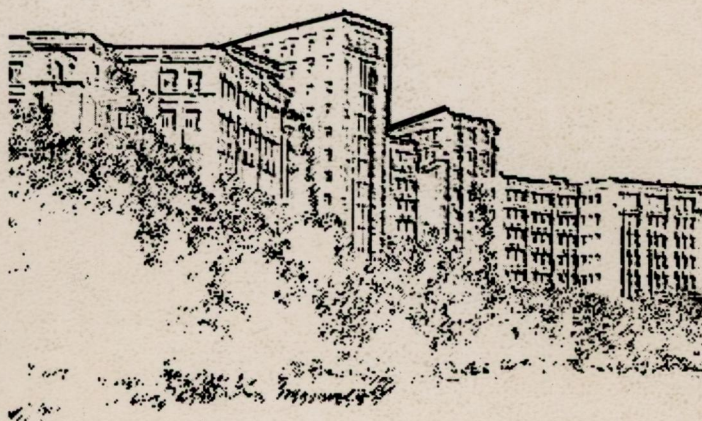


ISSN 0453-8048

ВІСНИК

Харківського національного
університету ім. В.Н. Каразіна



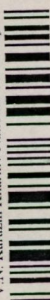
№ 602

Харків
2003

K-14038

П331813

V.N. Karazin Kharkiv National University



00655316

2

2448, 4 (4 484) 708 x 5

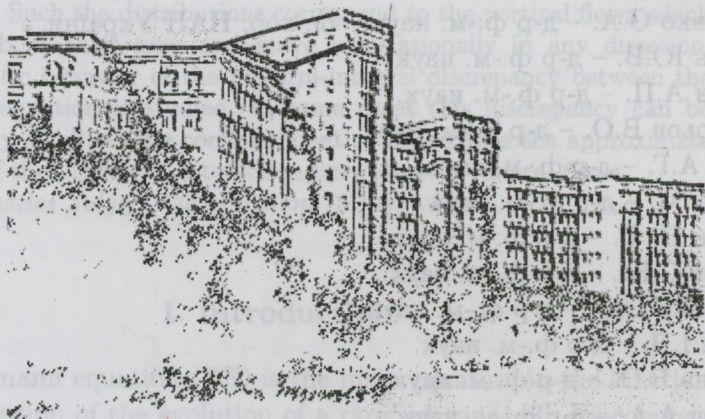
Міністерство освіти та науки України

ISSN 0453-8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного
університету ім. В. Н. Каразіна



№ 602

Серія
«Математика,
прикладна математика
і механіка»

Випуск 53

Харків
2003

Центральна наукова бібліотека
ХНУ імені В. Н. Каразіна
78
2013р.

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Падегон Н. Ф. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинович І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,
ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.

Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

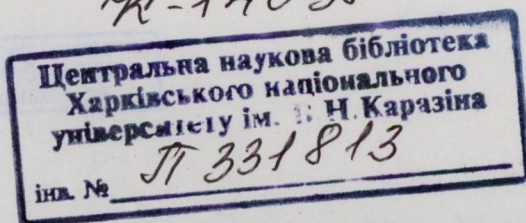
Интернет:

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 12 від 28 листопада 2003 р.).

Свідectво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

©Харківський національний університет, 2003



Vortical flows in a gas of rough spheres

V.D. Gordevskyy

Kharkov National University, Ukraine

The nonlinear Boltzmann equation for the model of rough spheres is considered. It describes the evolution of a rarefied gas of rotating rigid molecules. Explicit approximate solutions of this equation are constructed in a form of the linear combinations of two non-stationary inhomogeneous distributions. Such the distributions correspond to the vortical flows which can rotate about their axes and move translationally in any direction. The asymptotic behavior of the uniform-integral discrepancy between the sides of the equation is studied. In some cases this discrepancy can be done arbitrary small, so the correspondent solutions give the approximate description of the process of interaction between two vortical flows.

2000 Mathematics Subject Classification 76P05.

I. Introduction

The famous Boltzmann equation (BE) is the main equation in the kinetic theory used for the description of the evolution of a rarefied gas [1-3]. Its concrete form depends on the model of interaction between the molecules, but the BE for all cases is rather complex integro-differential nonlinear equation. Therefore, despite of the 130-year history of the BE, the single class of its exact solutions which is known up to now form Maxwellians [1-3] (some new solutions were found only for the special model of interaction — the Maxwell molecules [4-7]).

In general, the Maxwellian can depend in a special way [2] on the time $t \in R^1$, the position $\mathbf{x} \in R^3$, and the velocity $\mathbf{v} \in R^3$ of the molecule — in this case it calls the local one (LM). The simplest form of the Maxwellian (independent of t and $\mathbf{x}$) is called global (GM); it describes the equilibrium states of a gas. That's why, the attempts of the non-equilibrium phenomena in a gas description stimulates the interest to the construction of some approximate explicit solutions of the BE. In [8,9] such the solutions was found for the model of hard spheres (HS) in a bimodal form, i.e. as a linear combination of two GM with some coefficient functions depending on t and $\mathbf{x}$, and in [10] — of two LM of the spiral-type, which describe the flows rotating about the immovable axes — in this case each of the LM does not depend on t but only on $\mathbf{x}$ [1,3] (so, it corresponds to stationary, inhomogeneous equilibrium state of a gas). For the physically significant model

of rough spheres (RS) [1] such the solutions was built yet only in the case of GM [11].

This model was proposed in [12] and later investigated in [13-16]. It successfully combines comparative simplicity and sufficient physical verisimilitude [1,16]. Unlike the HS, which can move only translationally and change their linear velocities in a moment of the absolutely elastic collision, the RS can also rotate about their axes with arbitrary angular velocity $\omega \in R^3$. The linear and the angular velocities of two RS before the collision $\mathbf{v}^*, \mathbf{v}_1^*, \omega^*, \omega_1^*$ are expressed in terms of accordant values $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \omega, \omega_1$ after the collision by the formulae:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^* &= \mathbf{v} - \frac{1}{b+1} \{b(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) + \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha) + \frac{1}{2}bd[\alpha \times (\omega + \omega_1)]\}, \\ \mathbf{v}_1^* &= \mathbf{v}_1 + \frac{1}{b+1} \{b(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) + \alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \alpha) + \frac{1}{2}bd[\alpha \times (\omega + \omega_1)]\}, \\ \omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)} \{[\alpha \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)] + \frac{1}{2}d[\alpha(\alpha, \omega + \omega_1) - \omega - \omega_1]\}, \\ \omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)} \{[\alpha \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)] + \frac{1}{2}d[\alpha(\alpha, \omega + \omega_1) - \omega - \omega_1]\},\end{aligned}\quad (1)$$

where the constant $b \in [0; 2/3]$ depends on the inside structure of the molecule and is connected with its diameter d and moment of inertia I by the relation:

$$I = \frac{bd^2}{4}.\quad (2)$$

The BE for the case of RS has a form:

$$D(f) = Q(f, f),\quad (3)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}},\quad (4)$$

$$\begin{aligned}Q(f, f) &= d^2 \int_{R^3} d\mathbf{v}_1 \int_{R^3} d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha h((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}, \alpha)) \\ &\cdot [f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, \omega^*)f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1^*, \omega_1^*) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \omega)f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \omega_1)].\end{aligned}\quad (5)$$

Here $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \omega)$ — the distribution function describing the evolution of a gas; $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ — its spatial gradient; the vector α lies on the unit sphere $\Sigma \subset R^3$; the function h is of the form:

$$h(u) = \frac{1}{2}(u + |u|).\quad (6)$$

The aim of the present paper is the construction of the bimodal distributions (BD) with non-stationary modes for the case of RS and searching for the situations when they give the approximate description of the process of interaction between two vortical flows (VF) in a gas of RS (i.e. such the flows, which can both rotate and move translationally, too).

Let us seek these approximate solutions of the BE in a form of the BD with VF- modes:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (7)$$

where

$$M_i = M_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \omega) = \rho_i e^{\beta_i [\bar{\omega}_i \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t - \mathbf{x}_{0i})]^2} I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^3 e^{-\beta_i [(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_i)^2 + I(\omega - \bar{\omega}_i)^2]}, \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{v}}_i(t, \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{v}}_i + [\bar{\omega}_i \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)], \quad (9)$$

$$\mathbf{x}_{0i} = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Here $\mathbf{x}_{0i}$ is some point on the axis of rotation of the i -th flow in the moment $t = 0$; the hydrodynamical parameters ρ_i (the densities on the axes); $\beta_i = 1/2T_i$ (the inverse temperatures); $\bar{\mathbf{v}}_i \in R^3$ (the mass linear velocities for t and $\mathbf{x}$ such, that $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t \parallel \bar{\omega}_i$); $\bar{\mathbf{u}}_i \in R^3$ (linear velocities of the axes) and $\bar{\omega}_i$ (the mass angular velocities of the flows) are arbitrary constants, and

$$\varphi_i = \varphi_i(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

are some non-negative coefficient functions from $C^1(R^4)$.

Let us also suppose at once, that

$$[\bar{\omega}_i \times \bar{\mathbf{u}}_i] \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

because if $\bar{\omega}_i \parallel \bar{\mathbf{u}}_i$, then from (8), (9) we see, that the distributions M_i turn into the stationary ones, i.e. the spirals but not the VF. Besides, it is necessary to remark, that the VF of a form (8) are not the Maxwellians (i.e. the exact solutions of the BE), because it can be directly checked, that

$$Q(M_i, M_i) = 0, \quad (13)$$

but

$$D(M_i) = -2M_i \beta_i (\mathbf{v}, \bar{\omega}_i, \bar{\mathbf{u}}_i), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

and the mixed product of the vectors in the expression (14) cannot be equal to zero identically because of (12). That's why let us call the distributions (8) as "quasi-Maxwellians"(QM).

