k_{n-2}, $k_{n-3}\ldots$ до k_1. Если полученные такимъ образомъ предѣлы для k_1 окажутся согласными съ данными ($\alpha < k_1 < \beta$), то между α и β можетъ существовать по крайней мѣрѣ одинъ корень; въ противномъ случаѣ уравненіе не имѣетъ ни одного корня въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

§ 5.

Допустимъ, что при подстановкѣ двухъ значеній k_1 (α и β) получились неравенства (8). Какъ убѣдиться въ существованіи одного корня между α и β? Если производное уравненіе не имѣетъ между взятыми предѣлами ни одного корня, первообразное содержитъ не $>$ одного. Подставивъ въ первое данныя предѣльныя значенія k_1, получимъ или перемѣну неравенствъ, или постоянство. Въ послѣднемъ случаѣ, по предыдущему, мы можемъ узнать четное ли число корней содержится между α и β или ни одного. Если ни одного, первообразное уравненіе имѣетъ одинъ корень. Въ противномъ случаѣ дѣлимъ данный промежутокъ на меньшіе и, отыскавъ, въ какомъ изъ нихъ лежитъ нечетное число корней первообразнаго (или одинъ) и въ какомъ нѣтъ ни одного, примѣнимъ для перваго промежутка предыдущія сужденія по отношенію къ производному уравненію. Если оно не имѣетъ корня въ этихъ предѣлахъ, то данное имѣетъ одинъ корень. Въ противномъ случаѣ дѣлимъ промежутокъ на болѣе малые и, продолжая разсуждать подобно предыдущему, получимъ, наконецъ, предѣлы, въ которыхъ лежитъ не болѣе одного корня даннаго уравненія. Затрудненіе можетъ встрѣтиться лишь въ случаяхъ, когда корни первообразнаго и производнаго весьма близки между собою, но это представляетъ исключенія; въ большинствѣ же случаевъ отдѣленіе слѣдуетъ безъ особыхъ затрудненій.

Изъ слѣдующихъ примѣровъ убѣдимся, на сколько предлагаемый частный пріемъ проще и требуетъ меньшихъ вычисленій, чѣмъ даже совершеннѣйшій въ практическомъ отношеніи способъ Фурье. При этомъ я нарочно возьму нѣсколько примѣровъ наиболѣе благопріятныхъ для послѣдняго, приводимыхъ для его уясненія въ курсахъ Алгебры [1]).

§ 6.

Начнемъ съ простѣйшихъ примѣровъ. Отдѣлимъ положительные корни уравненія

$$x^3+2x^2-x+6=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(21)$$

Равенство (14) принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}6&=k_1(1-k_2)\,,\\ k_2&=k_1(2+k_1)\,.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(22)$$

Отсюда слѣдуетъ, что 1 есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія (21).

Условія существованія корня между 0 и 1 будутъ.

$$1-k_2\geq 6\,,\quad \text{т. е.}\quad k_2\leq -5\,,$$

что, очевидно, невозможно. Слѣдовательно, данное уравненіе не имѣетъ положительныхъ вещественныхъ корней.

Переходимъ къ болѣе сложнымъ случаямъ. Опредѣлимъ, например, число корней уравненія

$$x^4+6x^3-7x^2+2x+24=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(23)$$

между 0 и 1. Въ данномъ случаѣ

$$\begin{aligned}24&=-k_1(2+k_3)\,,\\ k_3&=k_1(-7+k_2)\,,\\ k_2&=k_1(6+k_1)\,,\end{aligned}$$

[1]) См. Сохоцкій, „Высшая Алгебра". Часть I. СПБ., 1882.

Условія существованія корня будутъ

$$-(2+k_3)>24,$$

или

$$k_3 \leq -26\,,\quad k_1(k_2-7) \leq -26\,,$$

т. е.

$$k_2-7 \leq -26\,,\quad k_2 \leq -19\,,$$

что невозможно, ибо $k_2>0$ при всякомъ $k_1>0$. Уравненіе (23) не имѣетъ корней между 0 и 1.

