Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

7 р. 25 к.

храм.

1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. Л. Д. ЛАНДАУ

ТОМ ЧЕТВЕРТЫЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

Л. ЛАНДАУ и Е. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Г. Н. Кольченко.*

Тираж 8 000. Подписано к печати 5/II 1941 г. А 34951. $17^3/_4$ печ. л. 20,967 авт. л.
48 000 тип. зн. в печ. л. Цена книги 5 р. 75 к. Переплет 1 р. 50 к. Заказ № 4716.

4-я типография ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" имени Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга представляет собой четвертый том „Теоретической физики". Этот том посвящен изложению теории электромагнитного и гравитационного полей, т. е. электродинамики и общей теории относительности. Электродинамика излагается с самого начала на основе специального принципа относительности.

Макроскопическая электродинамика, т. е. электродинамика материальных сред, в этом томе не излагается. Ей будет посвящен следующий — пятый — том этого курса.

Для чтения книги необходимо общее знакомство с электромагнитными явлениями в объеме общих курсов физики. Необходимо также хорошее знание векторного анализа.

Л. Ландау
Е. Лифшиц

Институт Физических Проблем АН СССР,

Москва.
Декабрь, 1939 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Скорость распространения взаимодействий

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчета, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчета носят название инерциальных.

Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно поступательно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным). Таким образом, имеется сколько угодно инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно-поступательно.

Опыт показывает, что имеет место так называемый принцип относительности. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о мгновенности распространения взаимодействий. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Разделив расстояние между обоими телами на этот промежуток времени, мы найдем „скорость распространения взаимодействий“.

Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть максимальной скоростью распространения взаимодействий. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

О взаимодействии, распространяющемся от одной частицы к другой, часто говорят как о „сигнале“, отправляющемся от первой частицы и „дающем знать“ второй об изменении, которое испытала первая. О скорости распространения взаимодействий говорят тогда как о „скорости сигнала“.

Из принципа относительности вытекает, в частности, что скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной.

Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют скоростью света. Она обозначается обычно буквой c, а ее численное значение, согласно последним измерениям, равно

$$c = 2{,}99796 \cdot 10^{10}\ \textit{см/сек}. \qquad (1,1)$$

Большой величиной этой скорости объясняется тот факт, что в практике в большинстве случаев достаточно точной оказывается классическая механика. Большинство скоростей, с которыми нам приходится иметь дело, настолько мало по сравнению со скоростью света, что предположение о бесконечности последней практически не влияет на точность результатов.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется релятивистской. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействия; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике свойства пространства являются относительными, т. е. зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. Утверждение, что два разновременных события происходят в одном и том же месте пространства или вообще на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.

Напротив, время является в классической механике абсолютным; другими словами, свойства времени считаются независящими от системы отсчета — время одно для всех систем отсчета. Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого. Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Именно, измерения, произведенные впервые Майкельсоном, обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем как согласно классической механике скорость света в направлении движения земли должна была бы быть меньше, чем в противоположном направлении.

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Время течет по-разному в разных системах отсчета. Следовательно, утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого полезно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' с осями координат, соответственно, XYZ и $X'Y'Z'$, движущиеся друг относительно друга вправо вдоль осей X и X' (рис. 1).

Пусть из некоторой точки A на оси X' отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K', как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) c, то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе K. Действительно, скорость сигналов относительно системы K согласно принципу относительности равна тому же c, и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланному из A в C), то в системе K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C.

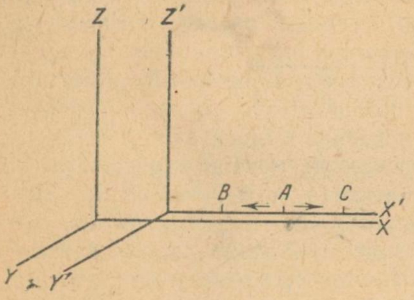

Рис. 1.

Таким образом, принцип относительности Эйнштейна вносит весьма глубокие и фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

§ 2. Интервал

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием события. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие.

Часто полезно из соображений наглядности пользоваться фиктивным четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются мировыми точками. Всякой частице соответствует некоторая линия (мировая линия) в этом фиктивном четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Легко сообразить, что равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета K и K', движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси X и X' совпадали, а оси Y и Z были параллельны осям Y' и Z'; время в системах K и K' обозначим через t и t'.

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе K в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы K распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройденное им расстояние равно поэтому $c(t_2-t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно $[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$. Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе K:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \tag{2,1}$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы K'. Пусть координаты первого события в системе K' есть x_1', y_1', z_1', t_1', а второго: x_2', y_2', z_2', t_2'. Согласно принципу инвариантности скорости света эта скорость в системах K и K' одинакова и потому, аналогично (2,1), мы имеем:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \tag{2,2}$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{1/2} \tag{2,3}$$

называется интервалом между этими двумя событиями.

Таким образом, из принципа инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе.

Если два события бесконечно близки друг к другу, то интервал ds между ними

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{2,4}$$

В целях математического удобства, а именно для того, чтобы придать формулам более симметричный вид, мы будем в дальнейшем часто пользоваться вместо времени t другой переменной τ, связанной с t посредством соотношения:

$$\boxed{\tau=ict.} \tag{2,5}$$

Тогда

$$s_{12}^2=-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(\tau_2-\tau_1)^2] \tag{2,6}$$

$$ds^2=-(dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2). \tag{2,7}$$

Соответственно этому и на осях координат в нашем фиктивном четырехмерном пространстве мы будем откладывать теперь не x, y, z, t, а x, y, z, τ. Как легко видеть, $-s_{12}^2$ можно истолковать тогда как квадрат расстояния между точками x_1, y_1, z_1, τ_1 и x_2, y_2, z_2, τ_2 в этом пространстве, а $-ds^2$ — как квадрат элемента длины.

Как было выше показано, если $ds=0$ в некоторой инерциальной системе отсчета, то $ds'=0$ и в другой системе. С другой стороны, ds и ds' — бесконечно малые одинакового порядка. Из этих двух обстоятельств следует, что ds и ds' должны быть пропорциональны друг другу:

$$ds = a\,ds',$$

причем коэффициент a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости обеих инерциальных систем. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и моменты времени были бы не равноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства. Поэтому с тем же правом, как мы пишем $ds = a ds'$, мы можем написать и

$$ds' = a\,ds,$$

так как, конечно, скорости движения первой системы относительно второй, и наоборот, одинаковы. Подставляя $ds = a\,ds'$ в $ds' = a\,ds$, находим, что $a^2 = 1$, т. е. $a = \pm 1$. Для того чтобы выбрать одно из этих значений, заметим, что a может быть равно только или всегда $+1$ или всегда -1. Действительно, если бы $a(v)$ было для некоторых скоростей равным $+1$, для других -1, то для некоторых оно должно было бы иметь значения, промежуточные между $+1$ и -1, что невозможно. Но если так, то a должно быть всегда равно $+1$, так как частным случаем преобразования $ds' = a\,ds$ является тождество $ds' \equiv ds$, где $a = +1$. Из $ds' = ds$ непосредственно следует, что и для конечных интервалов $s' = s$.

Таким образом, мы приходим к весьма важному результату: интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

Пусть опять x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 суть координаты двух событий в некоторой системе отсчета K. Спрашивается, существует ли такая система отсчета K', в которой оба эти события происходили бы в одном и том же месте пространства.

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Тогда интервал между событиями в системе K:

$$s^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

и в системе K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

причем в силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Мы хотим, чтобы в системе K' оба события произошли в одной точке, т. е. чтобы $l_{12}' = 0$. Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует, если $s_{12}^2 > 0$, т. е. если интервал между обоими событиями вещественный. Вещественные интервалы называют временными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями временной, то существует такая система отсчета, в которой оба события произошли в одном и том же месте. Время, которое пройдет между этими событиями в этой системе, равно

$$t'_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,8}$$

Если какие-нибудь два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда временной. Действительно, путь, который тело проходит между обоими событиями, не может быть больше ct_{12}, так как скорость тела не может быть больше c. Поэтому всегда

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли выбрать такую систему отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время. Попрежнему мы имеем в системах K и K' $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Мы хотим, чтобы $t'_{12} = 0$; отсюда

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Следовательно, искомую систему отсчета можно найти только в том случае, когда интервал s_{12} между двумя событиями мнимый. Мнимые интервалы называют пространственными.