Next, consider the uniform-integral discrepancy between the sides of the BE from [11]:

$$\Delta = \sup_{(t, \mathbf{x}) \in R^4} \int_{R^3} d\mathbf{v} \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)|. \quad (15)$$

The problem is: to study the behavior of the value Δ in dependence on the choice of the functions (11) and all the parameters described above.

In the Section II some sufficient conditions for the infinitesimality of the value Δ are obtained. They correspond to the situations when the BD (7) rather well

approximately describes the interaction between two VF of the form (8) in a gas of RS.

The discussion on the results and their physical sense we will put into the Section III.

II. Main results

First of all, let us formulate some suppositions which will be common for all results obtained below. Namely, let the coefficient functions be of a form:

$$\varphi_i(t, \mathbf{x}) = \psi_i(t, \mathbf{x}) \exp\{-\beta_i[\bar{\omega}_i \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t - \mathbf{x}_{0i})]^2\}, \quad (16)$$

where $\psi_i(t, \mathbf{x})$ are independent of β_i , $i = 1, 2$, and the angular velocities of the VF are connected with their inverse temperatures as follows:

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{0i} s_i \beta_i^{-m_i}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

where $s_i, m_i > 0$ are also arbitrary and fixed. Under the suppositions (16), (17) the following results will be valid.

Theorem 1. *Let*

$$\psi_i = C_i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

where $C_i \geq 0$ are smooth and finite (or fast decreasing) functions on the indicated vector arguments. Then:

1). If

$$m_i > \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

and

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (20)$$

or

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 \neq \bar{\mathbf{v}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 \quad (21)$$

with

$$\text{supp}\psi_1 \cap \text{supp}\psi_2 = \emptyset, \quad (22)$$

then

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta = 0. \quad (23)$$

2). If (19) and (21) are fulfilled, then

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists d_0 > 0, \quad \forall d, \quad 0 < d < d_0, \quad \exists \beta_{0i} > 0, \quad \forall \beta_i > \beta_{0i} \quad (i = 1, 2), \quad \Delta < \epsilon. \quad (24)$$

3). If

$$m_i = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

and (20) or (21) with (22) are true, then

$$\forall \epsilon > 0, \exists s_{0i} > 0, \forall s_i, 0 < s_i < s_{0i} \quad (i = 1, 2), \\ \exists \beta_{0i} > 0, \forall \beta_i > \beta_{0i} \quad (i = 1, 2), \quad \Delta < \epsilon. \quad (26)$$

4). If (25) and (21) are valid, then

$$\forall \epsilon > 0, \exists d_0 > 0, \exists s_{0i} > 0, \forall d, \forall s_i, 0 < d < d_0, \\ 0 < s_i < s_{0i} \quad (i = 1, 2), \quad \exists \beta_{0i} > 0, \forall \beta_i > \beta_{0i} \quad (i = 1, 2), \quad \Delta < \epsilon. \quad (27)$$

Proof. At first, let us consider the integral in (15). The substitution of (7), (8) into (4), (5) with taking into account of (9), (10), (13), (14), (16), (17) and the use of the technique of the papers [10,11], after some evident estimations, changes of variables and transformations, yields:

$$\int_{R^3} d\mathbf{v} \int_{R^3} d\omega |D(f) - Q(f, f)| \leq I^{3/2} \pi^{-3} \sum_{i=1}^2 \rho_i \beta_i^{3/2} \int_{R^3} d\mathbf{u} \int_{R^3} d\omega \\ \cdot e^{-u^2 - \beta_i I(\omega - \bar{\omega}_i)^2} \left[A_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) + \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) + B_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) \right| \right], \quad (28)$$

where

$$A_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) = \psi_1 \psi_2 \rho_j d^2 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{R^3} d\mathbf{w} e^{-w^2} \left| \mathbf{u} \beta_i^{-\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j + s_i \beta_i^{-m_i} [\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)] \right. \\ \left. - s_j \beta_j^{-m_j} [\bar{\omega}_{0j} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_j t)] - \mathbf{w} \beta_j^{-\frac{1}{2}} \right|, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (29)$$

$$B_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} \left(\mathbf{u} \beta_i^{-\frac{1}{2}} + \bar{\mathbf{v}}_i + s_i \beta_i^{-m_i} [\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)] \right) \\ + 2\psi_i \left\{ s_i \beta_i^{\frac{1}{2} - m_i} (\mathbf{u}, \bar{\omega}_{0i}, \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i) - s_i^2 \beta_i^{\frac{1}{2} - 2m_i} ([\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)], [\bar{\omega}_{0i} \times \mathbf{u}]) \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

From (28) - (30) it can be easily seen, that the supposition (18) together with (20) or even (21) ensures the boundness of the integral (28) on the variables $t, \mathbf{x}$, i.e. the existence of the value Δ . Moreover, after the integration with respect to ω and passage to the supremum on $t, \mathbf{x}$ in (28), we will obtain:

$$0 \leq \Delta \leq \Delta', \quad (31)$$

where

$$\Delta' = \pi^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{R^3} \left[\sup_{(t, \mathbf{x}) \in R^4} A_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) \right. \\ \left. + \sup_{(t, \mathbf{x}) \in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) + B_i(\mathbf{u}, t, \mathbf{x}) \right| \right] e^{-u^2} du. \quad (32)$$

Now, the Lemma 1 from the paper [10] and the smoothness of the functions $\psi_i, i = 1, 2$ (see (11), (16)) allow to pass to the limit in (32) under the signs of integral and supremums when $\beta_i \rightarrow +\infty, i = 1, 2$. It is easy to see from (29), (30) and (20) or (21), that if (19) is fulfilled, then

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' = \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \rho_i \sup_{(t,x) \in R^4} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} + \rho_j \pi d^2 \psi_1 \psi_2 |\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}}_j| + 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,x) \in R^4} (\psi_1 \psi_2) \right|, \quad (33)$$

and if (25) is true, then we will obtain the additional summand in (33) which can be estimated from above by the expression:

$$4\pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^2 \rho_i s_i^2 |\omega_{0i}| \sup_{(t,x) \in R^4} (|[\omega_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)]| \psi_i). \quad (34)$$

Next, the conditions (20) or (21), (22) together with (18), as one can see from (33), give:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' = 0. \quad (35)$$

This with taking into account of (31) yields (23), so, the point 1) of the Theorem is proved. In the case 2) the equality (35) does not fulfilled, thus, we cannot confirm the existence of the limit (23) at all, but now from (33) and (18) we have:

$$\lim_{\beta_i \rightarrow +\infty, i=1,2} \Delta' = 4\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{v}}_2| \sup_{(t,x) \in R^4} (\psi_1 \psi_2). \quad (36)$$

It means, that the value Δ , nevertheless, can be done arbitrary small because of (31), if $\beta_i, i = 1, 2$ are sufficiently large, and, only after that, d is sufficiently small, that is equivalent to (24).

The points 3), 4) of the Theorem can be proved in the same way, but now we must use also the value (34), which is infinitesimal if $s_i \rightarrow 0, i = 1, 2$, and, in order to obtain (27), in addition to that, it is necessary to do the value d sufficiently small once more.

The next theorem is connected with the situations when the suppositions (20) or (21) do not fulfilled, i.e.

$$\bar{\mathbf{u}}_i \neq \bar{\mathbf{v}}_i, \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Theorem 2. Let the functions $\psi_i(t, \mathbf{x}), i = 1, 2$ be either of the form (18) or of such the form:

$$\psi_i = C_i([\mathbf{x} \times (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)] - t[\bar{\mathbf{u}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i]), \quad i = 1, 2, \quad (38)$$

where the functions C_i have the same properties as in (18), and

$$\omega_{0i} \parallel (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i), \quad i = 1, 2. \quad (39)$$

Then:

- 1). If (19) is fulfilled, and (22) is valid, or

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_2, \quad (40)$$

then (23) holds true.

- 2). If (19) is fulfilled only, then (24) takes place.

- 3). If (25) and (40) are valid, then (26) holds true.

- 4). If (25) is fulfilled only, then (27) takes place.

Proof. Let us use (28) – (30) once more, but now the existence of the value Δ must be grounded in another way. If (18) is fulfilled, then the values $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$ and $\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}$, $i = 1, 2$ will have the same structure of their arguments, as ψ_i in (18) itself (because of the linearity of these arguments on t and $\mathbf{x}$), and they will be continuous and finite (or fast decreasing) with respect to $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t$, too. So, all the functions ψ_i , $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}$ are bounded on R^4 . Next, if we denote $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t$ as $\mathbf{y}_i \in R^3$, their products on the factors $[\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)]$, $i = 1, 2$, which appear in (29), (30), can be transformed in such a way (for example, for the functions ψ_i , $i = 1, 2$):

$$C_i(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t)[\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)] = C_i(\mathbf{y}_i)[\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{y}_i + (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)t)] = C_i(\mathbf{y}_i)[\bar{\omega}_{0i} \times \mathbf{y}_i], \quad i = 1, 2 \quad (41)$$

because of (39). The last products, evidently, are also bounded thanks to the properties of the functions C_i , $i = 1, 2$.

As for the case (38), let us remark, that

$$[\mathbf{x} \times (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)] - t[\bar{\mathbf{u}}_i \times \bar{\mathbf{v}}_i] = [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t) \times (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)] = [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t) \times (\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i)], \quad (42)$$

so, the functions ψ_i , $i = 1, 2$ of the form (38) can be considered as the special case of the functions on the argument $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{v}}_i t$, consequently,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (43)$$

On the other hand, (42) because of (39) gives the possibility to consider the same functions ψ_i as some finite functions on the other arguments, namely:

$$[\bar{\omega}_{0i} \times (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}_i t)], \quad (44)$$

so, the products analogous to (41) will be bounded too. Thus, the value Δ exists in both the cases considered above.

