

Площина в тривимірному дійсному просторі.
Методична розробка для студентів 1-го курсу ММФ ХНУ
Г.Ч.Курінний, О.М.Невмержицька, О.О. Шугайло
Травень — 2015

Зміст

1	Площина в афінному просторі	2
1.1	Визначення та векторне рівняння	2
1.2	Параметричне рівняння площини	5
1.3	Рівняння площини “через точку паралельно двом неколінеарним векторам”, рівняння площини “через три точки”, загальне рівняння площини	10
1.4	Взаємне розташування площин	15
1.4.1	Дві площини загального розташування	15
1.4.2	Паралельність двох площин	17
1.4.3	Паралельність площини і вектора, паралельність площини і прямої	18
1.4.4	В’язка та жмуток площин.	20
2	Площина в евклідовому тривимірному просторі	23
2.1	Нормаль, вектор нормалі, векторне рівняння площини.	23
2.2	Рівняння площини через точку перпендикулярно вектору.	25
2.3	Відхилення від точки до площини та відстань від точки до площини. Нормальне рівняння площини. . . .	25

1 Площина в афінному просторі

Простір називаємо афінним, щоб підкреслити, що скалярний добуток не використовується.

1.1 Визначення та векторне рівняння

Площина є первісним, неозначуваним елементом в елементарній геометрії. Є аксіоми, яким підкоряється площина. Ці аксіоми дозволяють ввести вектори на площині, а також системи координат, і далі одержати рівняння, які задають площину. Будемо користуватися тим, що через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж єдину, тобто три точки визначають площину. Коли є три точки A, B, C в площині P , які не лежать на одній прямій, то можна ввести систему координат, взявши за початок координат одну з точок (нехай нею буде A) і базисними векторами можна взяти вектори $r_1 = \overrightarrow{AB}$, $r_2 = \overrightarrow{AC}$. Далі з кожною точкою M площини P зв'язуємо її радіус-вектор $\overrightarrow{AM}$, який можна розкласти за базисом $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AM} = u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} \quad u, v \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Якщо обрано за початок відліку точку O , яка не обов'язково лежить у вибраній площині, то для кожної точки $M \in P$ маємо радіус-вектор $r = \overrightarrow{OM}$ і можемо записати

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Визначення 1.1 Нехай є три вектори — r_0, r_1, r_2 , серед який вектори r_1, r_2 не колінеарні. Тоді

$$r = r_0 + u \cdot r_1 + v \cdot r_2, \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

називають векторним рівнянням площини, яка проходить через точку з радіус-вектором r_0 паралельно векторам r_1, r_2 . Вектори r_1, r_2 називають напрямними векторами площини

A

O

вона вже доведена. Друга причина полягає в тому, що доведення ґрунтується на аксіоматиці тривимірного дійсного простору, яка в явному вигляді в пропонованому курсі не сформульована. І третя причина — означення буде використовуватися в більш загальному випадку, де площиною називається те, що може бути задане таким векторним рівнянням, і, таким чином, доводити нічого.

Приклад. Для прикладу візьмемо точки A, B, C з координатами $A(1, 5, 7)$, $B(5, 1, 1)$, $C(5, 8, 2)$. Точкою відліку за наявності системи координат завжди береться початок цієї системи координат. Тоді

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad r_0 = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad r_1 = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

і векторним рівнянням площини, що проходить через точки A, B, C , буде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad -\infty < u, v < \infty. \quad (4)$$

Якщо в рівнянні (3) змінні u, v пробігають не всі можливі значення, а лише у певних вказаних межах — $a_1 \leq u \leq b_1$, $a_2 \leq v \leq b_2$, то рівняння (3) перетвориться в рівняння частини площини, що обмежена паралелограмом — рівняння паралелограма. Зокрема, якщо $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, то рівняння (3) перетвориться в рівняння

$$r = r_0 + u \cdot r_1 + v \cdot r_2, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (5)$$

виписуємо координати векторів

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM} =$$

і далі переписуємо векторне рівняння площини (2) у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Останнє рівняння розглядаємо як матричне, яке означає рівність відповідних елементів, тобто

$$\begin{cases} x = a_1 + u(b_1 - a_1) + v(c_1 - a_1), \\ y = a_2 + u(b_2 - a_2) + v(c_2 - a_2), \\ z = a_3 + u(b_3 - a_3) + v(c_3 - a_3) \end{cases}$$

Ми довели, що площину можна задати системою трьох рівнянь. Оформимо це у вигляді визначення.