Таким образом, если интервал между двумя событиями пространственный, то существует такая система отсчета, в которой оба события происходят одновременно. Расстояние между местами, где произошли эти события в этой системе отсчета, равно

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = i s_{12}. \tag{2,9}$$

Подразделение интервалов на временные и пространственные есть, в силу их инвариантности, понятие абсолютное. Это значит, что свойство интервала быть временным или пространственным не зависит от системы отсчета.

Рис. 2.

Возьмем какое-нибудь событие — назовем его событием O — в качестве начала отсчета времени и пространственных координат. Другими словами, в четырехмерной системе координат, на осях которой откладываются x, y, z и t, мировая точка события O будет началом координат. Посмотрим теперь, в каком отношении к данному событию O находятся все остальные события. Для наглядности мы будем рассматривать только одну пространственную координату и время и будем откладывать их на двух осях (рис. 2). Прямолинейное равномерное движение частицы, проходящей $x=0$ при $t=0$, изобразится прямой линией, проходящей через O и наклоненной к оси t под углом, тангенс которого равен скорости частицы. Поскольку наибольшая возможная скорость равна c, то существует наибольший угол, который может образовывать эта прямая с осью t. На рис. 2 изображены две прямые, изображающие распространение двух сигналов (со скоростью света) в противоположных направлениях, проходящих через событие O (т. е. проходящих $x=0$ при $t=0$). Все прямые, изображающие движения частиц, могут лежать только внутри областей aOc и dOb. На прямых ab и cd, очевидно, $x=\pm ct$. Рассмотрим сначала события, мировые точки которых лежат внутри области aOc. Легко сообразить, что во всех точках этой области $c^2t^2-x^2>0$. Другими словами, интервалы между любым событием этой области и событием O временные. В этой области $t>0$, т. е. все события этой области происходят „после“ события O. Но два события, разделенные временным интервалом, ни в какой системе отсчета не могут происходить одновременно. Следовательно, нельзя выбрать и никакой системы отсчета, где бы какое-нибудь из событий области aOc происходило „до“ события O, т. е. когда было бы $t<0$. Таким образом, все события области aOc являются будущими по отношению к O, и притом во всех системах отсчета. Эту область можно поэтому назвать „абсолютно будущим“ по отношению к событию O.

Совершенно аналогично все события области bOd являются „абсолютно прошедшими“ по отношению к O, т. е. события этой области во всех системах отсчета происходят до события O.

Наконец, рассмотрим еще области dOa и cOb. Интервал между любым событием этой области и событием O пространственный. В любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства. Поэтому эти области можно назвать „абсолютно удаленными“ по отношению к O. Понятия „одновременно“, „раньше“ и „позже“ для этих событий, однако, относительны. Для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O, системы, где оно происходит раньше O, и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O.

Заметим, что если рассматривать все три пространственные координаты вместо одной, то вместо двух пересекающихся прямых на рис. 2 мы имели бы „конус“ $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ в четырехмерной системе координат x, y, z, t, ось которого совпадает с осью t (этот конус называют „световым конусом“). Области „абсолютно будущего“ и „абсолютно прошедшего“ изображаются тогда соответственно двумя внутренними полостями этого конуса.

Два события могут быть причинно связаны друг с другом только в том случае, если интервал между ними временной, что непосредственно следует из того, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Как мы только что видели, как раз для таких событий имеют абсолютный смысл понятия „раньше“ и „позже“, что является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия.

§ 3. Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Спрашивается, какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx'=dy'=dz'=0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2,$$

откуда

$$dt'=\frac{ds}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2},$$

или иначе

$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Но

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,1}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время t_2-t_1:

$$t'_2-t'_1=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Формулы (3,1) и (3,2) выражают собственное время через время системы отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из (3,1) или (3,2), собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

Пусть относительно инерциальной системы отсчета K движутся прямолинейно и равномерно другие часы. Система отсчета, связанная с этими последними, тоже инерциальная. Тогда часы в системе K' с точки зрения наблюдателя в системе K отстают по сравнению с его часами. И, наоборот, с точки зрения системы K' отстают часы в системе K. Убедиться в отсутствии какого-либо противоречия можно, обратив внимание на следующее обстоятельство. Для того, чтобы установить, что часы в системе K' отстают относительно часов в системе K, надо поступить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени часы K' пролетают мимо часов в K, и в этот момент показания обоих часов совпадают. Для сравнения хода часов в K и K' надо вновь сравнить показания тех же движущихся часов K' с часами в K. Но теперь мы уже сравниваем эти часы с другими часами в K — с теми, мимо которых часы K' пролетают в этот другой момент. При этом мы обнаружим, что часы K' будут отставать по сравнению с часами в K, с которыми они сравниваются. Мы видим, что для сравнения хода часов в двух системах отсчета необходимы несколько часов в одной системе и одни в другой. Поэтому этот процесс не симметричен по отношению к обеим системам. Всегда окажутся отстающими те часы, которые сравниваются с разными часами в другой системе отсчета.

Если же имеются двое часов, из которых одни описывают замкнутую траекторию, возвращаясь в исходное место (к неподвижным часам), то окажутся отстающими именно движущиеся часы (по сравнению с неподвижными). Обратное рассуждение, в котором движущиеся часы рассматривались бы как неподвижные (и наоборот), теперь невозможно, так как часы, описывающие замкнутую траекторию, движутся неравномерно и прямолинейно, а потому связанная с ними система отсчета не является инерциальной. Поскольку законы природы одинаковы только в инерциальных системах отсчета, то системы отсчета, связанные с неподвижными часами (инерциальная система) и с движущимися (неинерциальная), обладают разными свойствами, и рассуждение, приводящее к результату, что покоящиеся часы должны оказаться отстающими, неправильно.

Промежуток времени, показываемый часами, равен интегралу $\frac{1}{c}\int\limits_a^b ds$, взятому вдоль мировой линии этих часов. Если часы неподвижны, то их мировая линия является, очевидно, прямой, параллельной оси времени; если же часы совершают неравномерное движение по замкнутому пути и возвращаются в исходное место, то их мировая линия будет кривой, проходящей через две точки на прямой мировой линии неподвижных часов, соответствующих началу и концу движения. С другой стороны, мы видели, что покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени, чем движущиеся. Таким образом, мы приходим к выводу, что интеграл $\int\limits_a^b ds$, взятый между двумя данными мировыми точками, имеет максимальное значение, если он берется по прямой мировой линии, соединяющей эти точки[1]) (мировые точки a и b должны, конечно, быть такими, чтобы интервал между ними был временной; в противном случае интеграл комплексный).

§ 4. Преобразование Лоренца

Нашей целью будет сейчас нахождение формул преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. формул, по которым, зная координаты x, y, z, t события в некоторой системе отсчета K, можно найти координаты x', y', z', t' того же события в другой инерциальной системе K'.

В классической механике этот вопрос решается очень просто. В силу абсолютности времени мы имеем там $t = t'$; далее, если оси координат выбраны так, как мы это обычно делаем (т. е. оси X и X' совпадают, оси Y, Z параллельны осям Y', Z', движение вдоль осей X и X'), то координаты y и z будут, очевидно, равны координатам y' и z', а координаты x и x' будут отличаться на расстояние, пройденное одной системой относительно другой; если начало отсчета времени выбрано в момент, когда обе системы координат совпадали, а скорость системы K' относительно K есть V, то это расстояние есть Vt. Таким образом,

$$x = x' + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{4,1}$$

$x' = x - Vt$

Эти формулы называются преобразованием Галилея. Легко проверить, что это преобразование, как и следовало ожидать, не удовлетворяет требованию теории относительности, — оно не оставляет инвариантными интервалы между событиями.

Релятивистские формулы преобразования мы будем искать, как раз исходя из требования, чтобы они оставляли интервалы инвариантными.