Отдѣлимъ положительные корни уравненія

$$5x^5-7x^4-9x^3+16x^2-11x+51=0\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

причемъ

$$A_n=\frac{51}{5}\,,\quad A_{n-1}=-\frac{11}{5}\,,\quad A_{n-2}=\frac{16}{5}\,,\quad A_{n-3}=-\frac{9}{5}\,,\quad A_{n-4}=-\frac{7}{5}\,.$$

Равенства (14) будутъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{51}{5}&=-k_1\left(-\frac{11}{5}+k_4\right),\\
k_4&=k_1\left(\frac{16}{5}+k_3\right),\\
k_3&=k_1\left(-\frac{9}{5}+k_2\right),\\
k_2&=k_1\left(-\frac{7}{5}+k_1\right).
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(25)$$

Высшій предѣлъ положительныхъ корней найдется изъ условія

$$\frac{51}{5}>k_1\left(\frac{11}{5}-k_4\right),$$

или

$$\frac{11}{5}-k_4<0\,,\quad k_4>\frac{11}{5}\,,$$

$$\frac{16}{5}k_1+k_1k_3>\frac{11}{5}\,,\quad k_1k_3>0\,,$$

$$k_1^2\left(k_2-\frac{9}{5}\right)>0\,,\quad k_2>\frac{9}{5}\,,$$

и, наконецъ,

$$k_1^2-\frac{7}{5}k_1>\frac{9}{5}=1{,}8\,.$$

Отсюда заключаемъ, что $k_1 = 3$ есть высшій предѣлъ корней даннаго уравненія [1]).

Дѣлимъ промежутокъ 0, 3 на меньшіе 0, 1; 1, 2; 2, 3.

Условія существованія корня для перваго изъ нихъ будутъ

$$\frac{11}{5} - k_4 > \frac{51}{5}, \quad -k_4 > 8,$$

$$-k_1\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > 8,$$

$$\frac{16}{5} + k_3 < -8, \quad \text{т. е.} \quad k_3 < -\frac{56}{5},$$

$$k_1\left(-\frac{9}{5} + k_2\right) < -\frac{56}{5},$$

или

$$\frac{9}{5} - k_2 > \frac{56}{5}, \quad -k_2 > \frac{47}{5},$$

и, наконецъ,

$$k_1\left(\frac{7}{5} - k_1\right) > \frac{47}{5}, \quad \frac{7}{5} - k_1 > \frac{47}{5}, \quad -k_1 > 8,$$

что, очевидно, не возможно. Отсюда заключаемъ, что между 0 и 1 нѣтъ ни одного корня уравненія. Разсмотримъ слѣдующій промежутокъ между 1 и 2.

Условія существованія корня будутъ

$$\frac{11}{5} - k_4 > \frac{51}{10}, \quad -k_4 > \frac{29}{10},$$

$$-k_1\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > \frac{29}{10}, \quad -\left(\frac{16}{5} + k_3\right) > \frac{29}{20},$$

$$-k_3 > \frac{93}{20},$$

$$k_1\left(\frac{9}{5} - k_2\right) > \frac{93}{20}, \quad -k_2 > \frac{93}{40} - \frac{9}{5}(-) = 4{,}2$$

$$\frac{7}{5} - k_1 > 2{,}1, \quad k_1 < -0{,}7, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

что невозможно.

---

[1]) Способъ Лагерра даетъ то же число, но требуетъ гораздо большихъ вычисленій. По способу Ньютона получается число 2.

Такимъ образомъ, между 1 и 2 также нѣтъ ни одного корня даннаго уравненія. Остается разсмотрѣть промежутокъ между 2 и 3.