Next, the estimations like (31), (32) and the following limiting passage with $\beta_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, leads to (33) once more for the cases 1), 2) of the Theorem, and to appearance of the additional summand (34) for the cases 3), 4). But because of (43), the value (33) reduces to (36) or even to (35) (if (40) or (22) are true). The end of the proof of this Theorem absolutely coincides with one from the proof of the Theorem 1.

III. Discussion

So, in the present paper the previous results obtained in [10] for the case of stationary LM (the spirals) and for the model of HS was extended on more complicated case of non-stationary VF and for the model of RS. We draw your attention to the fact that even formally the models of RS and of HS are not reduced to each other because of non-trivial structure of (1).

Now we will do a number of remarks on the mathematical aspects of the results obtained above.

Remark 1. The existence of the limit with $\beta_i \rightarrow +\infty, i = 1, 2$ of the discrepancy Δ itself was proved only in the cases 1) of the both Theorems. In all other cases the technical difficulties do not allow yet to prove this fact (it was of success in [17] for the case of GM for HS when $\beta_1 = \beta_2$ and the functions $\varphi_i, i = 1, 2$ in (7) have some special form), and we can prove the existence of such the limit only for some upper bounds like Δ' in (32). That's why, in order to do the value Δ arbitrary small, we must consider such the repeated ("step-by-step") limiting passages, as in (24), (26) or (27). Formally, they mean, that the values d or (and) $s_i, i = 1, 2$ tend to zero, but only after the limiting passage on β_i . The change of the order of these passages leads to the trivial results: if $s_i = 0, i = 1, 2$, then the VF do not rotate at all, and if $d = 0$, then the interaction between the molecules of a gas is completely absent (in addition to that, the expressions in (1) do not endure the passage $d \rightarrow 0$).

Remark 2. The distribution f has not a limit with $\beta_i, i = 1, 2$ in the sense of the space L_1 in the variables $\mathbf{v}, \omega$ for all the described situations, thus, it does not tend to any known solution of BE for RS (neither to GM nor to LM), but the integral on $\mathbf{v}, \omega$ in (28) has such the limit.

Remark 3. The Theorems 1, 2 are similar, but independent. The matter is that although the functions (38) because of (42) formally are the special case of the functions of the form (18), and (39) is fulfilled if (20) or (21) are true, but the finite function on the argument as in (38) is not a finite one with respect to such argument as in (18). Really, for any fixed t the expression (38) is constant along any straight parallel to the vector $\bar{\mathbf{v}}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1$, so, its support is some cylinder but not bounded domain in R^3 , as for (18). Besides, if $\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_1, i = 1, 2$, the functions (38) are constant on R^3 , so, they cannot ensure the existence of finite supremum on $t, \mathbf{x}$ in (15). And if (37) is fulfilled, the condition (39) is necessary for boundness of ψ_i in the argument (44) and for validity of (41).

What about the physical sense of the obtained results, let us note once more, that the distributions from the Theorems 1, 2 give only the approximate description of the process of interaction between two VF in a gas of RS in the sense of minimization of the discrepancy Δ . Nevertheless, they can be interpreted rather reasonably.

All these distributions have the following common properties: the temperatures of VF are decreasing ($\beta_i \rightarrow +\infty, i = 1, 2$); angular velocities of the rotation of VF are decreasing too (but in different degree, in accordance with (17), (19) or (25); in the cases 4) is also assumed that $s_i, i = 1, 2$ are sufficiently small); the densities of the VF do not depend on their temperatures due to (16) and are defined by

(18) or (38). Besides, unlike the paper [10], which describe the spirals in a gas of HS, here no stationary solutions are obtained, because of the structure of the VF (8), (9).

As for the different variants of the possible behavior of the approximate solutions, they can be classified in such a way:

1. Two VF, which are "coherent" in the following sense: the motion of their particles is identical at the point $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (and, consequently, is almost identical in the neighbourhood of this point) in the moment $t = 0$ due to (40) — in particular, (20). These VF have a spatial configuration of clots (if (18)) or cylinders (if (38)) parallel to the axes of rotation (because of (39)). They fly or in parallel to the vectors $\bar{\mathbf{u}}_i$, or to the planes, in which the vectors $\bar{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{u}}_i$ lie (this case corresponds to the cases 1), 3) of both the Theorems, so, the value $d > 0$ is arbitrary).

2. Two VF (clots or cylinders) of the same form and flying in the same way as in the first case, which are not "coherent", but or they are stratificated in R^4 (if (22)), or a gas of RS is very rarefied, i.e. the value d is sufficiently small, as in cases 2) and 4) of both the Theorems (it means that a gas is almost Knudsen one; in other words, this case describe the near free molecular flows).

Remark 4. All the obtained VF are "self-concordant", i.e. the behavior of M_i does not contradict with one of ψ_i for each $i = 1, 2$. This is easily verified by the comparison of (8), (9) and (18) or (38) (see (20) or (21) if (37) is not fulfilled, and (39) if (37) is true).

Remark 5. From (8) — (10) one can see that if $\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_2$, the distance between the axes of VF is constant, and if $\bar{\mathbf{u}}_1 \neq \bar{\mathbf{u}}_2$, this distance tends to infinity when $t \rightarrow \infty$.

Remark 6. It is possible to increase essentially the number of the situations of the interaction between the VF, if we consider the different behavior of the distributions for $i = 1$ and $i = 2$. For example, ψ_1 can be of the form (18), and ψ_2 — of the form (38); and (or) $m_1 > 1/4$ but $m_2 = 1/4$ and so on.

So, in the present paper it is constructed the approximate description of the process of interaction between two VF, i.e. non-stationary, inhomogeneous flows, in a gas of RS. Perhaps, not all the possible variants of minimization of the discrepancy Δ was found here, because in most cases the obtained results have a form of the sufficient conditions only. It may be of interest to find some new opportunities for the solution of this problem.

REFERENCES

1. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases.— Cambridge: University Press,— 1952.—510p.
2. Carleman T. Problemes mathematiques dans la theorie cinetique des gas.— Uppsala: Almqvist & Wiksells,— 1957.—120p.
3. Cercignani C. The Boltzmann Equation and its Applications.— New York: Springer,—1988.—495p.

4. Bobylev A.V. On the exact solutions of the Boltzmann equation.// Dokl. Akad. Sci. of USSR.-1975.-V.225, 6.- P.1296 - 1299.
5. Krook M., Wu T.T. Exact Solutions of the Boltzmann Equation.// Phys. Fluids.-1977.-V.20, 10(1).-P.1589 - 1595.
6. Ernst H.M. Exact Solutions of the Nonlinear Boltzmann Equation.// J. Statist. Phys.-1984.- V.34,5/6.- P.1001 - 1017.
7. Petrina D.Ya., Mishchenko A.V. On the exact solutions of the one class of the Boltzmann equations.// Dokl. Akad. Sci. of USSR.-1988.-V.298, 2.-P.338 - 342.
8. Gordevsky V.D. Approximate Bimodal Solutions of the Boltzmann Equation for Hard Spheres.// Math. Phys., Anal., Geom.-1995.-V.2,2.-P.168 - 176.
9. Gordevskii V.D. An approximate biflow solution of the Boltzmann equation.// Theoret. Math. Phys.-1998.-V.114,1.-P.126 - 136.
10. Gordevskyy V.D. Biflow distributions with screw modes.// Theoret. Math. Phys.-2001.-V.126,2.-P.234 - 249.
11. Gordevsky V.D. Approximate Biflow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation.// Math. Meth. Appl. Sci.-2000.-V.23.-P.1121 - 1137.
12. Bryan G.H. On the Application of the Determinantal Relation to the Kinetic Theory of Polyatomic Gases.// Rep. British Ass. Adv. Sci. Oxford.-1894.- V.64.-P.102 - 106.
13. Pidduck F.B. The kinetic theory of a special type of rigid molecule.// Proc. Royal Soc.-1922.-V.A 101.-P.101.
14. Mc Coy B.J., Sandler S.I., Dahler J.S. Transport properties of polyatomic fluids IV. The kinetic theory of a dense gas of perfectly rough spheres.//J. Chem. Phys.-1966.-vol.45,10.-P.3485-3512.
15. Brau C.A., Simans G.A., Macomber H.K. Structure of shock waves in diatomic gases.// In "Rarefied Gas Dynamics", Trilling L., Wachman H.(eds), Academic Press: New York.-1969.-V.1,4.-P.331 - 343.
16. Cercignani C., Lampis M. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres.// J. Statist. Phys.-1988.-V.53.-P.655 - 672.
17. Gordevsky V.D. A criterium of smallness of the difference for bimodal solution of the Boltzmann equation.// Math. Phys., Anal., Geom.-1997.- V.4,1/2.- P.46 - 58.

Синтез инерционных управлений для треугольных систем

В.И. Коробов^{a,b}, В.А. Скорик^a

^aХарьковский национальный университет,
пл. Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
E-mail: {vkorobov,skoryk}@univer.kharkov.ua

^bUniversitet Szczecinski, Institut Matematyki,
Wielkopolska str., 15, Institute of Mathematics, Szczecin, Poland
E-mail: korobow@sus.univ.szczecin.pl

Рассматривается задача допустимого синтеза управления для треугольной системы с геометрическими ограничениями на управление и его производные. Исследования проводятся на основе метода функции управляемости. Строятся соответствующие управления. Вычисляется время движения, находятся траектории. Результаты проиллюстрированы примером.