Если пользоваться удобной для дальнейшего изложения величиной $\tau = ict$, то, как мы видели в § 2, интервал между двумя событиями можно рассматривать как расстояние между соответствующими двумя мировыми точками в четырехмерной системе координат. Мы можем, следовательно, сказать, что искомое преобразование должно оставлять неизменными все длины в четырехмерном пространстве x, y, z, τ. Но такими преобразованиями являются только переносы и вращение системы координат. Из них переносы системы координат параллельно самой себе не представляют интереса, так как сводятся просто к переносу начала пространственных координат и изменению момента начала отсчета времени. Таким образом, искомое преобразование должно ма- ?

[1]) Это свойство интеграла $\int\limits_a^b ds$ связано с тем, что одна из координат мнимая ($\tau = ict$); если бы все четыре координаты были действительными, то $\int ds$ был бы, конечно, минимален вдоль прямой линии.

тематически выражаться как вращение четырехмерной системы координат x, y, z, τ.

Всякое вращение в четырехмерном пространстве можно разложить на шесть вращений, а именно в плоскостях xy, zy, xz, τx, τy, τz (подобно тому, как всякое вращение в обычном пространстве можно разложить на три вращения в плоскостях xy, zy и xz). Первые три из этих вращений преобразуют только пространственные координаты; они соответствуют обычным пространственным поворотам.

Рассмотрим поворот в плоскости τx; координаты y и z при этом не меняются. Если ψ есть угол поворота, то связь между старыми и новыми координатами определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - \tau'\sin\psi, \\ \tau &= x'\sin\psi + \tau'\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

Мы ищем формулы преобразования от инерциальной системы отсчета K к системе K', которая движется относительно K со скоростью V вдоль оси x. При этом, очевидно, подвергаются преобразованию только координаты x и время τ. Поэтому это преобразование должно быть вида (4,2). Теперь остается определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V [1]).

Рассмотрим движение в системе K начала координат системы отсчета K'. Тогда $x' = 0$ и формулы (4,2) приобретают вид:

$$x = -\tau'\sin\psi, \quad \tau = \tau'\cos\psi,$$

или, деля одно на другое,

$$\frac{x}{\tau} = -\operatorname{tg}\psi.$$

Но $\tau = ict$, а x/t есть, очевидно, скорость V системы K' относительно K. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\psi = i\frac{V}{c}.$$

Отсюда

$$\sin\psi = \frac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Подставляя это в (4,2), находим:

$$x = \frac{x' - i\dfrac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad \tau = \frac{\tau' + i\dfrac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

---

[1]) Заметим во избежание путаницы, что посредством V мы везде обозначаем постоянную относительную скорость двух инерциальных систем отсчета, а посредством v — скорость движущейся частицы, вовсе не обязанную быть постоянной.

Подставляя еще $\tau = ict$, $\tau' = ict'$, имеем окончательно

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4,3}$$

Это и есть искомые формулы преобразования. Они носят название формул преобразования Лоренца и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t проще всего получаются заменой V на $-V$ (так как система K движется относительно K' со скоростью $-V$). Эти же формулы можно получить непосредственно, решая уравнения (4,3) относительно x', y', z', t'.

Легко видеть из (4,3), что при предельном переходе $c \to \infty$ к классической механике формулы преобразования Лоренца действительно переходят в преобразование Галилея.

При $V > c$ в формулах (4,3) координаты x, t делаются мнимыми; это соответствует тому факту, что движения со скоростью, большей скорости света, невозможны. Невозможно даже пользование системой отсчета со скоростью, равной скорости света, — при этом знаменатели в формулах (4,3) обратились бы в нуль.

Для скоростей V, малых по сравнению со скоростью света, вместо (4,3) можно пользоваться приближенными формулами:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \tag{4,4}$$

Пусть в системе K покоится линейка, параллельная оси X. Длина ее, измеренная в этой системе, пусть будет $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 и x_1 — координаты обоих концов линейки в системе K). Найдем теперь длину этого стержня, измеренную в системе K'. Для этого надо найти координаты обоих концов стержня (x_2' и x_1') в этой системе в один и тот же момент времени t'. Из (4,3) находим:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Длина стержня в системе K' есть $\Delta x' = x_2' - x_1'$; вычитая x_2 из x_1, находим:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

„Собственной длиной" стержня называется его длина в той системе отсчета, в которой он покоится. Обозначим ее через $l_0 = \Delta x$, а длину того же стержня в какой-либо системе отсчета K' — через l. Тогда

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Таким образом, самую большую длину стержень имеет в той системе отсчета, где он покоится. Длина его в системе, в которой он движется со скоростью V, в $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ раз меньше. Этот результат теории относительности называется лоренцовым сокращением.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не меняются, то объем Ω тела сокращается по аналогичной формуле

$$\Omega=\Omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

где Ω_0 есть „собственный объем" тела.

Из преобразования Лоренца можно найти известные нам уже результаты относительно собственного времени (§ 3). Пусть в системе K' покоятся часы. В качестве двух событий возьмем два события, происшедшие в одном и том же месте x', y', z' пространства в системе K'. Время в системе K' между этими событиями есть $\Delta t'=t'_2-t'_1$. Найдем теперь время Δt, которое прошло между этими же событиями в системе отсчета K. Из (4,3) имеем

$$t_1=\frac{t'_1+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad t_2=\frac{t'_2+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или, вычитая одно из другого,

$$t_2-t_1=\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

в полном согласии с (3,1).

§ 5. Преобразование скорости

Мы нашли в предыдущем параграфе формулы, позволяющие по координатам события в одной системе отсчета найти координаты того же события в другой системе отсчета. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе.

Пусть опять система K' движется относительно системы K со скоростью V вдоль оси X. Пусть $v_x=\frac{dx}{dt}$ есть компонента скорости частицы в системе K, а $v'_x=\frac{dx'}{dt'}$ — скорость той же частицы в системе K'. Из (4,3) мы имеем

$$dx=\frac{dx'+Vdt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\ dz=dz',\ dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Деля первые три равенства на четвертое, находим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+Vdt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'},$$

или, деля числитель и знаменатель правых частей этих равенств на dt',

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\quad v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}},\quad v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}. \qquad (5,1)$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей. Они представляют собой закон сложения скоростей в теории относительности. В предельном случае $c\to\infty$ они переходят в формулы $v_x=v'_x+V$, $v_y=v'_y$, $v_z=v'_z$ классической механики.

В частном случае движения частицы параллельно оси X $v_x=v$, $v_y=v_z=0$. Тогда $v'_y=v'_z=0$, а $v'_x=v'$, причем

$$v=\frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \qquad (5,2)$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть согласно этой формуле снова скорость, не бо́льшая скорости света.

Для скоростей V, значительно меньших скорости света (скорость v может быть любой), имеем приближенно с точностью до членов порядка V/c:

$$v_x=v'_x+V\left(1-\frac{v'^2_x}{c^2}\right),\quad v_y=v'_y-v'_xv'_y\frac{V}{c^2},\quad v_z=v'_z-v'_xv'_z\frac{V}{c^2}.$$

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости XY. Тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты $v_x=v\cos\theta$, $v_y=v\sin\theta$, а в системе K' $v'_x=v'\cos\theta'$, $v'_y=v'\sin\theta'$ (v, v' и θ, θ' — абсолютные величины и углы, образованные скоростью с осями X и X', соответственно, в системах K и K').

С помощью формул (5,1) находим тогда

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{\cos\theta'\cdot v'+V}. \qquad (5,3)$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим подробнее важный частный случай этой формулы, а именно отклонение света при переходе к другой системе отсчета, —

явление, называемое аберрацией света. В этом случае $v = v' = c$ и предыдущая формула переходит в

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'} \sin\theta'. \tag{5,4}$$

Из тех же формул преобразования (5,1) легко получить аналогичную формулу для $\sin\theta$ и $\cos\theta$:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'} \sin\theta', \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,5}$$

В случае $V \ll c$ из этой формулы находим с точностью до членов порядка V/c:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

Вводя угол $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (угол аберрации), находим с той же точностью

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \tag{5,6}$$

т. е. известную элементарную формулу для аберрации света.