Послѣднее изъ равенствъ (25) показываетъ, что въ этихъ предѣлахъ k_2 возрастаетъ, оставаясь $> \frac{6}{5}$. Такъ какъ

$$\frac{dk_3}{dk_1} = -\frac{9}{5} + k_2 + k_1 \frac{dk_2}{dk_1} = -\frac{9}{5} + k_2 + k_1 \left(-\frac{7}{5} + 2k_1\right),$$

то k_3 также возрастаетъ; наименьшее значеніе его будетъ при $k_1 = 2$ и равно $-\frac{6}{5}$. Отсюда слѣдуетъ, что k_4 остается положительнымъ и большимъ $2\left(\frac{16}{5} - \frac{6}{5}\right) = 4$. Такъ какъ наибольшее значеніе $\frac{11}{5} k_1$ есть $\frac{33}{5} < \frac{51}{5}$, то равенство первое не можетъ быть удовлетворено, ибо правая его часть всегда $< \frac{33}{5}$. Слѣдовательно, между 2 и 3 нѣтъ ни одного корня уравненія (24). Итакъ, оно не имѣетъ вовсе вещественныхъ положительныхъ корней.

Въ этомъ примѣрѣ всего лучше будетъ видна простота предложеннаго пріема, если сравнимъ приведенныя сейчасъ сужденія съ вычисленіями, нужными для отдѣленія положительныхъ корней этого уравненія по способу Фурье.

Составляемъ рядъ функцій Фурье

$$\left.\begin{aligned} f &= 5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51, \\ f' &= 25x^4 - 28x^3 - 27x^2 + 32x - 11, \\ f'' &= 100x^3 - 84x^2 - 54x + 32, \\ f''' &= 300x^2 - 168x - 54, \\ f^{\mathrm{IV}} &= 600x - 168, \\ f^{\mathrm{V}} &= 600. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (26)$$

Вычисляя значеніе этихъ функцій для 0, 1, 2 (*т. е. производя десять вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
0	+	—	+	—	—	+
1	+	—	—	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+

. . (27),

откуда заключаемъ, что высшій предѣлъ корней (положительныхъ) равенъ 2. Для промежутка 0, 1 получаемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0.$$

Такъ какъ послѣ перваго индекса, равнаго 1, слѣдуетъ другой также равный 1, то необходимо раздѣлить промежутокъ 0 и 1 на меньшіе, положимъ на промежутки 0, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$, 1. Вычисляя значеніе ряда функцій Фурье для $x=\frac{1}{2}$ (т. е. *производя еще 5 вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
0	+	—	+	—	—	+
$\frac{1}{2}$	+	—	—	—	+	+
1	+	—	—	+	+	+

Индексъ $f(x)$ для промежутка $\frac{1}{2}$, 1 равенъ нулю. Слѣдовательно, данное уравненіе не имѣетъ ни одного корня между $\frac{1}{2}$ и 1.

Для промежутка 0 и $\frac{1}{2}$ имѣемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0.$$

Такъ какъ послѣ перваго индекса, равнаго 1, слѣдуетъ индексъ 0, то надо вычислить численное значеніе суммы

$$\text{числ. знач. } \frac{f'(0)}{f''(0)} + \text{числ. знач. } \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f''\left(\frac{1}{2}\right)},$$

которая $> \frac{1}{2}$. Отсюда слѣдуетъ, что между 0 и $\frac{1}{2}$ также нѣтъ корней. Остается разсмотрѣть промежутокъ между 1 и 2.

Таблица (27) даетъ слѣдующій рядъ индексовъ

$$2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,$$

откуда заключаемъ, что промежутокъ 1, 2 слѣдуетъ раздѣлить на меньшіе. Положимъ $x=\frac{3}{2}$ и, вычисливъ рядъ функціи (26) (т. е. *совершая еще пять вычисленій*), получимъ тѣ же знаки, что и при $x=2$. Положимъ $x=\frac{5}{4}$ и, опять вычисливъ рядъ функцій Фурье (т. е. *совершивъ еще пять вычисленій*), получаемъ таблицу

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$\frac{3}{2}$	+	+	+	+	+	+
$\frac{5}{4}$	+	—	+	+	+	+
1	+	—	—	+	+	+

,

изъ которой видно, что между 1 и $\frac{5}{4}$ нѣтъ ни одного корня. Для промежутка $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ имѣемъ рядъ индексовъ

$$2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Вычисливъ численное значеніе суммы

$$\text{числ. знач.}\ \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}+\text{числ. знач.}\ \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)}>\frac{1}{4},$$

утверждаемъ, что и въ данномъ промежуткѣ нѣтъ ни одного корня.