2000 Mathematics Subject Classification 93B50.

1. Введение

Рассмотрим задачу допустимого синтеза инерционных управлений для так называемой треугольной системы

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dots, \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u), \quad (1)$$

заданной в некоторой окрестности начала координат $Q \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$. Обозначим $Q_k = \{(x_1, \dots, x_k)^* \in \mathbb{R}^k : (x_1, \dots, x_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n)^* \in Q \subset \mathbb{R}^n\}$ – проекцию области Q на подпространство, натянутое на первые k координатных векторов, $k = 1, \dots, n$, и $Q_{n+1} = Q \times \mathbb{R}$ (всюду $*$ – транспонирование).

Под задачей допустимого синтеза инерционного управления для системы $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, будем понимать задачу построения управления $u = u(x)$, которое переводит произвольную начальную точку x_0 из некоторой окрестности $Q \subset \mathbb{R}^n$ начала координат в начало координат по траектории $x(t) \in Q$ системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ за конечное время $T(x_0)$, и такого, что

$$|u^{(k)}(x)| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad x \in Q, \quad (2)$$

где $u^{(k)}(x)$ – производная k -го порядка в силу системы $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Класс треугольных систем был введен и впервые рассмотрен В.И. Коробовым в 1973 году в связи с исследованием управляемости и стабилизации нелинейных систем [1]. В этой работе предложен конструктивный метод отображения треугольной системы на линейную при помощи замены переменных и замены управления, что впоследствии стало предметом многочисленных обобщений. Так, например, А.М. Ковалев этот результат распространил на треугольные нестационарные системы [2], В.М. Кунцевич и М.М. Лычак получили подобный результат для разностных систем [3], дальнейшие исследования провели S. Celikovsky и Н. Nijmeijer [4] и другие. Важной особенностью исходного подхода [1] являются минимальные требования к гладкости правых частей отображаемых систем, в то время как в существующей в настоящее время теории нелинейных систем общего вида задача отображаемости, как и многие другие вопросы, традиционно изучаются в бесконечно-дифференцируемом случае.

Дальнейшее развитие теории треугольных систем, а также применения идей и техники треугольных систем к исследованию отображаемости их на линейные системы получено Е.В. Скляр. Так в работах [5, 6] для треугольных систем с заданной минимальной степенью гладкости правых частей показано, что для того чтобы система (1) в предположении, что функции f_k класса $C^{n-k+1}(\mathbb{Q}_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$, отображалась локально в области $\mathbb{Q}$ на линейную систему с помощью замены переменных (класса $C^2(\mathbb{Q})$ с невырожденным якобианом) и аддитивной замены управления (класса C^1) необходимо и достаточно, чтобы в области $\mathbb{Q}_{n+1}$ выполнялось условие

$$\partial f_n(x_1, \dots, x_n, u)/\partial u \cdot \partial f_{n-1}(x_1, \dots, x_n)/\partial x_n \dots \partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_2 = c(x_1), \quad (3)$$

где $c(x_1)$ — n раз непрерывно дифференцируемая, отличная от нуля в области $\mathbb{Q}_1$ функция. При этом показано, что

$$f_n(x, u) = f_n^{(1)}(x)u + f_n^{(2)}(x), \quad f_n^{(1)}(x), f_n^{(2)}(x) \in C^1(\mathbb{Q}). \quad (4)$$

В случае же отображаемости системы (1) на линейную систему только с помощью замены переменных (класса $C^2(\mathbb{Q})$ с невырожденным якобианом) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1. \partial f_k(x_1, \dots, x_{k+1})/\partial x_{k+1} \neq 0, (x_1, \dots, x_{k+1})^* \in \mathbb{Q}_{k+1}, k=1, \dots, n-1; \quad (5)$$

2. Существовала $(n+1)$ раз непрерывно-дифференцируемая в $\mathbb{Q}_1$ функция $L_1(x_1)$, $L'_1(x_1) \neq 0$ такая, что в области $\mathbb{Q}_{n+1}$

$$f_n(x, u) = \frac{u + \sum_{k=1}^n p_k P_{k-1} \dots P_0 L_1(x_1) - P_{n-1}^2 P_{n-2} \dots P_0 L_1(x_1)}{\partial f_{n-1}/\partial x_n \cdot \partial f_{n-2}/\partial x_{n-1} \dots \partial f_1/\partial x_2 \cdot L'_1(x_1)}, \quad (6)$$

где $P_0 = I$, $P_k = f_1(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + \dots + f_k(x_1, \dots, x_{k+1})\partial/\partial x_k$, $k = 1, \dots, n-1$. При этом показано, что $L'_1(x_1) = 1/c(x_1)$, а отображение $z = L(x)$ имеет вид

$$L(x) = (P_0 L_1(x_1), \dots, P_{n-1} \dots P_0 L_1(x_1))^*. \quad (7)$$

Это позволяет сохранить ограничения на управление, что, как правило, является важным при решении задач управления.

В работе рассмотрено решение задачи допустимого синтеза управления для треугольной системы с нулевой точкой покоя с геометрическими ограничениями на управление и его производные. Исследования проводятся на основе метода функции управляемости [7]. В случае, когда треугольная система отображается на каноническую систему с помощью замены переменных и аддитивной замены управления построены управления, решающие указанную задачу и удовлетворяющие вместе с первой производной заданным ограничениям. В случае отображаемости треугольной системы на линейную систему только с помощью замены переменных указано семейство управлений, каждое из которых решает задачу синтеза управлений и вместе со своими производными произвольного порядка удовлетворяет заданным ограничениям. При этом вычисляется время движения, находятся траектории, по которым происходит это движение. Результаты проиллюстрированы модельным примером.

2. Решение задачи синтеза инерционных управлений

Рассмотрим семейство $\{F_\alpha^{-1}(\Theta)\}_{\alpha \geq 1}$ положительно определенных матриц

$$F_\alpha^{-1}(\Theta) = \int_0^{\alpha\Theta^{1/\alpha}} \left(1 - t/(\alpha\Theta^{1/\alpha})\right)^\alpha e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt, \quad (22)$$

где $A_0 - (n \times n)$ -матрица, у которой элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю, $b_0 = (0, \dots, 0, 1)^*$ - n -мерный вектор. В работе [8] показано, что матрица $F_\alpha(\Theta)$ представима в виде

$$F_\alpha(\Theta) = D(\Theta) F D(\Theta), \quad D(\Theta) = \text{diag} \left(\Theta^{-(2n-2k+1)/(2\alpha)} \right)_{k=1}^n, \quad (8)$$

причем матрица $F_\alpha \equiv F_\alpha(1)$ удовлетворяет равенству

$$F_\alpha A_1 + A_1^* F_\alpha = -(F_\alpha - H_\alpha F_\alpha - F_\alpha H_\alpha) \equiv -F^\alpha, \quad (9)$$

где $A_1 = A_0 - 1/2 b_0 b_0^* F_\alpha$, $H_\alpha = \text{diag} \left(-(2n - 2k + 1)/(2\alpha) \right)_{k=1}^n$.

Пусть $a_0 > 0$ - пока произвольное число, которое будет определено далее. Рассмотрим функцию

$$\Phi_\alpha(\Theta, x) = 2a_0\Theta - (F_\alpha(\Theta)L(x), L(x)), \quad x \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \geq 1. \quad (10)$$

Выберем число $\bar{\Theta} > 0$ таким, чтобы неравенство $\Phi_\alpha(\bar{\Theta}, x) > 0$ выполнялось для всех $x \in \mathbb{Q}$. Положим $R_\alpha = \delta (2a_0\bar{\Theta}/\|F_\alpha(\bar{\Theta})\|)^{1/2}$, где число $\delta \in (0, 1)$ таково, что $\{z = L(x) : \|z\| \leq R_\alpha\} \subset L(\mathbb{Q})$, и рассмотрим множество $Q_\alpha^1 = \{x \in \mathbb{Q} : \|L(x)\| \leq R_\alpha\}$. Для фиксированного $\alpha \geq 1$ определим функцию управляемости $\Theta_\alpha(x)$ из уравнения

$$\Phi_\alpha(\Theta, x) = 0, \quad x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}. \quad (11)$$

Утверждение 1. Для каждого $\alpha \geq 1$ уравнение (11) и равенство $\Theta_\alpha(0) = 0$ определяют неотрицательную функцию $\Theta = \Theta_\alpha(x)$, непрерывную в области Q_α^1 и непрерывно дифференцируемую в $Q_\alpha^1 \setminus \{0\}$, причем существует положительное число c_α такое, что множество $Q_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq c_\alpha\}$ является ограниченным и $Q_\alpha \subset \text{int } Q_\alpha^1$.

Доказательство. Из соотношения (10) в силу неравенства

$$(F_\alpha(\Theta)L(x), L(x)) \geq \|L(x)\|^2 / \|F_\alpha^{-1}(\Theta)\|, \quad x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}, \quad (12)$$

и представления (8) имеем $\lim_{\Theta \rightarrow +0} \Phi_\alpha(\Theta, x) = -\infty$, $x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}$. Тогда, так как $\Phi_\alpha(\Theta, x)$ является возрастающей по Θ функцией для всех $x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}$, причем $\Phi_\alpha(\bar{\Theta}, x) > 0$, то уравнение (11) имеет единственное положительное решение $\Theta = \Theta_\alpha(x)$, $x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}$. Поскольку $\Phi_\alpha(\Theta, x)$ непрерывно дифференцируемая функция по Θ и по x и, так как $\partial \Phi_\alpha(\Theta, x) / \partial \Theta \neq 0$, то по теореме о неявной функции $\Theta_\alpha(x)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой в области $Q_\alpha^1 \setminus \{0\}$ функцией. Непрерывность $\Theta_\alpha(x)$ в нуле вытекает из неравенства $\Theta_\alpha(x) \leq (L_{\max}^2 \|F_\alpha\| \|x\|^2 / (2a_0))^{\alpha/(\alpha+2n-1)}$, где $L_{\max} = \max_{x \in Q_\alpha^1} \|L_x(x)\|$.