§ 6. Четырехмерные векторы

Если мы будем пользоваться в качестве координат события величинами x, y, z, τ, то мы можем рассматривать x, y, z, τ, как компоненты вектора в четырехмерном пространстве. Сумма квадратов этих компонент, т. е. квадрат „длины" вектора $x^2 + y^2 + z^2 + \tau^2$, не меняется при поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вектор с компонентами x, y, z, τ называют „четырехмерным радиусом-вектором". Его компоненты мы будем обозначать через x_i, где $i = 1, 2, 3, 4$, причем x_i $i=1$,

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = \tau = ict.$$

При преобразовании от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. при преобразовании Лоренца, компоненты четырехмерного радиуса-вектора (или, как мы будем писать для краткости, 4-радиуса-вектора) преобразуются согласно (4,3) по формулам

$$x_1 = \frac{x_1' - i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x_2 = x_2', \qquad x_3 = x_3', \qquad x_4 = \frac{x_4' + i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6,1}$$

Четырехмерным вектором A_i называется совокупность четырех величин A_1, A_2, A_3, A_4, которые при преобразовании четырехмерной системы координат преобразовываются как компоненты x_i. При преобразовании Лоренца

$$A_1 = \frac{A_1' - i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_4 = \frac{A_4' + i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6,2)$$

Четырехмерные векторы обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам обычных векторов. Так, легко показать, что подобно обычному скалярному произведению векторов сумма произведений компонент двух 4-векторов $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4$ является скаляром. Мы будем ниже обозначать такое скалярное произведение векторов как A_iB_i и вообще будем считать, что если один и тот же латинский индекс повторяется дважды, то подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3, 4 этого индекса. Так, квадрат „абсолютной величины“ 4-вектора запишется в виде A_iA_i или A_i^2. Такой способ обозначения суммирования (при котором опускается знак суммы) очень удобен и значительно упрощает формулы.

Компоненты трехмерных векторов мы будем обозначать греческими индексами; под дважды повторяющимся греческим индексом будет подразумеваться суммирование от 1 до 3 (например, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Первые три компоненты 4-вектора называют пространственными, а четвертую — временной по аналогии с 4-радиусом-вектором. Временная компонента всех 4-векторов, с которыми нам придется иметь дело, мнимая. Заметим, что квадрат A_i^2 может быть как положительным, так и отрицательным (или равным нулю), поскольку среди компонент A_i есть мнимая.

Четырехмерным тензором (4-тензором) 2-го ранга называется совокупность шестнадцати величин A_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$), которые при преобразовании координат

$$x_i = \alpha_{ik}x_k' \quad (6,3)$$

преобразуются как произведения координат, т. е. по формулам

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A_{ml}'. \quad (6,4)$$

При преобразовании Лоренца

$$(\alpha_{ik}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{bmatrix}. \quad (6,5)$$

Единичным 4-тензором δ_{ik} называется тензор, удовлетворяющий условию, что для всякого вектора A_i имеет место

$$\delta_{ik}A_k = A_i. \tag{6,6}$$

Легко видеть, что компоненты этого тензора

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \tag{6,7}$$

Из всякого тензора A_{ik} можно образовать скаляр $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$, называемый „следом“ тензора; очевидно, что

$$\delta_{ii} = 4. \tag{6,8}$$

Тензор называется симметричным, если $A_{ki} = A_{ik}$, и антисимметричным, если $A_{ik} = -A_{ki}$. У антисимметричного тензора все диагональные компоненты, т. е. компоненты A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, равны нулю, так как, например, должно быть $A_{11} = -A_{11}$.

Аналогично 4-тензору 2 ранга можно определить тензоры высших рангов.

Совершенно антисимметричным единичным 4-тензором 4-го ранга мы назовем такой тензор e_{iklm}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из антисимметричности следует, что все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля только те, у которых все четыре индекса различны. Пусть $e_{1234} = 1$; тогда, очевидно, все неравные нулю компоненты e_{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок (транспозиций) могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности 1, 2, 3, 4. Заметим, что, как легко проверить, $e_{iklm}^2 = 4!$

По отношению к поворотам системы координат величины e_{iklm} ведут себя как компоненты тензора; однако, при изменении знака у одной или трех координат компоненты e_{iklm}, будучи определены одинаково для всех систем координат, не изменяются, в то время как компоненты тензора должны были бы изменить знак. Поэтому e_{iklm} есть, собственно говоря, не тензор, а, как говорят, псевдотензор. Псевдотензоры любого ранга, в частности псевдоскаляры, ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.

Если A_{ik} есть антисимметричный тензор, то тензор A_{ik} и псевдотензор $\frac{1}{2}e_{iklm}A_{lm}$ называются дуальными друг другу. Аналогично $e_{iklm}A_m$ есть антисимметричный псевдотензор 3-го ранга, дуальный вектору A_i. Произведение $\frac{1}{2}e_{iklm}A_{ik}A_{lm}$ тензора 2-го ранга на его дуальный есть, очевидно, псевдоскаляр.

В связи со сказанным упомянем о некоторых аналогичных свойствах трехмерных векторов и тензоров. Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором 3-го ранга называется совокупность величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Как и у e_{iklm}, все компоненты $e_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю, за исключением тех, у которых $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Что касается этих компонент, то $e_{123} = 1$; остальные же, очевидно, равны 1 или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом транспозиций можно привести последовательность чисел α, β, γ к 1, 2, 3.

При отражении системы координат, т. е. при изменении всех трех координат, компоненты обычного вектора тоже меняют знак. Такие векторы называют полярными. Компоненты же вектора, равного векторному произведению двух полярных векторов, при отражении не меняют знак. Такие векторы называются аксиальными. Скалярное произведение полярного и аксиального векторов является не истинным скаляром, а псевдоскаляром; при отражении системы координат он меняет знак. Аксиальный тензор является псевдовектором, дуальным некоторому антисимметричному тензору. Так, если $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, то $C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}$, где

$$C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

В трехмерном пространстве интегрирование может производиться по объему, по поверхности и по кривой. В четырехмерном пространстве, соответственно, возможны четыре рода интегрирования.

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве; элементом интегрирования является элемент дуги, т. е. 4-вектор dx_i.

2) Интеграл по поверхности (двухмерной) в 4-пространстве. Как известно, в трехмерном пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух векторах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, на координатные плоскости $x_\alpha x_\beta$ равны соответственно $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$; аналогично в 4-пространстве проекции площади параллелограмма, построенного на двух 4-векторах A_i и B_k, на 6 координатных плоскостей $x_i x_k$ определяются антисимметричным тензором $A_i B_k - A_k B_i$. В частности, бесконечно малый элемент поверхности определяется антисимметричным тензором 2-го ранга df_{ik}, компоненты которого равны проекциям площади элемента поверхности на координатные плоскости. В трехмерном пространстве, как известно, вместо тензора $df_{\alpha\beta}$ в качестве элемента поверхности пользуются вектором df_α, дуальным тензору $df_{\alpha\beta}$, т. е. $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометрически это есть вектор, нормальный к элементу поверхности и по абсолютной величине равный площади этого элемента. В четырехмерном пространстве такого вектора построить нельзя, но можно построить тензор df^*_{ik}, дуальный тензору df_{ik}, т. е.

$$df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df_{lm}. \tag{6,9}$$

Геометрически он изображает элемент поверхности, равный и „нормальный" элементу df_{ik}, — все лежащие на нем прямые перпендикулярны ко всем прямым на элементе df_{ik}.

