УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ И. В. ОСТРОВСКОГО — Р. КУППЕНСА НА ГРУППАХ

И. В. Островский, Р. Куппенс [1, с. 258] доказали теорему: если n — мерное безгранично делимое (б. д.) распределение P не имеет гауссовой компоненты, а его спектральная мера F Леви вполне конечна и сосредоточена на множестве с независимыми точками, то $P \in I_0$. При различных дополнительных ограничениях на меру F этот факт доказывался Д. А. Райковым, И. В. Островским, Р. Куппенсом, Г. П Чистяковым. Хотя в работе автора [2] указанная выше теорема была доказана при ограничении $F(\boldsymbol{R}^n) < \ln 2$, но метод исследования, развивший некоторые идеи Рамачандрана, оказался очень общим и позволил Г. М. Фельдману [3] перенести теорему И. В. Островского — Р. Куппенса на локально компактные сепарабельные абелевы метрические группы X в такой формулировке.

Пусть F — вполне конечная мера на группе X такая, что ее степени относительно свертки попарно сингулярны $F^{n*} \perp F^{m*}$ при любых натуральных $n \neq m$. Тогда обобщенное распределение Пуассона $e(F) = \exp\{-F(X)\}\left(E_0 + F + \frac{1}{2!}F^{2*} + \cdots\right)$, где E_0 — распределение, сосредоточенное в точке 0, принадлежит классу I_0.

В настоящей заметке будут даны оценки устойчивости для этой теоремы, для чего потребовалось усовершенствовать и упростить метод исследования из работы автора [2]. Опишем эффект устойчивости разложений распределения μ на группе X в терминах характеристики В. М. Золотарева $\beta_{d_1, d_2}(\varepsilon, \mu)$, $\varepsilon > 0$, [4]. Пусть d_1, d_2 — метрики в пространстве распределений μ на группе X, K_μ — множество компонент распределения μ, $B(\varepsilon, \mu) = \{\nu$ — распределения: $d_1(\nu, \mu) \leqslant \varepsilon\}$. Обозначим через

$$\beta_{d_1, d_2}(\varepsilon, \mu) = \sup_{\nu \in B(\varepsilon, \mu)} \sup_{\nu_0 \in K_\nu} \inf_{\mu_0 \in K_\mu} d_2(\mu_0, \nu_0).$$

Будем говорить, что для распределения μ имеет место эффект устойчивости разложений в метриках (d_1, d_2), если $\beta_{d_1, d_2}(\varepsilon, \mu) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. А. П. Ушаковой [5] изучался эффект устойчивости разложений распределений на сепарабельных полных метрических группах без оценок устойчивости.

В качестве метрики d_1 возьмем $\sigma(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(A) - \nu(A)| : A \in \boldsymbol{B}\}$, где $\boldsymbol{B}$ — множество борелевских множеств на группе X, а в качестве d_2 метрику $\chi_0(\mu, \nu) = \sup\{|\hat{\mu}(y) - \hat{\nu}(y)| : y \in X^*\}$, где $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ — характеристические функции (х. ф.) соответственно распределений μ, ν; X^* — группа характеров группы X. Наш результат выглядит следующим образом.

Теорема. *Пусть F — вполне конечная мера на группе X такая, что $F^{n*} \perp F^{m*}$ при любых натуральных $n \neq m$. Пусть для распределений μ_j, $j = 1, 2$, выполняется неравенство $\sigma(\mu_1 * \mu_2, e(F)) \leqslant \varepsilon$, $0 < \varepsilon < e^{-2}$* **(1).** *Тогда найдутся элементы $x_1, x_2 \in X$, $x_1 + x_2 = 0$, зависящие лишь от распределений μ_j, что $\mu_j(\{x_j\}) > c_0$, $j = 1, 2$, и справедливы соотношения $\chi_0(\mu_j, E_{x_j} * e(F_j)) \leqslant c_1(\ln\ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon))$, $j = 1, 2$, где E_{x_j} — распределение, сосредоточенное в точке x_j, F_j — сужение меры $(\mu_j(\{x_j\}))^{-1}(E_{-x_j} * \mu_j)$ на множество $S(F)$, где сосредоточена мера F, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ — постоянные зависящие лишь от распределения $e(F)$.*

Эта теорема содержит, как легко видеть, приведенный выше результат Г. М. Фельдмана.