В силу неравенства (12) и того, что $(F_\alpha(\Theta)L(x), L(x))$ является убывающей по Θ функцией, имеем $Q_\alpha^1 \supset \{x \in Q : \Theta_\alpha(x) \leq R_\alpha^2 / (2a_0 \|F_\alpha^{-1}(\bar{\Theta})\|)\}$. Отсюда следует справедливость включения $Q_\alpha \subset \text{int } Q_\alpha^1$ для

$$c_\alpha = \sigma \delta^2 \bar{\Theta} / (\|F_\alpha(\bar{\Theta})\| \|F_\alpha^{-1}(\bar{\Theta})\|), \quad \sigma \in (0, 1). \quad \square \quad (13)$$

Рассмотрим систему (1) с функциями $f_k \in C^{n-k+1}(Q_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющими условию (3). Тогда производная отображения (7) в силу этой системы имеет вид [5]

$$\dot{L}(x) = A_0 L(x) + b_0(g(x) + u), \quad (14)$$

где функция

$$g(x) = P_{n-1} L_n(x) + f_n^{(2)}(x) / f_n^{(1)}(x). \quad (15)$$

Утверждение 2. Пусть в Q_α^1 функция $g(x)$ удовлетворяет условию

$$|g(x)| \leq C \|L(x)\|^s, \quad C > 0, \quad s \geq 1. \quad (16)$$

Тогда производная функции $\Theta_\alpha(x)$ в силу системы (1) с управлением

$$u_\alpha(x) = -1/2 b_0^* F_\alpha(\Theta_\alpha(x)) L(x), \quad x \in Q_\alpha^1 \setminus \{0\}. \quad (17)$$

удовлетворяет неравенству $\dot{\Theta}_\alpha(x) \leq -\tilde{\beta}_\alpha \Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x)$, $x \in \tilde{Q}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq \tilde{c}_\alpha\}$, $\tilde{\beta}_\alpha > 0$, $\tilde{c}_\alpha > 0$; и при определенном выборе a_0 управление (17) удовлетворяет ограничениям (2) при $l = 1$.

Доказательство. Управление (17) является липшицевым в каждом множестве $K(\rho_1, \rho_2) = \{x \in Q : 0 < \rho_1 \leq \|L(x)\| \leq \rho_2 \leq R_\alpha\}$ с постоянной Липшица $L_u(\rho_1, \rho_2) \rightarrow +\infty$ при $\rho_1 \rightarrow 0$.

Положим $y(\Theta, x) = D(\Theta)L(x)$. На основании равенства (8) из равенства (11) при $\Theta = \Theta_\alpha(x)$ и из формулы (17) имеем

$$2a_0\Theta_\alpha(x) = (F_\alpha y(\Theta_\alpha(x), x), y(\Theta_\alpha(x), x)), \quad (18)$$

$$u_\alpha(x) = \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}(x)r_0 y(\Theta_\alpha(x), x); \quad r_0 = -1/2 b_0^* F_\alpha. \quad (19)$$

Будем считать, что $\Theta_\alpha = \Theta_\alpha(x)$, $y = y(\Theta_\alpha(x), x)$, $D = D(\Theta_\alpha(x))$. В силу равенств (14), $DA_0D^{-1} + \Theta_\alpha^{-1/\alpha}b_0r_0 = A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha}$ производная y в силу системы (1) с управлением (19) имеет вид $\dot{y} = (\dot{\Theta}_\alpha\Theta_\alpha^{-1}H_\alpha + A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha})y + \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}b_0g(x)$.

Тогда, учитывая равенство (9), из соотношения (18) имеем

$$\dot{\Theta}_\alpha = - \left(1 - 2\Theta_\alpha^{1/(2\alpha)}g(x)(F_\alpha b_0, y)/(F^\alpha y, y) \right) \Theta_\alpha^{1-1/\alpha} \quad (20)$$

и из (19) с учетом равенства (20) получаем

$$\dot{u}_\alpha(x) = \Theta_\alpha^{-3/(2\alpha)}r_1 y + 4\Theta_\alpha^{-1/\alpha}r_0(E/(2\alpha) - H_\alpha)y \frac{r_0 y g(x)}{(F^\alpha y, y)} + \Theta_\alpha^{-1/\alpha}r_0 b_0 g(x), \quad (21)$$

где $r_1 = r_0(E/(2\alpha) - H_\alpha + A_1)$.

Поскольку $L(x) = D^{-1}(\Theta)y(\Theta, x)$, то из (16) вытекает неравенство

$$|g(x)| \leq C\Theta_\alpha^{s/(2\alpha)}\|y\|^s, \quad x \in \{x \in Q_\alpha^1 : \Theta_\alpha < 1\}, \quad C > 0, \quad s \geq 1. \quad (22)$$

Тогда на основании неравенств (22), $(F^\alpha y, y) \geq \|y\|^2/\|(F^\alpha)^{-1}\|$,

$$\|y\| \leq (2a_0\|F_\alpha^{-1}\|\Theta_\alpha)^{1/2}, \quad x \in Q_\alpha^1, \quad (23)$$

из (20), (19), (21), соответственно, для всех $x \in \{x \in Q_\alpha^1 : \Theta_\alpha < 1\}$ получаем

$$\dot{\Theta}_\alpha \leq - \left(1 - \mu a_0^{(s-1)/2} \Theta_\alpha^{(s-1)/2 + (s+1)/(2\alpha)} \right) \Theta_\alpha^{1-1/\alpha},$$

$$|u_\alpha(x)| \leq \mu_0 a_0^{1/2} \Theta_\alpha^{1/2 - 1/(2\alpha)}, \quad |\dot{u}_\alpha(x)| \leq \mu_1 a_0^{1/2} \Theta_\alpha^{1/2 - 3/(2\alpha)} + \mu_2 a_0^{s/2} \Theta_\alpha^{s/2 + (s-2)/(2\alpha)},$$

где $\mu = 2^{(s+1)/2}C\|F_\alpha\|\|(F^\alpha)^{-1}\|\|F_\alpha^{-1}\|^{(s-1)/2}$, $\mu_0 = (2\|F_\alpha^{-1}\|)^{1/2}\|r_0\|$,

$$\mu_1 = (2\|F_\alpha^{-1}\|)^{1/2}\|r_1\|, \quad \mu_2 = C(2\|F_\alpha^{-1}\|)^{s/2}(4n\|r_0\|^2\|(F^\alpha)^{-1}\|/\alpha + f_{nn}/2).$$

Пусть число a_0 удовлетворяет неравенствам

$$0 < a_0 \leq d_0^2/\mu_0^2, \quad \mu_1 a_0^{1/2} + \mu_2 a_0^{s/2} \leq d_1. \quad (24)$$

Положим $\beta_\alpha(\Theta) = 1 - \mu a_0^{(s-1)/2} \Theta^{(s-1)/2 + (s+1)/(2\alpha)}$. Выберем положительную постоянную $\hat{c}_\alpha < 1$ так, чтобы при $0 < \Theta_\alpha \leq \hat{c}_\alpha$ было выполнено неравенство $\beta_\alpha(\hat{c}_\alpha) > 0$. Положим $\tilde{c}_\alpha = \min\{c_\alpha, \hat{c}_\alpha\}$ и рассмотрим область $\tilde{Q}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq \tilde{c}_\alpha\}$. Очевидно, имеет место включение $\tilde{Q}_\alpha \subset Q_\alpha$. Определим $\tilde{\beta}_\alpha = \beta_\alpha(\tilde{c}_\alpha)$. Тогда при $\alpha \geq 3$ имеем $\dot{\Theta}_\alpha(x) \leq -\tilde{\beta}_\alpha \Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x)$, управление

$u_\alpha(x)$ решает в области $\tilde{Q}_\alpha$ задачу синтеза и удовлетворяет в ней ограничениям $|u_\alpha(x)| \leq d_0$, $|\dot{u}_\alpha(x)| \leq d_1$. $\square$.

Таким образом, на основании теоремы 1 [7] в силу утверждений 1, 2 доказана следующая теорема.

Теорема 1. Рассмотрим систему (1) с функциями $f_k \in C^{n-k+1}(Q_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющими условию (3), и такими, что функция $g(x)$ вида (15) удовлетворяет неравенству (16), с ограничениями на управление вида (2) при $l = 1$. Пусть $\alpha \geq 3$, число a_0 удовлетворяет условию (24), функция $\Theta_\alpha(x)$ определяется уравнением (11) и условием $\Theta_\alpha(0) = 0$, $\tilde{Q}_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq \tilde{c}_\alpha\}$.

Тогда в области $\tilde{Q}_\alpha \setminus \{0\}$ управление $u_\alpha(x)$ вида (17) решает задачу синтеза инерционных управлений, причем $T_\alpha(x_0) \leq (\alpha/\tilde{\beta}_\alpha)\Theta_\alpha^{1/\alpha}(x_0)$.

Рассмотрим решение задачи синтеза инерционных управлений для треугольных систем, отображающихся только заменой переменных на линейные системы. Обозначим

$$\eta_k = \sum_{i=0}^{\min\{k,n\}} |p_{n-i+1}| c_\alpha^{i/\alpha} \|r_{k-i}\| + \delta_k \|pA_0^k\| \max\{c_\alpha^{(k+n)/\alpha}, c_\alpha^{(k+1)/\alpha}\}, \quad (25)$$

где $|p_{n+1}|=1$, $p=(p_1, \dots, p_n)$, c_α определена соотношением (13), $r_0 = -1/2 b_0^* F_\alpha$, $r_i = r_{i-1} ((2i-1)E/(2\alpha) - H_\alpha + A_1)$, $i = 1, \dots, l$, $\delta_k = 1$ при $0 \leq k < n$, $\delta_k = 0$ при $k \geq n$.