3) Интеграл по гиперповерхности, т. е. по трехмерному многообразию (трехмерному объему). В трехмерном пространстве объем „паралле-

лепипеда", построенного на трех векторах **A**, **B**, **C**, равен, как известно, детерминанту третьего ранга, составленному из компонент этих векторов. В 4-пространстве проекция объема „параллелепипеда" (т. е. „площади" гиперповерхности), построенного из трех 4-векторов A_i, B_i, C_i, определяется детерминантами

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix},$$

составляющими тензор третьего ранга, антисимметричный по всем трем индексам. В частности, бесконечно малый элемент гиперповерхности определяется антисимметричным тензором dS_{ikl}. В качестве элемента интегрирования по гиперповерхности удобнее пользоваться 4-вектором dS_i, дуальным тензору dS_{ikl}:

$$dS_i = \frac{1}{6} e_{iklm}\, dS_{klm}, \quad dS_{ikl} = e_{klmi}\, dS_m \tag{6,10}$$

(легко убедиться, что компоненты dS_i: $dS_1 = dS_{234}$, $dS_2 = dS_{143}$ и т. д.). Геометрически это 4-вектор, по абсолютной величине равный „площади" элемента гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу (т. е. перпендикулярный ко всем прямым, проведенным в элементе гиперповерхности). Очевидно, что $dS_4 = dx\,dy\,dz$ равно элементу трехмерного объема dV, — проекции гиперповерхности на гиперплоскость $x_4 = \text{const}$.

4) Интеграл по четырехмерному объему; элементом интегрирования является элемент 4-объема $d\Omega = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

Аналогично теоремам Гаусса и Стокса для трехмерных интегралов существуют теоремы, позволяющие преобразовывать друг в друга четырехмерные интегралы. Из этих теорем нам понадобятся в дальнейшем следующие две. Интеграл по замкнутой гиперповерхности можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования dS_i на оператор

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{6,11}$$

Например, для интеграла от вектора A_i имеем:

$$\oint A_i\, dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

Эта теорема является, очевидно, обобщением теоремы Гаусса.

Интеграл по обычной поверхности преобразуется в интеграл по „огибаемой" ею гиперповерхности посредством замены элемента интегрирования $d\overset{*}{f}_{ik}$ на оператор

$$d f^*_{ik} \to \frac{1}{2}\left(dS_i \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{6,12}$$

Например, для интеграла от антисимметричного тензора A_{ik} имеем:

$$\int A_{ik}\, d f^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}.$$

Приведем, для полноты, еще правило преобразования интеграла по четырехмерной замкнутой линии в интеграл по огибаемой ею поверхности; оно осуществляется заменой

$$dx_i \to df_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{6,13}$$

Например, для интеграла от вектора:

$$\oint A_i\,dx_i = \int df_{ki}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\int df_{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right), \tag{6,14}$$

что является обобщением теоремы Стокса.

§ 7. Четырехмерные скорость и ускорение

Из обычного вектора скорости можно образовать и четырехмерный вектор. Такой четырехмерной скоростью (4-скоростью) частицы является вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \tag{7,1}$$

Для нахождения его компонент замечаем, что согласно (3,1)

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где v — обычная трехмерная скорость частицы. Таким образом,

$$u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_1}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично находим u_2, u_3, u_4 и в результате имеем:

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,2}$$

Заметим, что 4-скорость есть величина безразмерная.

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что $dx_i^2 = -ds^2$, имеем:

$$u_i^2 = -1. \tag{7,3}$$

4-ускорением частицы называется вектор

$$w_i = \frac{du_i}{ds}. \tag{7,4}$$

С помощью (7,2) и (7,3) находим для его компонент:

$$w_\alpha = \frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad w_4 = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7,5}$$

Дифференцируя (7,3), имеем:

$$u_i\frac{du_i}{ds} = 0,$$

или

$$u_i w_i = 0. \tag{7,6}$$

Задача

Частица движется со скоростью $\mathbf{v}(t)$; определить ее ускорение $\mathbf{w}$ в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится, в случае, если: (а) скорость $\mathbf{v}$ меняется только по направлению, (б) $\mathbf{v}$ меняется только по величине.

Решение: В указанной системе отсчета пространственные компоненты w_i равны $\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\mathbf{w}_0}{c^2}$, а временная равна нулю. Поэтому $\frac{1}{c^4}w_0^2=w_i^2$; поскольку w_i^2 есть скаляр, то он равен $\frac{1}{c^4}w_0^2$ и в другой системе отсчета. Воспользовавшись этим и вычисляя w_i, находим в случае (а):

$$\mathbf{w}_0=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

а в случае (б):

$$\mathbf{w}_0=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Ю и Валечка

ГЛАВА II

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 8. Элементарные частицы в теории относительности

В классической механике можно ввести понятие абсолютно твердого тела, т. е. тела, которое ни при каких условиях не может быть деформировано. В теории относительности под абсолютно твердыми телами следовало бы, соответственно, подразумевать тела, все размеры которых остаются неизменными в той системе отсчета, где они покоятся. Легко, однако, видеть, что теория относительности делает вообще невозможным существование абсолютно твердых тел.

Рассмотрим, например, круглый диск, вращающийся вокруг своей оси, и предположим, что он абсолютно тверд. Связанная с этим диском система отсчета, конечно, не является инерциальной. Можно, однако, ввести для каждого из небольших элементов диска инерциальную систему отсчета, в которой бы этот элемент в данный момент покоился; для разных элементов диска, обладающих различными скоростями, эти системы будут, конечно, тоже различны. Рассмотрим ряд элементов длины, расположенных вдоль какого-нибудь радиуса диска. Благодаря абсолютной твердости диска длины каждого из этих отрезков в соответствующей инерциальной системе отсчета остаются такими же, какими они являются, когда диск неподвижен. Эти же длины получит и измеряющий их неподвижный наблюдатель, мимо которого проходит в данный момент рассматриваемый радиус диска, поскольку каждый из отрезков перпендикулярен к своей скорости, а в таком случае не происходит лоренцова сокращения. Поэтому и весь радиус, измеренный неподвижным наблюдателем как сумма составляющих его отрезков, будет таким же, каким он является у неподвижного диска. С другой стороны, длина каждого из элементов окружности диска, проходящего в данный момент мимо неподвижного наблюдателя, подвергается лоренцову сокращению, так что и длина всей окружности (измеренная неподвижным наблюдателем как сумма длин отдельных ее отрезков) окажется меньше, чем длина окружности покоящегося диска. Мы приходим, таким образом, к результату, что при вращении диска отношение длины его окружности к радиусу (измеряемое неподвижным наблюдателем) должно было бы измениться вместо того, чтобы остаться равным 2π. Абсурдность этого результата и показывает, что в действительности диск не может быть абсолютно твердым и при вращении неизбежно подвергается некоторой сложной деформации, зависящей от упругих свойств материала, из которого сделан диск.

В невозможности существования абсолютно твердых тел можно убедиться и другим путем. Пусть какое-нибудь твердое тело внешним воздействием в какой-нибудь одной его точке приводится в движение. Если бы тело было абсолютно твердым, то все его точки должны были бы притти в движение одновременно с той, которая подверглась воздействию; в противном случае тело деформировалось бы. Теория относительности, однако, делает это невозможным, так как воздействие от данной точки передается и остальным с конечной скоростью, а потому все точки тела не могут одновременно начать двигаться.

Из сказанного вытекают некоторые выводы, касающиеся так называемых элементарных частиц. Под элементарными частицами подразумевают частицы, которые во всех физических явлениях принимают участие только как целое, т. е. не имеет смысла говорить об их частях. Другими словами, состояние элементарной частицы целиком определяется заданием ее положения и скорости как целого. Очевидно, что если элементарная частица обладала бы конечными размерами, то она не должна была бы быть деформируемой, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, в теории относительности невозможны абсолютно твердые тела. Поэтому в теории относительности элементарные частицы должны рассматриваться как точечные.

§ 9. Принцип наименьшего действия

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Принцип наименьшего действия заключается, как известно, в том, что для всякой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS которого, следовательно, равна нулю.

Определим интеграл действия для свободной материальной частицы, т. е. частицы, не находящейся под действием каких-либо внешних сил. Для этого заметим, что этот интеграл не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако, единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или $\alpha\,ds$, где α — некоторая постоянная. Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int\limits_a^b ds,$$

где $\int\limits_a^b$ обозначает интеграл вдоль мировой линии между двумя заданными событиями — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты t_1 и t_2 времени, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу. Легко видеть, что для всех частиц α должна быть положительной величиной. Действительно, мы видели в § 3, что $\int\limits_a^b ds$ имеет максимальное значение вдоль прямой мировой линии; интегрируя вдоль кривой мировой линии, можно сделать интеграл сколь угодно малым. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b ds$, взятый с положительным знаком, не может иметь минимума; взятый же с обратным знаком он, очевидно, имеет минимум — вдоль прямой мировой линии.