Из этой теоремы также следует такая оценка величины $\beta_{\sigma, \chi_0}(\varepsilon, e(F))$, где вполне конечная мера F удовлетворяет условиям теоремы, $\beta_{\sigma, \chi_0}(\varepsilon, e(F)) \leqslant c_2(\ln\ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon))$ **(2)**, $c_2 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от распределения $e(F)$. Отметим сразу неулучшаемость оценки (2) в следующем смысле. Пусть $X = \boldsymbol{R}^1$, F — мера, сосредоточенная в точке $x = 1$. В работе автора [6] были построены последовательности распределений на $\boldsymbol{R}^1$ $\{\mu_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$, такие, что выполняются неравенства $\sigma(\mu_{1n} * \mu_{2n}, e(F)) \leqslant \exp\{-c_3 n \ln n\}$ **(3)**, где постоянная $c_3 > 0$ зависит лишь от F и не зависит от n. При этом х. ф. распределений μ_{1n} имеют вид

$$\hat{\mu}_{1n}(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda(e^{it} - 1) + \frac{\delta(\lambda)}{n}(e^{2it} - 1)\right\}, \ t \in \boldsymbol{R}^1,$$

$\lambda = F(X)$, $\delta(\lambda) > 0$ — достаточно малая постоянная, зависящая лишь от λ. Множество компонент μ_0 распределения $e(F)$ в силу теоремы Д. А. Райкова [1, с. 175] состоит из распределений с х. ф. вида $\hat{\mu}_0(t) = \exp\{\lambda_0(e^{it} - 1) + i\beta_0 t\}$, $\beta_0 \in \boldsymbol{R}^1$, $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda$. Для х. ф. $\hat{\mu}_{1n}(t)$ и $\hat{\mu}_0(t)$ справедливы очевидные неравенства:

$$\inf_{\mu_0 \in K_{e(F)}} \sup_{t \in R^1} |\hat{\mu}_{1n}(t) - \hat{\mu}_0(t)| \geqslant \frac{c_4}{n}, \ \forall n \in \boldsymbol{N}, \tag{4}$$

где $c_4 > 0$ — постоянная, зависящая лишь от меры F. Сравнение оценок (3), (4) приводит для одномерного распределения Пуассона $e(F)$ к оценке снизу $\beta_{\sigma, \chi_0}(\varepsilon, e(F)) \geqslant c_5 (\ln\ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon))$, $c_5 > 0$ — постоянн я, зависящая лишь от меры F.

Доказательство теоремы. Доказательство будем вести, считая $\varepsilon > 0$ достаточно малым: $\varepsilon \leqslant \varepsilon(F)$, что, конечно, не уменьшает общности наших выводов. В дальнейшем положительные постоянные, зависящие лишь от распределения $e(F)$, будем обозначать независимо от их величины одной буквой c. Из оценки (1), очевидно, следует неравенство $(\mu_1 \ast \mu_2)(\{0\}) \geqslant \frac{1}{2}\exp\{-F(X)\} = \tilde{c}_0$. Поскольку точек $x \in X$, для которых $\max(\mu_1(\{x\}), \mu_2(\{-x\})) \geqslant \frac{1}{4}\tilde{c}_0$, конечное число, зависящее от меры F, то отсюда легко следует, что найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что $\mu_1(\{x_0\}) \geqslant c$, $\mu_2(\{-x_0\}) \geqslant c$. Не уменьшая общности, считаем $x_0 = 0$, так как в противном случае перейдем к сдвигам $E_{-x_0} \ast \mu_1$, $E_{x_0} \ast \mu_2$. Поэтому с помощью оценки (1) приходим к соотношению $c\mu_j(A) \leqslant \leqslant e(F)(A) + \varepsilon$, $\forall A \in \boldsymbol{B}$, $j = 1, 2$ **(5)**. Рассмотрим сужения распределений μ_j на множества $S(F^{n*})$, где сосредоточены меры F^{n*}, $n \in \boldsymbol{N}$. Обозначим эти сужения ν_{jn}. Меры ν_{jn}, $j = 1, 2$, в силу неравенства (5) и попарной сингулярности мер F^{n*} при различных n обладают свойством

$$c\nu_{jn}(X) \leqslant e^{-F(X)}(F(X))^n/n! + \varepsilon, \ \forall n \in \boldsymbol{N}. \tag{6}$$