Теорема 2. Рассмотрим систему (1) с функциями $f_k \in C^{n-k+1}(Q_{k+1})$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяющими условиям (5) и равенству (6), с ограничениями на управление вида (2) для произвольного натурального l . Пусть $\alpha \geq 2l+1$, a_0 удовлетворяет условию

$$0 < a_0 \leq 1/(2\|F_\alpha^{-1}\|) \min_{0 \leq k \leq l} d_k^2 / (\eta_k^2 c_\alpha^{1-(2k+1)/\alpha}), \quad (26)$$

и функция управляемости $\Theta_\alpha(x)$ определена уравнением (11) и условием $\Theta_\alpha(0) = 0$, область $Q_\alpha = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq c_\alpha\}$, где постоянная c_α из (13).

Тогда управление

$$u_\alpha(x) = -(1/2 b_0^* F_\alpha(\Theta_\alpha(x)) + p) L(x) \quad (27)$$

решает задачу синтеза инерционных управлений в области $Q_\alpha \setminus \{0\}$, причем время движения $T_\alpha(x_0)$ равно $\alpha\Theta_\alpha^{1/\alpha}(x_0)$.

Доказательство. По теореме 1 [7] в силу утверждения 1 для полного доказательства этой теоремы нам осталось показать, что в области Q_α^1 производная функции управляемости $\Theta_\alpha(x)$ в силу системы (1) с управлением (27) удовлетворяет неравенству $\dot{\Theta}_\alpha(x) \leq -\beta\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x)$ и управление вида (27) вместе со своими производными до заданного порядка l удовлетворяет ограничениям (2) в области Q_α . Перепишем управление (27) в виде

$$u_\alpha(x) = \Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}(x) r_0 y - pL(x). \quad (28)$$

Из равенства (15) на основании равенства (4) в силу представления (6) имеем $g(x)=pL(x)$. Из равенства (14) с управлением $u=u_\alpha(x)$ вида (28) получаем $\dot{L}(x)=A_0L(x)+\Theta_\alpha^{-1/(2\alpha)}b_0r_0y$. Поэтому в силу равенства $DA_0D^{-1}+\Theta_\alpha^{-1/\alpha}b_0r_0=A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha}$ имеем $\dot{y}=(\dot{\Theta}_\alpha\Theta_\alpha^{-1}H_\alpha+A_1\Theta_\alpha^{-1/\alpha})y$. Тогда с учетом (9) из равенства (18) получаем $\dot{\Theta}_\alpha(x)=-\Theta_\alpha^{1-1/\alpha}(x)$, $x \in Q_\alpha^1$.

Производная k -го порядка управления в силу системы (1) с управлением (27) задается формулой $u_\alpha^{(k)}(x)=\Theta_\alpha^{-(2k+1)/(2\alpha)}\xi_k(\Theta_\alpha)y$, $x \in Q_\alpha^1$, где

$$\xi_k(\Theta)=-\sum_{i=0}^{\min\{k,n\}}p_{n-i+1}\Theta^{i/\alpha}r_{k-i}-\delta_k\Theta^{(2k+1)/(2\alpha)}pA_0^kD^{-1}(\Theta), \quad k=0,\dots,l.$$

Отсюда в силу неравенства (23) имеем

$$|u_\alpha^{(k)}(x)| \leq \Theta_\alpha^{1/2-(2k+1)/(2\alpha)}\|\xi_k(\Theta_\alpha)\| (2a_0\|F_\alpha^{-1}\|)^{1/2}, \quad x \in Q_\alpha^1. \quad (29)$$

Поскольку $\|\xi_k(\Theta_\alpha(x))\| \leq \eta_k$ при $x \in Q_\alpha$, где η_k задается выражением (25), то для каждого $k=0,1,\dots,l$ при $\alpha \geq 2l+1$ из неравенства (29) получаем $|u_\alpha^{(k)}(x)| \leq (2a_0\|F_\alpha^{-1}\|)^{1/2}\eta_k c_\alpha^{1/2-(2k+1)/(2\alpha)}$, $x \in Q_\alpha$. Тогда, выбрав a_0 согласно условию (26), имеем $|u_\alpha^{(k)}(x)| \leq d_k$, $x \in Q_\alpha$, $k=0,1,\dots,l$. $\square$

3. Нахождение траекторий

Найдем траекторию $x(t)$ системы (1) с функциями $f_1, \dots, f_n$, удовлетворяющими условиям теоремы 2, отвечающую управлению $u_\alpha(x)$ вида (27), которая начинается в произвольной точке $x_0 \in Q_\alpha$ и оканчивается в нуле. Пусть $\alpha \geq 2l+1$. Выберем a_0 из условия (26) и найдем положительный корень Θ_α^0 уравнения (11) при $x=x_0$. Обозначим $\theta_\alpha(t)=\Theta_\alpha(x(t))$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}=a(x)-b(x)(1/2 b_0^*F_\alpha(\theta_\alpha)+p)L(x), \quad x(0)=x_0, \quad (30)$$

$$\dot{\theta}_\alpha=-\theta_\alpha^{1-1/\alpha}, \quad \theta_\alpha(0)=\Theta_\alpha^0, \quad (31)$$

где $a(x)=(f_1, \dots, f_{n-1}, (pL(x)-P_{n-1}L_n(x))/(\partial f_{n-1}/\partial x_n \cdots \partial f_1/\partial x_2 \cdot L_1'(x_1)))^*$, $b(x)=(0, \dots, 0, 1/(\partial f_{n-1}/\partial x_n \cdots \partial f_1/\partial x_2 \cdot L_1'(x_1)))^*$. Решив задачу Коши (31), имеем $\theta_\alpha(t)=((T_\alpha-t)/\alpha)^\alpha$, где $T_\alpha=\alpha(\Theta_\alpha^0)^{1/\alpha}$. Тогда траектория $x(t)$ является решением соответствующей (30) задачи Коши

$$\dot{x}=a(x)-b(x)(1/2 b_0^*F_\alpha(((T_\alpha-t)/\alpha)^\alpha)+p)L(x), \quad x(0)=x_0.$$

Положив $z=L(x)$, получаем

$$\dot{z}_1=z_2, \quad \dots, \quad \dot{z}_{n-1}=z_n, \quad \dot{z}_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{\alpha^{n-k+1}f_{nk}^\alpha z_k}{(T_\alpha-t)^{n-k+1}},$$

$$z_1(0)=L_1(x_1^0) \equiv z_1^0, \quad \dots, \quad z_n(0)=L_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \equiv z_n^0,$$

где $f_{i,j}^\alpha$ - элементы матрицы F_α . Отсюда имеем

$$2(T_\alpha-t)^n z_1^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1} f_{nn-k}^\alpha (T_\alpha-t)^{n-k-1} z_1^{(n-k-1)} = 0,$$

$$z_1^{(j)}(0)=z_{j+1}(0), \quad j=0, \dots, n-1.$$

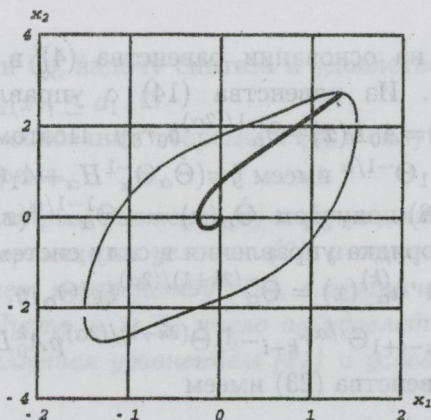


Рис. 1: Область и фазовая траектория.

Эта задача Коши для дифференциального уравнения типа Эйлера заменой времени $t = T - e^\tau$ сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами относительно функции $y(\tau) = z_1(T_\alpha - e^\tau)$

$$2\Delta_n y(\tau) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{k+1} f_{nn-k}^\alpha \Delta_{n-k-1} y(\tau) = 0, \quad (32)$$

$$y(\tau_0) = z_1^0, \quad \dots, \quad (\Delta_i y)(\tau_0) = T_\alpha^i z_1^{(i)}(0) = T_\alpha^i z_{i+1}^0, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $\Delta_0 = I$, $\Delta_1 = -d/d\tau$, $\Delta_k = (-d/d\tau + k - 1) \dots (-d/d\tau)$, $k = 2, \dots, n$, $\tau_0 = \ln(T_\alpha)$. Так как $z_1(t) = y(\ln(T_\alpha - t))$, то функции $z_2(t), \dots, z_n(t)$ находятся путем дифференцирования функции $z_1(t)$, т.е. $z_j(t) = z_1^{(j-1)}(t)$, $j = 2, \dots, n$. Траектория $x(t)$ определяется из равенства $L(x(t)) = z(t)$. Для ее нахождения потребовалось лишь один раз решить уравнение (11).

4. Модельный пример

Рассмотрим задачу синтеза инерционных управлений для системы

$$\dot{x}_1 = -x_2/(1+x_1^2), \quad \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + x_1^3 - u, \quad (33)$$

с ограничениями на управление (2) при $l = 2$, где $d_0 = 17$, $d_1 = 28$, $d_2 = 30$.

Для системы (33) выполнено условие (3), причем $c(x_1) = 1/(1+x_1^2)$, следовательно, замена имеет вид $z = L(x) = (x_1 + x_1^3/3, -x_2)^*$. Поскольку выполнены условия (5), (6) и имеют место [5] соотношения $|L'_1(x_1)| = 1 + x_1^2 \geq 1$, $|L'_1(x_1) \cdot \partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_2| = 1$ для $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, то с помощью этой замены переменных система (33) глобально отображается на систему $\dot{z}_1 = z_2$, $\dot{z}_2 = -3z_1 - 2z_2 + u$ и является глобально управляемой при ограничениях на управление $|u| \leq d_0$.