Этот интеграл действия можно преобразовать в интеграл по времени $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt$. Коэффициент L при dt называется, как известно, функцией Лагранжа для данной механической системы. С помощью (3,1) мы находим:

$$S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Величина α, как уже отмечалось, характеризует данную частицу. В классической механике всякая частица характеризуется ее массой m. Определим связь величин α и m. Она определяется из условия, что при предельном переходе $c \to \infty$ наше выражение для L должно перейти в ее классическое выражение $L = \frac{mv^2}{2}$, где m есть классическая масса частицы. Для осуществления этого перехода разложим $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в ряд по степеням v/c. Тогда, опуская члены высших порядков, получаем:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Как известно, в функции Лагранжа несущественны члены, являющиеся полными производными по времени, и их можно вычеркивать из этой функции [1]). Всякая постоянная является полной производной от этой же постоянной, умноженной на время; поэтому в L ее можно опустить. Опуская постоянную αc, получаем $L = \frac{\alpha v^2}{2c}$, в классической же механике $L = \frac{mv^2}{2}$. Следовательно, должно быть $\alpha = mc$.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{9,1}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9,2}$$

§ 10. Энергия и импульс

Импульсом частицы называется, как известно, вектор $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ $\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right.$ — символическое обозначение вектора, компоненты которого равны производным от L по соответствующим компонентам $\left.\mathbf{v}\right)$. С помощью (9,2) находим:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,1}$$

При малых скоростях ($v \ll c$) или в пределе при $c \to \infty$ это выражение переходит в классическое $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. При $v = c$ p обращается в бесконечность.

Производная от импульса по времени $\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т. е. сила направлена перпендикулярно к скорости. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,2}$$

Если же скорость меняется только по величине, т. е. сила направлена по скорости, то

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{10,3}$$

---

[1]) Полная производная по времени при интегрировании в интервале действия $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ даст величину, независимую от пути интегрирования, которая исчезает при варьировании действия.

Зак. 4716. Л. Ландау и Е. Лифшиц. 3

Отношение силы к ускорению в обоих случаях, следовательно, различно. В первом оно равно $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, а во втором $\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$.

Энергией $\mathscr{E}$ частицы называется, как известно, величина

$$\mathscr{E} = \mathbf{pv} - L.$$

Подставляя выражение (9,2) и (10,1) для L и $\mathbf{p}$, находим

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10,4}$$

Из этого выражения видно, что в релятивистской механике энергия частицы не обращается в нуль даже, когда ее скорость равна нулю. Эта „энергия покоя“, т. е. энергия при $v = 0$, равна $\mathscr{E} = mc^2$.

При малых скоростях ($v/c \ll 1$) имеем, разлагая (10,4) в ряд по степеням v/c,

$$\mathscr{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Из (10,1) и (10,4) вытекает следующее соотношение между энергией и импульсом свободной материальной частицы:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{10,5}$$

При $v = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это значит, что частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света. Из (10,5) мы имеем для таких частиц

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{10,6}$$

Мы увидим в дальнейшем, что свет можно трактовать как такие частицы с массой, равной нулю.

Выведем теперь все полученные соотношения в четырехмерном виде. Согласно принципу наименьшего действия

$$\delta S = -mc\,\delta\int_a^b ds = 0.$$

Раскроем выражение для δS. Для этого замечаем, что $ds = \sqrt{-dx_i^2}$, и потому

$$\delta S = -mc\,\delta\int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = -mc\int_a^b \delta\sqrt{-dx_i^2} =$$

$$= -mc\int_a^b \frac{-dx_i\delta dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}} = mc\int_a^b u_i d\delta x_i,$$

так как $\frac{dx_i}{ds}$ есть компонента 4-скорости. Интегрируя по частям, находим

$$\delta S = mc\int_a^b u_i d\delta x_i = mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i du_i =$$

$$= mcu_i\delta x_i \Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i w_i ds, \qquad (10,7)$$

$\frac{du_i}{ds} = w_i$

где $w_i = \frac{du_i}{ds}$ есть 4-ускорение.

Как известно, для нахождения уравнений движения сравниваются различные траектории, проходящие через два заданных положения, т. е. на пределах $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$. Истинная траектория определяется тогда из условия $\delta S = 0$. Из (10,7) мы получили бы тогда уравнения $w_i = 0$, т. е. постоянство скорости свободной частицы в четырехмерном виде.

Для того же, чтобы найти вариацию действия как функцию от координат, надо, как известно, считать заданной точку a, так что $(\delta x_i)_a = 0$. Вторую же надо считать переменной, но при этом рассматривать только истинные траектории, т. е. которые удовлетворяют уравнениям движения. Поэтому интеграл в выражении (10,7) для δS равен нулю. Вместо $(\delta x_i)_b$ мы будем писать просто δx_i и, таким образом, находим:

$$\delta S = mcu_i\delta x_i. \qquad (10,8)$$

4-вектор с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ называется 4-вектором импульса. Мы будем обозначать его через p_i. Из (10,8) видно, что компоненты 4-импульса для свободной материальной частицы равны

$$p_i = mcu_i. \qquad (10,9)$$

Как известно из механики, производные $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ суть три компоненты импульса частицы, а производная $-\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial \tau} ic$ есть энергия частицы. Пользуясь выражением (7,2) для компонент 4-скорости, легко убедиться в том, что пространственные компоненты p_i действительно совпадают с импульсом $\mathbf{p}$, а временная равна $i\mathcal{E}/c$:

$$p_\alpha = p_\alpha, \quad p_4 = i\frac{\mathcal{E}}{c}. \qquad (10,10)$$

Таким образом, в релятивистской механике импульс и энергия являются компонентами одного 4-вектора. Из этого непосредственно вытекают формулы преобразования импульса и энергии при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Именно, подставляя в общие формулы (6,2) преобразования 4-вектора выражения (10,10) для компонент 4-импульса, находим

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (10,11)$$

Имея в виду, что квадрат 4-скорости $u_i^2 = -1$ (7,3), имеем

$$p_i^2 = -m^2c^2. \tag{10,12}$$

Подставляя выражение (10,10) для компонент p_i, находим

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{10,13}$$

Энергия, выраженная через импульс, называется, как известно, функцией Гамильтона $\mathcal{H}$. Из (10,13) следует, что

$$\mathcal{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{10,14}$$

При малых (по сравнению с c) скоростях импульс $p \ll mc$. Из (10,14) мы получаем тогда приближенно

$$\mathcal{H} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

т. е., за вычетом энергии покоя, известная формула

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m}.$$

Наконец, подставляя в (10,12) $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ вместо p_i, находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 = -m^2c^2, \tag{10,15}$$

или, если написать сумму в явном виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{10,16}$$

Это есть уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике.

Переход к предельному случаю классической механики в уравнении (10,16) совершается следующим образом. Раньше всего необходимо учесть, как и при соответствующем переходе в (10,14), что в релятивистской механике энергия частицы содержит член mc^2, которого нет в классической механике. Поскольку действие S связано с энергией посредством $\mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}$, то при переходе к классической механике надо вместо S подставить новое действие S' согласно соотношению:

$$S = S' - mc^2t.$$

Подставляя это в (10,16), находим

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 + 2m\frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

В пределе при $c \to \infty$ это уравнение переходит в классическое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0.$$

§ 11. Дефект массы

Выведенные в предыдущем параграфе формулы в равной мере применимы и к движению как целого сложного тела, состоящего из многих частиц. В этом случае под массой надо везде подразумевать полную массу тела, а под скоростью — скорость его движения как целого.

Рассмотрим покоящееся (как целое) тело. Его энергия, которую мы можем назвать внутренней, равна тогда просто Mc^2, где M — его масса. В виду положительности массы эта величина, очевидно, всегда положительна; положительна также и полная энергия $\dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ движущегося тела (v — скорость его движения как целого). Таким образом, мы приходим к выводу, что в релятивистской механике энергия замкнутой системы всегда положительна, в противоположность тому, что имеет место в классической механике, где она может быть как положительной, так и отрицательной.