Рассмотрим меры

$$\mu_j^* = \sum_{n=0}^{T} \nu_{jn}, \ j = 1, 2, \ \nu_{j0} = \mu_j(\{0\}) E_0, \ T = \left[\frac{1}{2}\,\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln(1/\varepsilon)}\right].$$

Пусть множество $A_T = \bigcup_{n=0}^{T} S(F^{n*})$. Из соотношения (5) имеем

$$\sigma(\mu_j, \mu_j^*) \leqslant \mu_j(\bar{A}_T) \leqslant c(e(F)(\bar{A}_T) + \varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\sum_{n=T+1}^{\infty} e^{-F(X)}\frac{(F(X))^n}{n!} + \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon^{1/4}, \ j = 1, 2. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим функции

$$\varphi_j(z, y) = \sum_{n=0}^{T} z^n \hat{\nu}_{jn}(y), \ z \in \boldsymbol{C}, \ y \in X^*, \ j = 1, 2. \tag{8}$$

Эти функции для $z \in \boldsymbol{C}$, $|z| \leqslant T/2$ и $y \in X^*$ в силу неравенств (6) допускают оценку $|\varphi_j(z, y)| \leqslant \exp(c|z|)$, $j = 1, 2$ **(9)**. Запишем

$$\rho_1(z, y)\,\varphi_2(z, y) = \sum_{n=0}^{2T} z^n b_n(y), \ z \in \boldsymbol{C}, \ y \in X^*.$$

Для величин $b_n(y)$, $n = 0, 1, \ldots, 2T$, справедливы оценки

$$\left| b_n(y) - e^{-F(X)} \frac{(F(y))^n}{n!} \right| \leqslant \left| \sum_{m=0}^{n} \nu_{1m}(y)\, \nu_{2,\, n-m}(y) - \right.$$

$$\left. - e^{-F(X)} \frac{(F(y))^n}{n!} \right| + \sum_{\substack{m=0 \\ \{m>T\} \cup \{m<n-T\}}}^{n} |\hat{\nu}_{1m}(y)|\, |\hat{\nu}_{2,\, n-m}(y)|.$$

Отсюда с помощью неравенств (1), (5), (6) и учетом попарной сингулярности мер F^{n*} при различных натуральных n следуют соотношения

$$q_n(y) = \left| b_n(y) - e^{-F(X)} \frac{(\hat{F}(y))^n}{n!} \right| \leqslant c\varepsilon + c \sum_{\substack{m=0 \\ \{m>T\} \cup \{m<n-T\}}}^{n} \left(\varepsilon + \frac{(F(X))^m}{m!} \right) \times$$

$$\times \left(\varepsilon + \frac{(F(X))^{n-m}}{(n-m)!} \right) \leqslant c\,(F(X)+1)^n \left(T\varepsilon + \frac{\gamma(n)}{n!} \right),$$

где $\gamma(n) = 0$, если $n \leqslant T$ и $\gamma(n) = 2^n$, если $T < n \leqslant 2T$. Из этих соотношений для $|z| \leqslant \alpha T$, $\alpha = (e^5 (F(X)+1))^{-1}$, $y \in X^*$, получаем неравенство

$$\sum_{n=0}^{2T} (\alpha T)^n q_n(y) \leqslant cT\,(\alpha\,(F(X)+1)\,T)^{2T} \varepsilon + \sum_{n=T}^{2T} \frac{(2\alpha T\,(F(X)+1))^n}{n!} \leqslant e^{-3T}. \quad (10)$$

Нам понадобится также следующее неравенство:

$$\sum_{n=2T+1}^{\infty} (\alpha T)^n \frac{(F(X))^n}{n!} \leqslant e^{-3T}. \quad (11)$$