Визначення 1.2 *Трійка числових рівнянь*

$$\begin{cases} x = x_0 + ux_1 + vx_2, \\ y = y_0 + uy_1 + vy_2, \\ z = z_0 + uz_1 + vz_2, \end{cases} \quad (6)$$

де вектори

$$r_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

не колінеарні, називається параметричним рівнянням площини, що проходить через точку з координатами x_0, y_0, z_0 паралельно векторам r_1, r_2 .

Теорема 1.2 (Про коректність означення параметричного рівняння)

Кожна площина може бути задана параметричним рівнянням і кожне параметричне рівняння площини задає площину.

Теорема правильна тому, що кожна площина може бути задана векторним рівнянням і кожне векторне рівняння площини задає площину (див. теор. 1.1), а за наявності системи координат від векторного рівняння до параметричного ми перейшли рівносильними перетвореннями.

Умови колінеарності і неколінеарності векторів. У векторному і у параметричному рівнянні площини використовуються неколінеарні вектори. Нагадаємо, що два вектори називаються колінеарними, коли один із них одержується із другого множенням на число.

Нехай у нас є два вектори (7). Якщо $r_1 = 0$, то $r_1 = 0 \cdot r_2$ і вектори колінеарні. Якщо $r_1, r_2 \neq 0$, і $r_1 = \lambda \cdot r_2$ для деякого $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda \neq 0$, $r_2 = \frac{1}{\lambda} r_1$, тобто кожен із векторів одержується із другого множенням на нелітальове число. Рівність $r_1 = \lambda \cdot r_2$ означає $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$, $z_1 = \lambda z_2$. або

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda. \quad (8)$$

Таким чином, якщо вектори r_1, r_2 не мають нульових координат, то умова

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (9)$$

є умовою їх колінеарності. Перепишемо умову 9) у вигляді

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}; \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (10)$$

Так записану умову колінерності можна пристосувати до випадку, коли вектори мають нульові координати, - для цього можна домо-витися що рівність

$$\frac{a}{b} = \frac{0}{0}$$

є правильною для будь-яких чисел a, b .

Ще один підхід до використання рівностей (10) полягає в засто-суванні рівносильностей

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow x_1 z_2 = x_2 z_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow y_1 z_2 = y_2 z_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Сказане дозволяє вважати доведеною наступну теорему.

Теорема 1.3 (Про умову колінеарності двох векторів) *Два ве-ктори (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) колінерні тоді і тільки тоді, коли всі три детермінанти*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

дорівнюють нулю. Якщо ж один із них не дорівнює нулю, то ве-ктори не колінеарні.

Згідно з нашими умовами, вектори $(2,4,6)$ та $(1,2,3)$ колінеарні, тому що $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$. Вектори $(2,4,0)$ та $(1,2,0)$ є колінеарними оскільки $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{0}{0}$. Вектори $(2,0,6)$ та $(1,2,0)$ не колінеарні, тому що $0 \cdot 0 \neq 2 \cdot 6$ і, відповідно, $\frac{0}{2} \neq \frac{6}{0}$.

Перехід від векторного рівняння до параметричного і від параметричного до векторного. Приклад 1. Візьмемо площину із векторним рівнянням (4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad -\infty < u, v < \infty.$$

Від матричної рівності переходимо до покомпонентних рівностей

$$\begin{cases} x = 1 - 4u, \\ y = 5 - 3u - 3v, \\ z = 7 - 6u - 5v. \end{cases}$$

Це і є параметричне рівняння нашої площини.