Внутренняя энергия тела Mc^2 содержит в себе кроме энергии покоя входящих в состав тела частиц еще и кинетическую энергию этих частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами, Mc^2 не равно сумме $\sum\limits_A m_A c^2$, где m_A — массы частиц, входящих в состав тела, а потому и M не равно $\sum m_A$. Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы; масса сложного тела не равна сумме масс его частей. Вместо этого имеет место только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Разность $\Delta M = M - \sum\limits_A m_A$ между массой сложного тела и суммой масс его составных частей называют дефектом массы. Величину ΔMc^2 называют энергией связи тела.

Рассмотрим тело, состоящее из двух частей (с массами M_1 и M_2), в системе отсчета, где оно покоится, и предположим, что тело самопроизвольно распадается на две части, скорости которых обозначим как v_1 и v_2. Тогда закон сохранения энергии дает

$$Mc^2 = \frac{M_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Это уравнение может выполняться только, если $M > M_1 + M_2$, т. е. если дефект массы $\Delta M = M - M_1 - M_2$ положителен. Таким образом, тело может самопроизвольно распасться только в том случае, если его дефект массы (по отношению к частям, на которые оно распадается) положителен. Напротив, если дефект массы отрицателен, то тело является устойчивым и самопроизвольно не распадается. Легко сообразить, что для осуществления распада надо в этом случае сообщить телу извне энергию, равную по крайней мере его энергии связи $|\Delta M|c^2$.

Задачи

1. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей m_2, причем обе частицы соединяются в одну сложную. Определить массу M и скорость V этой сложной частицы.

Решение. Искомая масса $M=\frac{1}{c^2}\sqrt{\mathscr{E}^2-p^2c^2}$, где $\mathscr{E}$ и p — энергия и импульс составной частицы, равные сумме энергий и импульсов сталкивающихся частиц. Скорость же $V=pc^2/\mathscr{E}$. В результате находим:

$$M^2=m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad V=\frac{m_1v}{\left(m_1+m_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}.$$

2. Покоящееся тело с массой M распадается на две части с массами M_1 и M_2; определить энергии $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ этих частей.

Решение. Закон сохранения энергии и импульса дает $Mc^2=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ и $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$, или, иначе, $p_1^2=p_2^2$, т. е. $\mathscr{E}_1^2-\mathscr{E}_2^2=M_1^2c^4-M_2^2c^4$. Из обоих уравнений находим

$$\mathscr{E}_1=c^2\frac{M^2+M_1^2-M_2^2}{2M},\qquad \mathscr{E}_2=c^2\frac{M^2-M_1^2+M_2^2}{2M}.$$

§ 12. Столкновения

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц, т. е. такое, при котором не меняется их внутреннее состояние. Энергии и импульсы частиц до столкновения в некоторой системе отсчета K пусть будут, соответственно, $\mathbf{p}_{10}$, $\mathscr{E}_{10}$ и $\mathbf{p}_{20}$, $\mathscr{E}_{20}$; при этом ось X системы K выбрана вдоль направления вектора $\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20}$ их полного импульса.

Для исследования столкновения удобно перейти к другой системе отсчета K', в которой сумма импульсов обеих частиц равна нулю. Согласно (10,5) скорость $\mathbf{V}$ системы K' относительно K равна [1])

$$\mathbf{V}=\frac{(\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20})c^2}{\mathscr{E}_{10}+\mathscr{E}_{20}}. \tag{12,1}$$

По общим формулам преобразования (10,11) и формуле (12,1) легко вычислить энергии и импульсы обеих частиц в системе K'; мы будем обозначать их посредством $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, $\mathbf{p}_1'=-\mathbf{p}_2'$.

При столкновении частиц сумма их импульсов и сумма энергий остаются неизмененными. В системе K' $\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'=0$, т. е. импульсы равны

[1]) При этом мы рассматриваем систему из двух сталкивающихся частиц как одно тело. Формулу (12,1) можно получить также непосредственно из формул преобразования (10,11). Согласно этим формулам и помня, что в K' общий импульс равен нулю, имеем

$$\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}=\frac{\mathscr{E}_{01}'+\mathscr{E}_{02}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad p_{01x}+p_{02x}=\frac{\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}_{01}'+\mathscr{E}_{02}')}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}),$$

т. е., если написать в векторном виде, формула (12,1) (штрихованные величины относятся к системе K').

по величине и противоположны по направлению. При столкновении импульсы $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ только поворачиваются, оставаясь равными и взаимно противоположными по направлению; в силу закона сохранения энергии абсолютные величины импульсов также остаются неизмененными.

Пусть $\mathbf{p}'$ есть импульс одной из частиц после столкновения, а $\mathscr{E}'$ — энергия этой же частицы (в системе K'). Определим импульс $\mathbf{p}$ частицы (после столкновения) в исходной системе K. Поскольку скорость системы K относительно K' равна $-\mathbf{V}$, а $\mathbf{V}$ параллельна осям X и X', то согласно формулам преобразования (10,11):

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{\mathscr{E}'V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z',$$

или иначе

$$p_x' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(p_x - \frac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z.$$

Поскольку $p_x'^2 + p_y'^2 = p'^2$ при столкновении не меняется ($\mathbf{p}'$ только поворачивается), то мы можем написать

$$\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left(p_x - \frac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)^2 + p_y^2 + p_z^2 = p'^2, \tag{12,2}$$

где $\mathscr{E}'$ и p' — заданные величины.

Если рассматривать p_x, p_y и p_z как переменные координаты, то (12,2) есть уравнение вытянутого эллипсоида вращения с полуосями p' и $\frac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, фокусным расстоянием $\frac{p'V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$, с эксцентриситетом V/c и центром, сдвинутым относительно начала координат на расстояние $\frac{\mathscr{E}'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ влево вдоль оси p_x. Отсюда вытекает следующий способ графического изображения импульсов обеих частиц после столкновения. Строится эллипс (рис. 3) с полуосями $\frac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ и p'; на его большой оси по обе стороны от центра откладываются два отрезка OA и OB, равные, соответственно,

$$\frac{\mathscr{E}_1'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathscr{E}_2'V}{c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

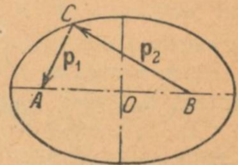

Рис. 3.

Тогда векторы CA и BC, проведенные из точек A и B в любую точку C эллипса, изобразят импульсы соответственно первой и второй частицы после столкновения. Их направление указано на рис. 3 стрелками.

Если обе частицы обладают одинаковыми массами, то $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2$ и отрезки AO и OB равны друг другу. В случае если одна из частиц, скажем первая, до столкновения покоилась, то в системе K' она имела (до столкновения) скорость $-V$, и ее импульс p' связан с ее энергией $\mathcal{E}'_1$ посредством $\mathcal{E}'_1 = p'c^2/V$. Отсюда мы видим, что отрезок OA в этом случае равен большой полуоси эллипса, т. е. точка A лежит на эллипсе (рис. 4). Это видно, впрочем, и непосредственно из того, что в этом случае возможно такое расположение векторов BC и CA, при котором

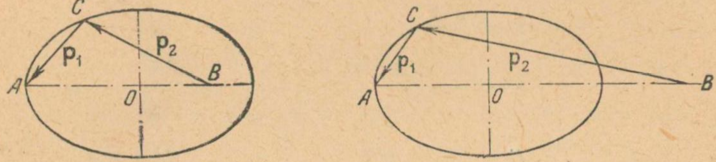

Рис. 4.

один из них равен нулю. Что касается точки B, то она лежит внутри или вне эллипса, смотря по тому, меньше или больше масса второй частицы, чем масса первой (действительно, в системе K' импульсы обеих частиц одинаковы по величине, и потому из энергий $\mathcal{E}'_1 = c\sqrt{c^2 m_1^2 + p'^2}$ и $\mathcal{E}'_2 = c\sqrt{c^2 m_2^2 + p'^2}$, а, следовательно, из отрезков OA и OB, больше та, которая соответствует частице с большей массой). Вектор $\overrightarrow{AB}$ есть в этом случае импульс (до столкновения) первоначально двигавшейся частицы; углы CBO и CAO суть поэтому углы рассеяния (отклонения) обеих частиц от направления первоначального движения.