Из неравенств (10), (11) для $z \in \mathbf{C}$, $|z| \leqslant \alpha T$, и $y \in X^*$ получаем оценку

$$|\varphi_1(z, y)\, \varphi_2(z, y) - {}^{zF(y) - \hat{F}(0)}| \leqslant \sum_{n=0}^{2T} |z|^n q_n(y) +$$

$$+ \sum_{n=2T+1}^{\infty} e^{-F(X)} \frac{(F(X))^n}{n!} |z|^n \leqslant 2e^{-3T}.$$

Поскольку для указанных z, y имеет место очевидная оценка снизу

$$|e^{zF(y) - \hat{F}(0)}| \geqslant e^{-2F(0)\alpha T} \geqslant e^{-T},$$

то. сравнивая две последние оценки, приходим к выводу, что для рассматриваемых z, y выполняется

$$|\varphi_1(z, y)\, \varphi_2(z, y) - e^{zF(y) - F(0)}| \leqslant \frac{1}{2} |e^{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)}|.$$

Отсюда приходим к нужному соотношению для $z\in \boldsymbol{C}$, $|z|\leqslant \alpha T$, $y\in X^*$,

$$\frac{1}{2}\,|e^{z\hat{F}(y)-\hat{F}(0)}|\leqslant |\varphi_1(z, y)\,\varphi_2(z, y)|\leqslant \frac{3}{2}\,|e^{z\hat{F}(y)-\hat{F}(0)}|. \qquad (12)$$

Зафиксируем теперь характер y и рассмотрим функции $\varphi_j(z, y)$, $j=1, 2$, как функции переменной z. Это аналитические функции во всей открытой z-комплексной плоскости и в силу соотношения (12) в круге $|z|\leqslant \alpha T$ не обращаются в нуль. Поэтому для $|z|<\alpha T$ $\varphi_j(z, y)$ допускают представление $\varphi_j(z, y)=\exp\{f_j(z, y)\}$, $f_j(0, y)<0$, $j=1, 2$, где $f_j(z, y)$ — аналитическая в круге $|z|<\alpha T$ функция. Разложим ее в этом круге в ряд Тейлора:

$$f_j(z, y)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}(y)\,z^n,\ \ j=1, 2.$$

В силу оценки (9) для функций $f_j(z, y)$, $j=1, 2$, выполняется неравенство $\operatorname{Re} f_j(z, y)\leqslant c(|z|+1)$, $|z|<\alpha T$, $y\in X^*$. Воспользуемся хорошо известной леммой [1, с. 340].

Лемма. *Если для аналитической в круге* $|z|\leqslant R$ *функции*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

справедливо неравенство $\operatorname{Re} f(z)\leqslant A$, *то* $|b_n|\leqslant 2A/R^n$, $n=1, 2, \ldots$ Из этой леммы ($f(z)=f_j(z, y)-a_{j0}(y)$, $R=\alpha T/2$, $A=cT$) получаем $|a_{jn}(y)|\leqslant (c/T)^{n-1}$, $n=2, 3, \ldots, y\in X^*$. Эти оценки приводят нас к следующему представлению для функций $\varphi_j(z, y)$ при $|z|\leqslant cT$ и $y\in X^*$: $\varphi_j(z, y)=\exp\{a_{j0}(y)+a_{j1}(y)\,z\}\,(1+H_j(z, y))$, $j=1, 2$ **(13)**, где $H_j(z, y)$, $H_j^{(p)}(0, y)=0$, $p=0, 1$ — аналитические по z в круге $|z|\leqslant cT$ при каждом фиксированном $y\in X^*$ функции, допускающие оценку: $|H_j(1, y)|\leqslant c/T$ для всех $y\in X^*$. Сравнивая соотношения (8) и (13) как функции переменной z, заключаем, что для $y\in X^*$

$$e^{a_{j0}(y)}=\mu_j(\{0\}),\ \ e^{a_{j0}(y)}a_{j1}(y)=\hat{\nu}_{j1}(y). \qquad (14)$$