Приклад 2. Нехай маємо параметричне рівняння

$$\begin{cases} x = 5v, \\ y = 1 - 3u, \\ z = 7 + u - v. \end{cases}$$

Знайдемо векторне рівняння цієї площини.

Перепишемо це рівняння так, що у кожному окремому рівнянні були обидві змінні u, v з відповідними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \cdot u + 5 \cdot v, \\ y = 1 - 3 \cdot u + 0 \cdot v, \\ z = 7 + 1 \cdot u - 1 \cdot v. \end{cases}$$

Тепер ми можемо перейти до векторного рівняння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad -\infty < u, v < \infty.$$

1.3 Рівняння площини “через точку паралельно двом неколінеарним векторам“, рівняння площини “через три точки“, загальне рівняння площини

Розглянемо параметричне рівняння площини (6) з умовою неколінеарності напрямних векторів. Оскільки напрямні вектори неколінеарні, то одне із чисел

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad x_1 z_2 - x_2 z_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \quad z_1 y_2 - z_2 y_1 = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

не дорівнює нулю. Нехай

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Розв’яжемо перші два рівняння системи (6), взявши за невідомі u, v . За формулами Крамера

$$u = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & x_2 \\ y - y_0 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}, \quad v = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x - x_0 \\ y_1 & y - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

Підставимо знайдені значення u, v в третє рівняння системи (6) і поозбудемося знаменника. Одержимо

$$(z - z_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = z_1 \begin{vmatrix} x - x_0 & x_2 \\ y - y_0 & y_2 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x - x_0 \\ y_1 & y - y_0 \end{vmatrix}.$$

В правій частині цього рівняння обчислимо визначники :

$$(z - z_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = z_1((x - x_0)y_2 - x_2(y - y_0)) + z_2(x_1(y - y_0) - (x - x_0)y_1),$$

згрупуємо доданки потрібним чином

$$(z - z_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (x - x_0)(z_1y_2 - z_2y_1) + (y - y_0)(z_2x_1 - z_1x_2),$$

перенесемо доданки в ліву частину

$$-(x - x_0)(z_1y_2 - z_2y_1) - (y - y_0)(z_2x_1 - z_1x_2) + (z - z_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

і запишемо через визначники

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

На останнє рівняння (15) подивимося з двох різних точок зору. З однієї точки зору рівняння (15) можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Визначення 1.3 Рівняння (16) називається рівнянням площини “через задану точку паралельно двом неколінеарним векторам”.

Припустимо, що площина проходить через три неколінерні точки $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$. Тоді у рівнянні (16) ми можемо взяти

$$x_0 = a_1, y_0 = a_2, z_0 = a_3, \quad x_1 = b_1 - a_1, y_1 = b_2 - a_2, z_1 = b_3 - a_3, \quad x_2 = c_1 - a_1, y_2 = c_2 - a_2, z_2 = c_3 - a_3$$

і одержати рівняння

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Оскільки

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix},$$

то рівняння (17) можна переписати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Визначення 1.4 Рівняння (18) називається рівнянням площини “через три точки”.

Від параметричного рівняння до рівняння “через точку паралельно двом неколінеарним векторам” і до рівняння “через три точки” ми перейшли за допомогою рівносильних перетворень. Тому можна вважати доведеною наступну теорему

Теорема 1.4 Кожну площину можна задати рівнянням “через точку паралельно двом неколінеарним векторам” і кожне рівняння “через точку паралельно двом неколінеарним векторам” задає площину. Також кожну площину можна задати рівнянням “через три точки” і кожне рівняння “через три точки” задає площину.

За другого підходу ми переписуємо рівняння (15) у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (19)$$

де

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, D = -x_0 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + y_0 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Причому з огляду на неколінеарність напрямних векторів площини один із коефіцієнтів не дорівнює нулю.

Визначення 1.5 Рівняння (19), де один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, називається загальним рівнянням площини.

Теорема 1.5 (Про коректність означення загального рівняння площини) Кожну площину можна задати загальним рівнянням, і кожне загальне рівняння площини дійсно задає площину.

proof Ми обґрунтували, що площину, яка задана векторним чи параметричним рівнянням, можна задати загальним рівнянням.