Согласно предположениям теоремы 2 выберем $\alpha = 5$ и далее в обозначениях этот индекс указывать не будем. Из равенства (13) при $\bar{\Theta} = 8.6$ и близких к единице значениях σ и δ получаем $c = 1$. Согласно условию (26)

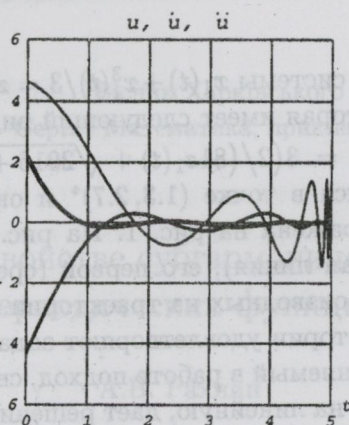


Рис. 2: Управление и его производные на траектории.

положим $a_0 = 4.5$. Определим функцию управляемости $\Theta(x)$ при $x \neq 0$ как положительный корень уравнения

$$9\Theta^{\frac{8}{5}} - \frac{14}{5}\Theta^{\frac{2}{5}}x_2^2 + \frac{112}{25}\Theta^{\frac{1}{5}}(x_1 + x_1^3/3)x_2 - \frac{392}{125}(x_1 + x_1^3/3)^2 = 0 \quad (34)$$

и условием $\Theta(0) = 0$. Рассмотрим область $Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$, граница которой изображена на рис. 1.

Согласно формуле (27) управление $u(x)$, которое для системы (33) решает задачу синтеза инерционных управлений в области Q , имеет вид

$$u(x) = (3 - 28/(25\Theta^{2/5}(x)))(x_1 + x_1^3/3) - (2 - 7/(5\Theta^{1/5}(x)))x_2,$$

и вместе с производными (здесь $\Theta = \Theta(x)$)

$$\begin{aligned} \dot{u}(x) &= \frac{28 - 56\Theta^{1/5}}{25\Theta^{3/5}}(x_1 + x_1^3/3) - \frac{14 - 70\Theta^{1/5} + 75\Theta^{2/5}}{25\Theta^{2/5}}x_2, \\ \ddot{u}(x) &= \frac{28(1 + 50\Theta^{1/5} - 75\Theta^{2/5})}{625\Theta^{4/5}}(x_1 + x_1^3/3) - \frac{14 + 28\Theta^{1/5} - 105\Theta^{2/5}}{25\Theta^{3/5}}x_2 \end{aligned}$$

удовлетворяет в ней ограничениям $|u(x)| \leq 17$, $|\dot{u}(x)| \leq 28$, $|\ddot{u}(x)| \leq 30$.

Найдем траекторию системы (33), начинающуюся в точке $x_0 = (1.3, 2.7)^* \in Q$. Для этого вычислим положительный корень Θ_0 уравнения (34) при $x = x_0$. Имеем $\Theta_0 \approx 0.98$ и время движения $T(x_0) \approx 4.98$. Решение задачи Коши (32) задается формулой $y(\tau) = e^{4\tau}(k_1 \cos(2\sqrt{3}\tau) + k_2 \sin(2\sqrt{3}\tau))$, где

$$k_1 = T^{-4}(z_{10}(\cos(2\sqrt{3} \ln T) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3} \ln T)) + \frac{1}{2\sqrt{3}}z_{20}T \sin(2\sqrt{3} \ln T)),$$

$$k_2 = T^{-4}(z_{10}(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(2\sqrt{3} \ln T) + \sin(2\sqrt{3} \ln T)) - \frac{1}{2\sqrt{3}}z_{20}T \cos(2\sqrt{3} \ln T)).$$

Здесь $z_{10} = x_{10} + x_{10}^3/3$, $z_{20} = -x_{20}$. Тогда

$$z_1(t) = (T - t)^4(k_1 \cos \gamma(t) + k_2 \sin \gamma(t)),$$

$$z_2(t) = (T - t)^3(-(4k_1 + 2\sqrt{3}k_2) \cos \gamma(t) + (2\sqrt{3}k_1 - 4k_2) \sin \gamma(t)),$$

где $\gamma(t) = 2\sqrt{3} \ln(T-t)$. Из системы $x_1(t) + x_1^3(t)/3 = z_1(t)$, $-x_2(t) = z_2(t)$, находим траекторию $x(t)$, которая имеет следующий вид $x_1(t) = -w(t) + 1/w(t)$, $x_2(t) = -z_2(t)$, где $w(t) = 3(2/(81z_1(t) + \sqrt{2916 + 6561z_1^2(t)}))^{1/3}$. Фазовая траектория, начинающаяся в точке $(1.3, 2.7)^*$ и оканчивающаяся в нуле в момент времени T , изображена на рис. 1. На рис. 2 изображены графики управления (самая толстая линия), его первой (средней толщины линия) и второй (тонкая линия) производных на траектории. Очевидно, управление и его производные на траектории удовлетворяют заданным ограничениям.

Таким образом, применяемый в работе подход, связанный с отображением нелинейной системы на линейную, дает решение задачи синтеза ограниченного управления для системы (33) во всем пространстве; задача синтеза инерционных управлений для этой системы решается также в широкой области. Вместе с тем, решение указанных задач для системы (33) по первому приближению дается только в некоторой малой окрестности начала координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов В.И. Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференц. уравн. – 1973. – Т. 9, 4. – С. 614 – 619.
2. Ковалев А.М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – К. – 1980. – 174 с.
3. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 390 с.
4. Celikovsky S., Nijmeijer H. Equivalence of nonlinear systems to triangular form: the singular case // Systems and Control Letters. – 1996. – No. 27. – P. 135 – 144.
5. Сkläр Е.В. Отображение треугольных управляемых систем на линейные без замены управления // Дифференц. уравн. – 2002. – Т. 38, 1. – С. 34–43.
6. Сkläр Е.В. Отображение нелинейных управляемых систем на линейные // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Харьков, 2003. – 141 с.
7. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб. – 1979. – Т. 109(151), № 4(8). – С. 582 – 606.
8. Коробов В.И., Скорик В.А. Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением // Дифференц. уравн. – 2002. – Т. 38, 3. – С. 319–331.

Об одном свойстве субгармонических почти периодических функций

А.В. Рахнин

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Украина

Доказано, что если субгармоническая функция является почти периодической в полосе и ее логарифм является субгармонической функцией, то этот логарифм является обобщенной почти периодической функцией.

2000 *Mathematics Subject Classification* 42A75, 31A05.

При изучении распределения нулей голоморфной почти периодической функции $f(z)$ в полосе $S_{a,b} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, a < y < b\}$ важную роль играет введенная Б.Йессеном [1, стр.356] функция $J_f(y)$, которая является средним значением по переменной x функции $\log |f(z)|$ (последняя, вообще говоря, уже не является почти периодической функцией, поэтому существование среднего значения не следует из общих теорем).

В работе [2] Л.Ронкин распространил результаты Б.Йессена на голоморфные почти периодические функции в трубчатых областях. В частности, он показал, что для голоморфной почти периодической функции $f(z)$ в полосе ее функцию Йессена $J_f(y)$ можно определить как предел при $t \rightarrow \infty$ в смысле распределений функций $\log |f(tx + iy)|$. Последнее утверждение получило развитие в работе [3], где Л.Ронкин, в частности, доказал почти периодичность в смысле распределений функции $\log |f(z)|$ для голоморфной почти периодической функции $f(z)$; таким образом, существование функции Йессена вытекало из теорем о существовании среднего значения у почти периодических распределений.

С другой стороны, в работе [4] рассматривались почти периодические в смысле распределений субгармонические функции в полосе, где они использовались для изучения распределения нулей голоморфных функций с почти периодическим модулем. В связи с этим представляется естественным распространить теорему Л.Ронкина о функции $\log |f(z)|$ на логарифмически субгармонические функции, то есть такие неотрицательные субгармонические функции, что их логарифм также является субгармонической функцией.

Чтобы сформулировать основные результаты работы, введем необходимые определения. При этом почти периодичность функции будем определять

по Бохнеру, используя понятие компактных семейств сдвигов. Эквивалентность этого определения классическому определению Б.Бора, использующие понятие ε -почти периода, см., напр., [1, стр.23].

Определение 1. Непрерывная функция $f(z)$, $z = x + iy$, определенная в замкнутой полосе $\mathbb{R} + iK$, K - компактное подмножество $\mathbb{R}$ (возможно $K = \{0\}$) называется почти периодической, если из любой последовательности $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ можно выделить подпоследовательность $\{t_{n'}\}$ так, что функции $f(z + t_{n'})$ равномерно сходятся на множестве $\mathbb{R} + iK$.

Определение 2. Непрерывная функция $f(z)$ в открытой полосе $S_{(a,b)}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, называется почти периодической, если ее сужение на любое множество вида $\mathbb{R} + i[\alpha, \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$, является почти периодической функцией.

Определение 3. Обобщенная функция $f(z)$ в полосе $S_{(a,b)}$ называется обобщенной почти периодической функцией, если для любой непрерывной финитной функции $\varphi(z)$ в $S_{(a,b)}$ функция

$$\int \varphi(z - t) f(z) dx dy$$

является почти периодической функцией переменного $t \in \mathbb{R}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $u(z)$ - логарифмически субгармоническая почти периодическая функция в полосе S . Тогда функция $\log u(z)$ есть обобщенная почти периодическая функция в S .

Эта теорема получается с помощью следующего утверждения:

Теорема 2. Пусть $u_n(z)$ непрерывные логарифмически субгармонические функции в области $G \subset \mathbb{C}$, равномерно сходящиеся на компактах в G к функции $u_0(z) \neq 0$. Тогда функции $\log u_n(z)$ сходятся в смысле распределений к функции $\log u_0(z)$.