В силу оценки (7) имеем $|\varphi_j(1, 0)-1|\leqslant c\varepsilon^{1/4}$, поэтому из соотношений (13) при $z=1$, $y=0$ и (14) получаем $|\hat{\nu}_{j1}(0)+\mu_j(\{0\})\ln\mu_j(\{0\})|\leqslant$ $\leqslant c/T$ **(15)**. Тогда с помощью соотношений (7), (13)—(15) приходим к неравенству

$$|\hat{\mu}_j(y)-e^{(\hat{\nu}_{j1}(y)-\hat{\nu}_{j1}(0))/\mu_j(\{0\})}|\leqslant \frac{c}{T},\ \ y\in X^*,\ \ j=1, 2,$$

доказывающему нашу теорему.

Доказательство оценки (2). Оценка (2) следует из доказанной теоремы, если будет показано, что $F_j(A)\leqslant F(A)+c\varepsilon$, $\forall A\in \boldsymbol{B}$, $j=1, 2$. Как видно из доказательства теоремы, не уменьшая общности, считаем, что $\mu_j(\{0\})>c$, $j=1, 2$. В силу определения мер ν_{jn}, $j=1, 2$, попарной сингулярности мер F^{n*} при различных n и соотношений (5), (1) легко получаем неравенства

$$\mu_2(\{0\})\,\nu_{11}(A)+\mu_1(\{0\})\,\nu_{21}(A)\leqslant e^{-F(X)}F(A)+c\varepsilon,\ \ \forall A\in \boldsymbol{B},$$
$$|\mu_1(\{0\}\,\mu_2(\{0\})-e^{-F(X)}|\leqslant c\varepsilon.$$

Из последних двух неравенств следует нужное соотношение для мер F_j, $j = 1, 2$, доказывающее оценку (2).

Замечание. Чтобы подчеркнуть простоту предложенного метода исследования, приведем доказательство результата Г. М. Фельдмана, сформулированного в начале заметки. При этом сохраняем все обозначения и определения. Пусть выполнено неравенство (1) при $\varepsilon = 0$. Тогда соотношения (5), (6) имеют место при $\varepsilon = 0$. Образуем для всех $z \in \boldsymbol{C}$ и $y \in X^*$ функции $\varphi_j(z, y)$ по формуле (8), где суммирование будем вести по всем $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Для этих функций неравенство (9) выполняется для всех $z \in \boldsymbol{C}$, $y \in X^*$. Кроме того, легко проверяется соотношение $\varphi_1(z, y)\varphi_2(z, y) = \exp\{z\hat{F}(y) - \hat{F}(0)\}$, из которого следует, что функции $\varphi_j(z, y)$, $j = 1, 2$, как функции переменной z не обращаются в нуль для всех $z \in \boldsymbol{C}$ при фиксированном $y \in X^*$. Поскольку $\varphi_j(z, y)$, $j = 1, 2$ — целые функции по переменной z и допускают оценку (9) для всех $z \in \boldsymbol{C}$, то в силу известной теоремы Адамара [7, с. 38] они имеют вид $\varphi_j(z, y) = \exp\{a_{j0}(y) + a_{j1}(y) z\}$. Сравнивая разложения в ряд по z функции $\varphi_j(z, y)$, получающимся из этого представления с разложением в ряд (8), приходим к доказательству нужного утверждения.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с. 2. *Чистяков Г. П.* О принадлежности классу I_0 законов с неаналитическими характеристическими функциями // ДАН СССР.— 1971.—**201**, № 2.— С. 280—283. 3. *Фельдман Г. М.* Обобщенное распределение Пуассона класса I_0 на группах// Теория вероятностей и ее применение.— 1984.— **XXIX**, № 2.— С. 222—233. 4. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин.— М.: Наука, 1986.— 415 с. 5. *Ушакова А. П.* Об устойчивости разложений вероятностных законов// Теория вероятностей и ее применение.— 1983.— **XXVIII**, № 3.— С. 572—574. 6. *Чистяков Г. П.* О точности оценок в теоремах об устойчивости разложений нормального распределения и распределения Пуассона// Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1976.— Вып. 26.— С. 119—128. 7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 632 с.

Поступила в редколлегию 01.04.86