Покажемо тепер, що рівняння (19), де один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, завжди задає площину, тобто від цього рівняння можна перейти до параметричного і, відповідно, до векторного.

Оскільки серед коефіцієнтів A, B, C є ненульовий, то рівняння можна розділити на цей коефіцієнт. Отже ми можемо вважати із самого початку, що один із коефіцієнтів дорівнює 1 — нехай ним буде A . Отже ми маємо рівняння

$$x + By + Cz + D = 0.$$

А це рівняння перетворюється в параметричне наступним чином:

$$\begin{cases} x = -D - Bu - Cv, \\ y = u, \\ z = v. \end{cases}$$

Ми закінчили перевірку того, що будь-яка площина може бути задана загальним рівнянням і загальне рівняння задає площину.



Приклад 1. Нехай маємо загальне рівняння площини

$$x + 2z = 7.$$

Перетворимо його в параметричне:

$$x = -2z + 7, \quad y = u, \quad z = v, \quad x = -2v + 7, \quad \begin{cases} x = 7 + 0u + v(-2), \\ y = 0 + 1u + 0v, \\ z = 0 + 0u + 1v \end{cases}$$

а потім у векторне

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2 Запишемо рівняння площини, що проходить через точки $(1,0,5)$, $(2,-7,3)$, $(-1,1,2)$. Відповідь: Записуємо рівняння “через три точки” потрібної площини. Одержуємо

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюємо визначник в лівій частині і одержуємо загальне рівняння площини

$$23x + 7y - 13z + 42 = 0.$$

1.4 Взаємне розташування площин

1.4.1 Дві площини загального розташування

Теорема 1.6 (Про перетин двох площин) *Нехай є дві площини із загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, у яких вектори A_1, B_1, C_1 і A_2, B_2, C_2 не колінеарні. Тоді ці площини перетинаються, їх перетином є пряма, напрямним вектором цієї прямої є вектор*

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \quad (20)$$

Доведення. Неколінеарність векторів $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, означає, що один із визначників

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

не дорівнює нулю. Нехай

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді беремо вільною змінною z (z приймає будь-які значення) і знаходимо змінні x, y із системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z, \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z, \end{cases}$$

що задають площини, за формулами Крамера. Одержуємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z & B_1 \\ -D_2 - C_2z & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - z \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1z \\ A_2 & -D_2 - C_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - z \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

Позначивши

$$x_0 = - \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot t$$

одержуємо рівняння геометричного місця спільних для двох площин точок.

$$\begin{cases} x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\ y = y_0 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot t, \\ z = 0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot t \end{cases} \quad (21)$$

Рівняння (21) є параметричним рівнянням прямої, що проходить через точку $(x_0, y_0, 0)$ в напрямку вектора (20). Теорема доведена

■

Обчислимо напрямний вектор (a, b, c) прямої, по якій перетинаються площини $y - 2z + 1 = 0$, $2x - 2y - z - 9 = 0$. Формула (20) дає нам числа

$$a = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad b = - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

1.4.2 Паралельність двох площин

Теорема 1.7 (Умова паралельності двох площин) *Дві площини, що мають рівняння $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, паралельні тоді і тільки тоді, коли вектори $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ колінеарні.*

Доведення. Якщо вектори n_1, n_2 не колінеарні, то за теоремою ([1.6]) площини мають єдину спільну пряму і не збігаються, отже,

не паралельні. Лишилося довести, що у випадку колінеарності цих векторів площини паралельні.

Нехай вектори n_1, n_2 колінерані, тобто для деякого числа λ виконується рівність

$$n_2 = \lambda n_1.$$

Тоді виникають два випадки - коли $D_2 = \lambda D_1$ і коли $D_2 \neq \lambda D_1$. Якщо $D_2 = \lambda D_1$, то рівняння площин рівносильні, множини розв'язків у них збігаються, отже вони задають одну і ту ж площину. А коли $D_2 \neq \lambda D_1$, тоді система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0 \end{cases}$$

несумісна, розв'язків немає, і площини не перетинаються, отже, паралельні.