Если одна из частиц, скажем первая, является частицей с массой, равной нулю, и скоростью, равной скорости света, то согласно (10,6) ее энергия в системе K' $\mathcal{E}'_1 = p'c$, и мы видим, что соответствующий ей отрезок OA равен фокусному расстоянию, т. е. точка A лежит в фокусе эллипса. Если и вторая частица обладает такими массой и скоростью, то и точка B находится в фокусе. Сумма абсолютных величин векторов $\mathbf{p}'_1$ и $\mathbf{p}'_2$ (т. е. длин AC и BC) в этом случае постоянна, согласно известному свойству эллипса. Это связано с тем, что абсолютные значения импульсов в этом случае пропорциональны энергиям частиц, а сумма энергий при столкновении сохраняется.

В предельном случае малых скоростей обеих сталкивающихся частиц эксцентриситет приближается к нулю и эллипс переходит в окружность.

Как видно из рис. 4, покоившаяся до столкновения частица не может приобрести в результате столкновения импульс, превышающий значение, изображаемое длиной большой оси эллипса (точка C находится при этом на другом конце этой оси). Вычислим этот наибольший импульс, передающийся от одной частицы к другой при столкновении. Длина большой оси эллипса есть, как мы видели,

$$2\frac{p'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Импульс p' в системе отсчета, движущейся с центром инерции, есть

$$p'=\frac{m_1V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(m_1 — масса первоначально покоившейся частицы). Скорость V равна согласно (12,1)

$$V=\frac{p_{20}c^2}{\mathcal{E}_{20}+m_1c^2}$$

(до столкновения $p_{10}=0$, $\mathcal{E}_{10}=m_1c^2$). С помощью этих выражений находим для длины большой оси эллипса, т. е. для максимального импульса p_{1max} первой частицы после столкновения:

$$p_{1\,max}=\frac{2m_1p_{20}(\mathcal{E}_{20}+m_1c^2)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_1\mathcal{E}_{20}}. \tag{12,3}$$

Отсюда легко найти также и наибольшую возможную энергию первой частицы

$$\mathcal{E}_{1\,max}=c\sqrt{p_{1\,max}^2+m_1^2c^2}.$$

Задача

Частица с массой $m_1=0$ и скоростью c сталкивается с покоящейся частицей массы m_2. Определить энергии обеих частиц и направление движения частицы m_2 после столкновения, выразив их через угол отклонения частицы m_1.

Решение: Точка A (рис. 3) находится в фокусе, а точка B — на эллипсе. Воспользовавшись полярным уравнением эллипса, отнесенным к фокусу, легко находим:

$$\mathcal{E}_1=\frac{m_2c^2\mathcal{E}_{01}}{m_2c^2+\mathcal{E}_{01}(1-\cos\varphi_1)},\quad \mathcal{E}_2=\frac{m_2^2c^4+\mathcal{E}_{01}\left(m_2c^2+\mathcal{E}_{01}\right)\left(1-\cos\varphi_1\right)}{m_2c^2+\mathcal{E}_{01}(1-\cos\varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}}{1+\frac{\mathcal{E}_{01}}{m_2c^2}},$$

где $\mathcal{E}_{01}$ — энергия частицы m_1 до столкновения, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — энергии обеих частиц после столкновения, φ_1, φ_2 — углы их отклонения.

§ 13. Момент импульса

Как известно, классическая механика приводит к тому результату, что у замкнутой системы кроме энергии и импульса сохраняется еще и момент импульса, т. е. вектор

$$\mathbf{M}=\sum[\mathbf{rp}]$$

(**r** и **p** — радиус-вектор и импульс частицы; суммирование производится по всем частицам, входящим в состав системы). Сохранение момента является следствием того, что функция Лагранжа для замкнутой системы в силу изотропии пространства не меняется при повороте системы как целого.

Проделав теперь аналогичный вывод в четырехмерном виде, мы получим релятивистское выражение для момента. Пусть x_i — координаты одной из частиц системы. Произведем бесконечно малый поворот в четырехмерном пространстве. Тогда координаты x_i каждой частицы перейдут в x_i', подвергнувшись линейному преобразованию,

$$x_i' = x_i + x_k \delta\Omega_{ik}, \tag{13,1}$$

где $\delta\Omega_{ik}$ — бесконечно малый 4-тензор, определяющий поворот. При повороте длина x_i^2 радиуса-вектора должна остаться неизменной, т. е. $x_i^2 = x_i'^2$. Подставляя сюда (13,1) и отбрасывая члены, квадратичные по $\delta\Omega_{ik}$, как бесконечно малые высшего порядка, находим

$$x_i x_k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при произвольных x_i. В виду того, что $x_i x_k$ есть симметричный тензор, $\delta\Omega_{ik}$ должно быть для этого антисимметрическим тензором (произведение симметричного тензора на антисимметрический, очевидно, всегда тождественно равно нулю). Таким образом, находим, что

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{13,2}$$

Изменение δS действия S при бесконечно малом изменении координат имеет вид [см. (10,7)]:

$$\delta S = \sum p_i \delta x_i$$

(суммирование производится по всем частицам системы). В случае рассматриваемого нами сейчас поворота $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x_k$, а потому

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \sum p_i x_k.$$

Если разбить тензор $\sum p_i x_k$ на симметрическую и антисимметрическую части, то первая из них при умножении на антисимметрический тензор тождественно дает нуль. Поэтому, выделяя из $\sum p_i x_k$ антисимметрическую часть, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\delta S = \delta\Omega_{ik} \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i). \tag{13,3}$$

Для замкнутой системы в силу изотропии пространства и времени при повороте в 4-пространстве функция Лагранжа не меняется, т. е. параметры $\delta\Omega_{ik}$ этого поворота являются циклическими координатами. Поэтому соответствующие обобщенные импульсы сохраняются. Этими импульсами являются величины $\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}}$. Из (13,3) имеем

$$\frac{\partial S}{\partial \Omega_{ik}} = \frac{1}{2} \sum (p_i x_k - p_k x_i).$$

Мы видим, следовательно, что у замкнутой системы сохраняется тензор

$$M_{ik} = \sum (x_i p_k - x_k p_i). \tag{13,4}$$

Этот антисимметрический тензор носит название 4-тензора момента.

Легко убедиться, что пространственные компоненты этого тензора (i, $k = 1, 2, 3$) являются компонентами трехмерного вектора момента

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}\,\mathbf{p}], \tag{13,5}$$

$$M_{zx} = -M_{xz} = M_y, \quad M_{xy} = -M_{yx} = M_z, \quad M_{yz} = -M_{zy} = M_x.$$

Что касается компонент $M_{4\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), то, как легко убедиться,

$$M_{4\alpha} = ic \sum \left(t p_\alpha - \frac{\mathcal{E} x_\alpha}{c^2} \right). \tag{13,6}$$

Эти три компоненты, следовательно, составляют вектор

$$ic \sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right).$$

В силу сохранения M_{ik} для замкнутой системы мы имеем, в частности,

$$\sum \left(t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) = \mathrm{const}.$$

Поскольку, с другой стороны, полная энергия $\sum \mathcal{E}$ тоже сохраняется, то это равенство можно написать в виде

$$\frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} - \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}} t = \mathrm{const}. \tag{13,7}$$

Отсюда мы видим, что точка с радиусом-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}} \tag{13,8}$$

равномерно движется со скоростью

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}, \tag{13,9}$$

которая есть не что иное, как скорость движения системы как целого. Такая точка, как известно, называется центром инерции; формула (13,9) определяет координаты центра инерции в релятивистской механике. Надо, однако, заметить, что поскольку компоненты $\mathbf{R}$, определяемые формулой (13,9), не являются компонентами какого-либо 4-вектора, то при переходе к другой системе отсчета координаты центра инерции не преобразуются по обычным формулам преобразования координат. Если скорости всех частиц гораздо меньше c, то можно приближенно положить $\mathcal{E} = mc^2$ и (13,8) переходит в известное выражение для центра инерции.