Итакъ, уравненіе (24) не имѣетъ ни одного положительнаго вещественнаго корня [1]). При этомъ приходится совершить 22 вычисленія, что, очевидно, требуетъ продолжительной затраты времени.

§ 7.

Разберемъ еще одинъ случай: отдѣлимъ корни уравненія

$$2x^5-17x^4+45x^3-23x^2-54x+42=0, \quad . \ . \ . \ . \ (28)$$

заключающіеся между 3 и 4.

---

[1]) Этотъ примѣръ взятъ цѣликомъ изъ Высшей Алгебры г. Сохоцкаго. См. „Высш. Алгебра", стр. 187.

Составимъ равенства

$$\left.\begin{aligned} 21 &= -k_1(-27+k_4), \\ k_4 &= k_1\left(-\frac{23}{2}+k_3\right), \\ k_3 &= k_1\left(\frac{45}{2}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1\left(-\frac{17}{2}+k_1\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

При $k_1 = 3$ имѣемъ $21 < \frac{45}{2}$, при $k_1 = 4$, очевидно, $21 > 4$.

Отсюда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ промежуткѣ лежитъ или нечетное число корней уравненія (28), или одинъ. Для производнаго уравненія

$$x^4 - \frac{34}{5}x^3 + \frac{27}{2}x^2 - \frac{23}{5}x - \frac{27}{5} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{27}{5} &= k_1\left(k_3 - \frac{23}{5}\right), \\ k_3 &= k_1\left(\frac{27}{2}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1\left(k_1 - \frac{34}{5}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Отсюда слѣдуетъ, что между 3 и 4 также находится нечетное число или одинъ корень этого уравненія. Производное уравненіе даннаго въ разсматриваемомъ случаѣ не позволяетъ сдѣлать никакихъ заключеній относительно корней послѣдняго.

Разсмотримъ производное уравненія (30)

$$x^3 - \frac{51}{10}x^2 + \frac{27}{4}x - \frac{23}{20} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Составимъ равенства

$$\left.\begin{aligned} \frac{23}{20} &= k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right), \\ k_2 &= k_1(-5{,}1+k_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Такъ какъ

$$\frac{d}{dk_1}\left[k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right)\right]=\frac{27}{4}+k_2+k_1\frac{dk_2}{dk_1}=\frac{27}{4}+k_1(3k_1-10{,}2)\,,$$

и такъ какъ наибольшее численное значеніе втораго члена правой части этого равенства во всякомъ случаѣ $<4{,}8$, заключаемъ, что

$$k_1\left(\frac{27}{4}+k_2\right)$$

возрастаетъ при измѣненіи k_1 отъ 3 до 4. Наименьшее значеніе этого выраженія получится при $k_1=3$ и равно 1,35. Первое изъ равенствъ (33) ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть удовлетворено при измѣненіи k_1 отъ 3 до 4, и, слѣдовательно, уравненіе (32) не имѣетъ въ этомъ промежуткѣ ни одного корня. Уравненіе (30) поэтому имѣетъ въ тѣхъ же предѣлахъ лишь одинъ корень, а такъ какъ для уравненія (28) получается перемѣна знака неравенства, то и оно имѣетъ лишь одинъ корень, который такимъ образомъ и отдѣленъ. Я нарочно подобралъ примѣръ этотъ, чтобы обратить вниманіе на возможное затрудненіе при отдѣленіи корней по указанному пріему въ случаяхъ, когда корни даннаго уравненія и производнаго достаточно близки другъ къ другу. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ они разнятся меньше, чѣмъ на 0,4, и поэтому пришлось, для упрощенія разсужденій, прибѣгнуть ко второму производному уравненію.

Если не пользоваться уравненіемъ (32), а дѣлить промежутки на меньшіе и поступать по пріему, указанному въ одномъ изъ предыдущихъ параграфовъ, придется произвести довольно продолжительный рядъ сужденій и вычисленій. Въ этомъ частномъ случаѣ методъ Фурье скорѣе приведетъ къ отдѣленію корня.

§ 8.