Кінець доведення.

■

1.4.3 Паралельність площини і вектора, паралельність площини і прямої

Теорема 1.8 (Про паралельність вектора і площини) *Вектор $r = (a, b, c)$ паралельний площині P , що задана рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$Aa + Bb + Cc = 0. \quad (22)$$

Доведення. Оскільки вільний вектор r можна відкласти від будь-якої точки, то відкладемо його від точки $M(x_1, y_1, z_1)$, яка лежить у площині P , тобто коли

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \quad (23)$$

. Вектор r буде паралельним площині P тоді і тільки тоді, коли кінець $N(x_2, y_2, z_2)$ відкладеного вектора $\overrightarrow{NM} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (a, b, c)$ лежить у площині P , тобто коли

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \quad (24)$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0,$$

$$Aa + Bb + Cc = 0.$$

■

Наведемо приклад. Якщо площина P задана рівнянням $2x - 3y + 5z + 15 = 0$, то вектор $r = (7, -2, -4)$ паралельний площині P , тому що $2 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) - 5 \cdot (-4) = 0$, а вектор $r = (1, 2, 1)$ не паралельний площині P , тому що $1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Прямим наслідком теореми про паралельність вектора і площини є теорема про паралельність прямої, яка задана векторним рівнянням, і площини, яка задана загальним рівнянням.

Теорема 1.9 (Про паралельність прямої і площини) *Площина, що задана рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, і пряма, що задана рівнянням*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

паралельні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність (22).

1.4.4 В'язка та жмуток площин.

Визначення 1.6 Жмутком площин називається сукупність усіх площин, що проходять через задану пряму,

Теорема 1.10 (Про жмуток площин) Припустимо, що пряма у тривимірному просторі задана як перетин двох непаралельних площин P_1, P_2 із загальними рівняннями, відповідно,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (25)$$

і

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (26)$$

Тоді площина P_3 із загальним рівнянням

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \quad (27)$$

належить жмутку площин, що проходять через вибрану пряму, в тому і тільки тому випадку, коли для деяких $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (λ, μ) виконуються рівності

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2, \quad C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2, \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

Доведення. Виберемо три площини як в умові теореми. Оскільки рівняння (25), (26) задають пряму (отже, площини не паралельні), то один із трьох визначників

$$d_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

не нульовий, — для визначеності будемо вважати, що $d_1 \neq 0$. Тоді система рівнянь

$$\begin{cases} \lambda A_1 + \mu A_2 = A_3, \\ \lambda B_1 + \mu B_2 = B_3 \end{cases}$$

з невідомими λ, μ має розв'язок $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0$ і до того ж єдиний. Із того, що всі три площини P_1, P_2, P_3 проходять через одну пряму, випливає, що множина розв'язків системи (25), (26), (29) нескінченна. Віднімемо від рівняння (29) рівняння (25), помножене на λ_0 і віднімемо рівняння (26), помножене на μ_0 . Одержимо рівняння

$$(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2)z + (D_3 - \lambda D_1 - \mu D_2) = 0. \quad (28)$$

У випадку, коли $(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2) \neq 0$, рівня (28) має єдиний розв'язок $z = z_0$, система

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -C_1 z_0 - D_1, \\ A_2 x + B_2 y = -C_2 z_0 - D_2 \end{cases}$$

також має єдиний розв'язок, що суперечить припущенню про існування спільної прямої. Таким чином $(C_3 - \lambda_0 C_1 - \mu_0 C_2) = 0$, $C_3 = \lambda_0 C_1 + \mu_0 C_2$ і із (28) випливає

$$(D_3 - \lambda D_1 - \mu D_2) = 0, \quad D_3 = \lambda D_1 + \mu D_2.$$

Оскільки хоч одне із чисел A_3, B_3, C_3 не нульве, то $(\lambda, \mu) \neq 0..$

■

Приклад. Знайдемо площину, що проходить через пряму

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0, \\ -x + 2z - 11 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

і точку $(-1, 1, 3)$.

Пишемо рівняння потрібної нам площини з невідомими λ, μ :

$$\lambda(2x + 3y - z + 7) + \mu(-x + 2z - 11) = 0. \quad (30)$$

Оскільки ця площина повинна проходити через точку $(-1, 1, 3)$, то

$$\lambda(-2 + 3 - 3 + 7) + \mu(1 + 6 - 11) = 0, \quad 5\lambda - 4\mu = 0.$$

Вибираємо один, будь-який ненульовий розв'язок. Одержуємо $\lambda = 4, \mu = 5$, і рівнянням шуканої площини буде

$$4(2x + 3y - z + 7) + 5(-x + 2z - 11) = 0,$$

$$3x + 12y + 6z - 27 = 0.$$

Визначення 1.7 *Сім'я площин, що проходять через задану точку, називається в'язкою площин.*

Теорема 1.11 (про в'язку площин) *Площина P із загальним рівнянням*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (31)$$

проходить через точку (x_0, y_0, z_0) тоді і тільки тоді, коли її можна задати рівнянням

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доведення. Площина P із загальним рівнянням (31) проходить через точку (x_0, y_0, z_0) тоді і тільки тоді, коли

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

або

$$Ax + By + Cz + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0,$$

тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

■

Для прикладу, рівняння всіх площин, що проходять через точку $(3, -2, 5)$ мають вигляд $A(x - 3) + B(y + 2) + C(z - 5) = 0$.

2 Площина в евклідовому тривимірному просторі

В цьому розділі ми вважаємо, що задана прямокутна декартова система координат, відповідно, є скалярний, векторний і змішаний добуток векторів, є кути між векторами, є відстані між точками.

2.1 Нормаль, вектор нормалі, векторне рівняння площини.

Пряма, що перпендикулярна площині, називають нормаллю до площини, а ненульовий вектор, що паралельний нормалі, отже перпендикулярний площині, називають вектором нормалі.

Теорема 2.1 Рівняння

$$(n.r) = a \tag{32}$$

де n — заданий ненульовий вектор, a — задане дійсне число, r — радіус-вектор змінної точки, задає площину, для якої n є вектором нормалі, і будь-яка площина може бути задана рівнянням вигляду (32).

Доведення. Припустимо, що площина задана векторним рівнянням $r = r_0 + ur_1 + v_r2$ і вектор n перпендикулярний цій площині, тобто

$(n, r_1) = 0, \quad (n, r_2) = 0$. Тоді $(nr) = (n, r_0) + u(n, r_1) + v(n, r_2) = (n, r_0) = a$.

Навпаки, нехай маємо ненульовий вектор n , дійсне число a і якийсь-небудь вектор r_0 , для якого $(n, r_0) = a$. Тоді точка з радіус-вектором r лежить у площині, що проходить через точку з радіус-вектором r_0 перпендикулярно вектору n тоді і тільки тоді, коли

$$(n, r - r_0) = 0, \quad (n, r) = (n, r_0) = a.$$

Доведення теореми завершено. ■

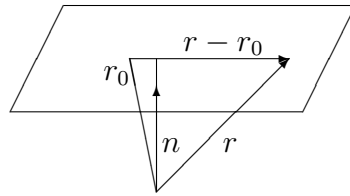


Рис. 3: Площина, що задана векторним рівнянням $(n, r) = a$.

Перепишемо рівняння (32) з використанням координат. Якщо $n = (A, B, C)$, $r = (x, y, z)$, то рівняння (32) прийме вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{33}$$

де $D = -(n, r_0)$ для радіус-вектора r_0 деякої точки на площині. Ми обґрунтували наступну теорему.

Теорема 2.2 (Про вектор нормалі) *Якщо система координат прямокутна декартова, то в загальному рівнянні площини $Ax + By + Cz + D$ вектор (A, B, C) є вектором нормалі.*

2.2 Рівняння площини через точку перпендикулярно вектору.

В прямокутній системі координат рівняння площини, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору (a, b, c) є

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2.3 Відхилення від точки до площини та відстань від точки до площини. Нормальне рівняння площини.