Слѣдуетъ замѣтить, что употребленіе указаннаго пріема особенно выгодно для доказательства отсутствія вещественнаго корня между данными предѣлами и преимущественно въ тѣхъ случаяхъ, когда численное значеніе послѣдняго коэффиціента значительно превосходитъ численное значеніе ему предшествующаго, или наоборотъ, хотя во многихъ случаяхъ отсутствіе этого условія не затрудняетъ ходъ рѣшенія. Напримѣръ, въ уравненіи

$$x^3-7x+7=0\,,\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

коэффиціенты при нулевой и первой степени x-а равны между собою; однако изъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} 7 &= k_1(7 - k_2), \\ k_2 &= k_1{}^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

непосредственно слѣдуетъ, что между 0 и 1 не можетъ быть ни одного корня разсматриваемаго уравненія.

Для уравненія

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

получимъ

$$\left.\begin{aligned} 1 &= k_1(1 - k_5), \\ k_5 &= k_1(1 + k_4), \\ k_4 &= k_1(-1 + k_3), \\ k_3 &= k_1(-1 + k_2), \\ k_2 &= k_1(1 + k_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Изъ этихъ равенствъ заключаемъ, что, если существуетъ корень > 1, k_5 должно быть величиною положительною и меньшей 1, но k_2 возрастаетъ съ возрастаніемъ k_1 отъ 2 (оставаясь положительнымъ), k_3 также возрастаетъ отъ 1, k_4 — отъ 0, k_5— отъ 1. Отсюда слѣдуетъ, что данное уравненіе не имѣетъ корней > 1. Рѣшеніе же вопроса о числѣ корней между 0 и 1 встрѣтитъ значительныя затрудненія; поэтому придется преобразовать это уравненіе въ другое, положивъ

$$x = x_1 - 1\,,$$

и искать корни уравненія

$$x^6 - 5x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 3x + 3 = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

заключенные между 1 и 2, причемъ

$$\begin{aligned} 3 &= k_1(3 - k_5)\,, \\ k_5 &= k_1(3 + k_4)\,, \\ k_4 &= k_1(-7 + k_3)\,, \\ k_3 &= k_1(9 + k_2)\,, \\ k_2 &= k_1(-5 + k_1)\,. \end{aligned}$$

Для $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ вмѣсто перваго изъ этихъ равенствъ получается неравенство $3 > 2$. Между 1 и 2 находится, слѣдовательно, или четное число корней, или ни одного.

Въ данномъ случаѣ нельзя убѣдиться въ отсутствіи корня непосредственно для промежутка 1,2. Надо раздѣлить его на меньшіе 1, 1,1; 1,1 , 1,2 ; и т. д. и доказывать отсутствіе корня для каждаго изъ нихъ по указанному выше пріему.

§ 9.

Мы замѣтили, что рѣшеніе задачи наиболѣе упрощается въ случаяхъ, когда численное значеніе одного изъ двухъ первыхъ (считая справа) коэффиціентовъ значительно превосходитъ численное значеніе другаго.

Положимъ, ищутся корни уравненія $f(x)=0$ въ промежуткѣ α и $\alpha+1$. Вычисляемъ численныя значенія $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$. Если окажется, что первое значительно $>$ втораго, то положивъ

$$x = x_1 + \alpha,$$

приведемъ данное уравненіе къ такому, въ которомъ коэффиціенты удовлетворяютъ вышеупомянутымъ условіямъ, и ищемъ его корни между 0 и 1. Если же разность чиселъ $f(\alpha)$ и $f'(\alpha)$ не велика (по отношенію къ каждому изъ нихъ), полагаемъ

$$x = x_1 - \beta$$

и разыскиваемъ корни преобразованнаго уравненія между $\alpha+\beta$ и $\alpha+\beta+1$, выбравъ β такъ, чтобы

$$f(-\beta) - f'(-\beta) < \text{ или } > 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

Въ случаѣ нечетности степени функціи f удовлетворимъ первому условію, положивъ β большимъ высшаго предѣла корней уравненія

$$f(-\beta) - f'(-\beta) = 0,$$

въ случаѣ четности — второму, причемъ можемъ увеличить разность, представляющую лѣвую часть неравенствъ (37), какъ угодно, смотря по требованіямъ задачи.