Кожна площина ділить тривимірний дійсний простір на два півпростори — відрізок, який з'єднує точки одного півпростору, не перетинає площину, а якщо кінці відрізка лежать в різних півпросторах, то цей відрізок перетинає площину.

Визначення 2.1 Нехай L площина і V_1, V_2 — два півпростори, що визначаються площиною L , $d = d(M, L)$ — відстань від точки M до площини L . Функція

$$f(M) = \begin{cases} d(M, L), & \text{якщо } M \in V_1, \\ 0, & \text{якщо } M \in L, \\ -d(M, L), & \text{якщо } M \in V_2, \end{cases}$$

називається відхиленням точки M від площини L .

Для прикладу, якщо точка M має координати (x, y, z) то y буде відхилення точки M від координатної площини XOZ .

Метою подальшої роботи є знаходження формули для підрахунку відхилення точки від площини і, відповідно, знаходження відстані від точки до площини.

Розглянемо випадок, коли в загальному рівнянні (33) довжина вектора номалі $n = (A, B, C)$ дорівнює одиниці:

$$|n|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Визначення 2.2 *Загальне рівняння площини (33) називається нормальним, якщо*

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Щоб загальне рівняння (33) перетворити в нормальне, потрібно розділити його на $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

Визначення 2.3 *Перехід від загального рівняння (33) до нормованого*

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

називається нормуванням загального рівняння.

Для прикладу, загальне рівняння

$$5x - 3y - 2z + 1 = 0 \quad (34)$$

не є нормальним, оскільки $5^2 + 3^2 + 2^2 = 38 \neq 1$. Щоб його нормувати, потрібно розділи на $\sqrt{38}$. Рівняння

$$\frac{5}{\sqrt{38}}x - \frac{3}{\sqrt{38}}y - \frac{2}{\sqrt{38}}z + \frac{1}{\sqrt{38}} = 0 \quad (35)$$

є нормальним.

Теорема 2.3 (про відзилення точки від площини) *Нехай вектор $n = (A, B, C)$ має довжину 1, $|n|^2 = A^2 + B^2 + C^2 = 1$ і площина L має векторне рівняння*

$$(n, r) = a \quad (36)$$

і нормальне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (37)$$

. Позначимо r_M радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$ простору. Тоді функція

$$M \rightarrow (n, r_M) - a \quad (38)$$

або

$$M \rightarrow Ax + By + Cz + D \quad (39)$$

є відхиленням від точки M до заданої площини.

Доведення. Виберемо точку N з радіус-вектором $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ на площині L . Тоді

$$(n_{r_0}) = a, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Для довільної точки M з радіус-вектором $r = (x, y, z)$ у просторі будемо три вектори $(r - r_0)$, m , h так, що (дивію рис. 2.3) m паралельний площині L (є ортогональною проекцією вектора $r - r_0$ на площину L), h перпендикулярний площині L і

$$r - r_0 = m + h.$$

В цих позначеннях число

$$(n, h) = |n| \cdot |h| = 1 \cdot |h| \cos \varphi = \pm |h|, \quad \varphi \in \{0, \pi\}$$

буде відхиленням точки M від площини L .

Оскільки

$$(n, r_M) - a = (n, r_M) - (n, r_0) = (n, r_M - r_0) = (n, m + h) = (n, m) + (n, h) = (n, h)$$

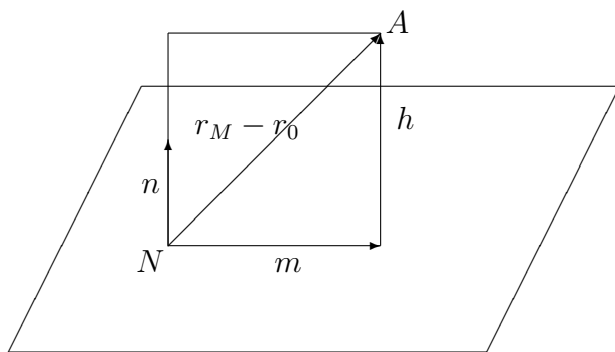


Рис. 4: Площина задана рівнянням $(n, r) - a = 0$, n — вектор нормалі одиничної довжини, точка N лежить у площині і її радіус-вектор дорівнює r_0 , M — довільна точка простору з радіус-вектором r_A , m — проекція вектора $r_A - r_0$ на площину, вектор $h = (r_A - r_0) - m$ перпендикулярний площині, $(n, r_A) - a = d$ — відхилення від точки A до площини, $|d|$ — відстань від точки A до площини.

то спосіб (38) обчислення відхилення точки від площини є коректним.

В координатному записі

$$(n, r_M) = Ax + By + Cz, \quad (n, r_0) = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

Оскільки r_0 — радіус-вектор точки площини L , то

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

і

$$(n, h) = (n, r - r_0) = Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = Ax + By + Cz + D$$

Отже спосіб (39) обчислення відхилення точки від площини також є коректним.

■

3 Малий шляхетний набір задач на площину

Задача 1. З'ясувати, чи лежить задана точка між двома заданими паралельними площинами.

Розв'язування. Позначаємо дві задані паралельні площини через P_1, P_2 , а задану точку через M . На площинах P_1 і P_2 вибираємо відповідно точки A і B . Тепер точка M лежить між двома площинами тоді і тільки тоді, коли вона лежить по ту ж сторону від P_2 що і A і по ту ж сторону від P_1 що і B . Підрахуємо відхилення d_1, d_2 точки M від площин P_1, P_2 , відхилення h_1 точки A від площини P_2 і відхилення h_2 точки B від P_1 . Тепер ми можемо сказати, що точка M лежить між площинами P_1, P_2 тоді і тільки тоді, коли знак d_1 збігається із знаком h_2 а знак d_2 збігається із знаком h_1 .

Задача 2. Знайти бісекторні площини двогранного кута, утвореного двома площинами, що перетинаються.

Розв'язування. Позначимо одну площину через P а другу через Q . Позначимо відхилення точки $M(x, y, z)$ від площини P через d , а відхилення M від площини Q через h . Тоді рівнянням однієї бісекторної площини буде

$$h = d,$$

а рівнянням другої бісекторної площини буде

$$h = -d.$$

■

Задача 3. Знайти вектор n нормалі площини, що задана векторним рівнянням $r = r_0 + ur_1 + vr_2$.

Відповідь $n = [r_1, r_2]$.

■

Задача 4. Знайти напрямний вектор r_1 прямої, по якій перетинаються задані дві площини, якщо відомі вектори n_1, n_2 нормалей цих площин.

Відповідь $r_1 = [n_1, n_2]$. .

■

Задача 4. Знайти точку $V(v_1, v_2, v_3)$, яка симетрична точці $U(u_1, u_2, u_3)$ відносно площини P з рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Точка V буде симетрична точці U відносно P тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{UV}$ буде паралельним вектору нормалі до площини P , а середина відрізка UV лежить у площині P . Отже для знаходження точки V потрібно розв'язати систему трьох рівнянь

$$\frac{v_1 - u_1}{A} = \frac{v_2 - u_2}{B} = \frac{v_3 - u_3}{C}, \quad A \frac{u_1 + v_1}{2} + B \frac{u_2 + v_2}{2} + C \frac{u_3 + v_3}{2} + D = 0.$$

■

Показчик

формули

Крамера, 10

нормування

рівняння

площини, 26

паралельність

площин, 17

площини і прямої, 18

площини і вектора, 18

площина

бісекторна, 29

дійсна, 2

радіус-вектор, 2

рівняння

паралелограма, 4

площини

бісекторної, 29

нормальне, 26

параметричне, 5

векторне, 2

загальне, 10

“через три точки”, 10

умова

колінеарності векторів, 7

в'язка

площин, 20

вектор

напрямний

площини, 2

прямої, 17

нормалі

площини, 23

вектори

колінеарні, 7

відхилення

точки

від площини, 25

відстань

від точки

до площини, 25

жмуток

площин, 20