Доказательство теоремы 2. Положим $l_\varepsilon(t) = \log \max\{\varepsilon, t\}$. По условию, функции $l_\varepsilon(u_n)(z) = \max\{\log u_n(z), \log \varepsilon\}$ субгармонические в G и равномерно сходятся на компактах в G к функции $l_\varepsilon(u_0)(z)$, поэтому и эти функции, и функция $\log u_0(z)$, как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ монотонно убывающей последовательности функций $l_\varepsilon(u_0)(z)$, есть субгармонические функции в G .

Рассмотрим семейство функций

$$\{\log u_n(z)\}_{n=0,1,\dots} \quad (1)$$

Покажем, что это семейство компактно в $D'(G)$.

Для этого достаточно показать (см. [5, стр.52]), что семейство (1) равномерно ограничено сверху на каждом компакте в G и существуют компакт $K_1 \in G$ и $C > -\infty$ такие, что

$$\sup_{z \in K_1} (\log u_n(z)) \geq C, \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Так как $u_0(z)$ ограничена на любом компакте $K \in G$ и функции $u_n(z)$ сходятся к $u_0(z) \neq 0$ равномерно на K , то $\log u_n(z)$ равномерно ограничены сверху на K .

Далее, рассмотрим замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса r $B(z_0, r) \subset G$. Покажем, что выражение

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} (\log u_n(z))$$

равномерно ограничено снизу. Так как функция $\log u_0(z)$ субгармоническая и не равна тождественно $-\infty$,

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} (\log u_0(z)) \geq C_0,$$

то есть

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} (u_0(z)) \geq e^{C_0}.$$

Далее, функции $u_n(z)$ сходятся к функции $u_0(z)$, при $n \rightarrow \infty$ равномерно в круге $B(z_0, r)$. Поэтому для всех $n > n_0$

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} (u_n(z)) \geq e^{C_0-1}.$$

Таким образом, найдется такая константа C , что

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} (\log u_n(z)) \geq C, \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, найдется подпоследовательность функций $\log u_{n'}(z)$, сходящаяся в $D'(G)$ к некоторой субгармонической в G функции $v(z)$.

Как известно, сходимость субгармонических функций в $D'(G)$ эквивалентна их сходимости в $L^1_{loc}(G)$, то есть сходимости в $L^1(K)$ на каждом компакте $K \subset G$ (см. [6, стр.120]).

Заметим, что для любого компакта $K \subset G$ и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\int_K |\max\{\log u_{n'}(z), \log \varepsilon\} - \max\{v(z), \log \varepsilon\}| dx dy \leq \int_K |\log u_{n'}(z) - v(z)| dx dy.$$

Следовательно, функции $\max\{\log u_{n'}(z), \log \varepsilon\}$ сходятся к функции $\max\{v(z), \log \varepsilon\}$ в $L^1_{loc}(G)$, для любого $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, так как последовательность функций $u_n(z)$ сходится равномерно на любом компакте в G , то, как было сказано выше $l_\varepsilon(u_n)(z)$ равномерно сходятся на компактах в G к функции $l_\varepsilon(u_0)(z)$, а значит, имеет место сходимость в $L^1_{loc}(G)$.

Получаем, что последовательность $l_\varepsilon(u_{n'})(z)$ при любом $\varepsilon > 0$ с одной стороны сходится к $l_\varepsilon(u_0)(z)$ в $L^1_{loc}(G)$, с другой сходится к функции $\max\{v(z), \log \varepsilon\}$ в $L^1_{loc}(G)$, значит почти всюду имеем равенство

$$\max\{v(z), \log \varepsilon\} = \max\{\log u_0(z), \log \varepsilon\}. \quad (2)$$

Это равенство имеет место всюду, так как из равенства двух субгармонических функций почти всюду следует их равенство всюду, см. напр. [5, стр.43].

Устремим в равенстве (1) ε к нулю. Так как $\text{mes}(\{z \in G : v(z) < \log \varepsilon\}) \rightarrow 0$ и $\text{mes}(\{z \in G : \log u_0(z) < \log \varepsilon\}) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, то имеем $v(z) = \log u_0(z)$ почти всюду, а значит - всюду.

Таким образом, последовательность функций $\log u_{n'}(z)$ сходится к функции $\log u_0(z)$ в $D'(G)$.

Покажем, что любая подпоследовательность функций семейства (1) сходится к функции $\log u_0(z)$ в $D'(G)$. Предположим, что это не так, то есть существует подпоследовательность функций $\log u_{n_j}(z)$, $\varepsilon_0 > 0$ и компакт $K_0 \in G$ такие, что

$$\int_{K_0} |\log u_{n_j}(z) - \log u_0(z)| dx dy \geq \varepsilon_0, \quad (3)$$

для всех n_j .

Заметим, что семейство $\{\log u_{n_j}\}$ компактно, поэтому из этого семейства можно выделить сходящуюся в $D'(G)$ подпоследовательность. Как и выше, получим, что эта подпоследовательность сходится к $\log u_0(z)$ в $L^1_{loc}(G)$, что противоречит предположению (3). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{h_n\} \in \mathbb{R}$ - произвольная последовательность. Так как $u(z)$ почти периодическая функция, то, переходя при необходимости к подпоследовательности и используя диагональный процесс, можно считать, что функции $u(z + h_n)$ сходятся к некоторой функции $u_0(z)$ равномерно в любой подполосе $S_{(\alpha, \beta)}$, где $a < \alpha < \beta < b$. Нетрудно также видеть, что $u_0(z)$ логарифмически субгармоническая и почти периодическая функция в $S_{(a, b)}$. Для доказательства теоремы необходимо показать, что для каждой непрерывной финитной функции $\varphi(z)$ в $S_{(a, b)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \log u(z + h_n) \varphi(z + t) dx dy = \int \log u_0(z) \varphi(z + t) dx dy,$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}$.

Предположим, что это не так, то есть для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой последовательности $t_n \rightarrow \infty$

$$\left| \int \log u(z + h_n - t_n) \varphi(z) dx dy - \int \log u_0(z - t_n) \varphi(z) dx dy \right| \geq \varepsilon. \quad (4)$$

Переходя к подпоследовательности и используя почти периодичность функции $u_0(z)$, можно считать, что функция $u_0(z - t_n)$ сходится к $v(z)$ равномерно в каждой подполосе $S_{(\alpha, \beta)}$, и, следовательно, ввиду равномерной сходимости $u(z + h_n)$ к $u_0(z)$, тот же предел имеют функции $u(z + h_n - t_n)$. Тогда

по теореме 2 оба интеграла в (4) имеют при $n \rightarrow \infty$ один и тот же предел $\int \log v(z) \varphi(z) dx dy$, что невозможно. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В работе [4] было показано, что если $f(z)$ - голоморфная функция в полосе и $\log |f(z)|$ обобщенная почти периодическая функция, то $|f(z)|$ является почти периодической в смысле определения 2.

Покажем, что обратное утверждение к теореме 1 в общем случае не верно. Положим

$$A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B(3^{n-1} + k3^n; 2^{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

где, как и выше, $B(z_0; R)$ обозначает открытый шар в $\mathbb{C}$ с центром в z_0 и радиуса R . Отметим, что $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$.

Функции $|\sin \pi(3^{-n}z - 3^{-1})|$ имеют период 3^n , поэтому для некоторых $\alpha_n > 0, \beta_n < \infty$

$$\inf_{|\operatorname{Im} z| \leq 3^n, z \notin A_n} |\sin \pi(3^{-n}z - 3^{-1})| \geq \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

и

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \int_{|\operatorname{Re} z - t| \leq 3^n, |\operatorname{Im} z| \leq 3^n} \log |\sin \pi(3^{-n}z - 3^{-1})| dx dy \geq -\beta_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим

$$M := \sup_{|\operatorname{Im} w| \leq 1} |\sin \pi w|$$

и

$$f_n(z) := \left| \frac{\sin \pi(3^{-n}z - 3^{-1})}{M} \right|^{\gamma_n},$$

где $\gamma_n > 0$ выбранно так, чтобы

$$\gamma_n \left| \log \frac{\alpha_n}{M} \right| \leq 2^{-n}$$

и ряд

$$\sum_n \gamma_n [\beta_n + 4 \cdot 3^{2n} \log M]$$

сходился.

Отметим, что $|f_n(z)| \leq 1$ при $|\operatorname{Im} z| \leq 3^n$ и

$$|f_n(z)| \geq e^{-\frac{1}{2^n}} \quad \text{при } |\operatorname{Im} z| \leq 3^n, z \notin A_n \quad (5)$$

Кроме того, для любой финитной неотрицательной функции $\varphi(z)$ с носителем в шаре B из полосы $|\operatorname{Im} z| \leq 3^n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$0 \geq \int \log |f_n(z)| \varphi(z - t) dx dy \geq \sup_{|\operatorname{Re} z - t| \leq 3^n, |\operatorname{Im} z| \leq 3^n} \varphi \int \log |f_n(z)| dx dy \geq$$

$$\geq \gamma_n \sup \varphi[-\beta_n - 4 \cdot 3^{2n} \log M] \quad (6)$$

Положим

$$f(z) := \prod_{n \in \mathbb{N}} f_n(z).$$

Так как частные суммы ряда

$$\sum_n \log f_n(z)$$

образуют невозрастающую последовательность в любой фиксированной горизонтальной полосе, причем, ввиду (5),

$$\sum_n \log f_n(z) \not\equiv -\infty,$$

то функции $\log f$ и f являются субгармоническими в $\mathbb{C}$. Далее, из (6) и выбора γ_n следует, что функция

$$\int \log f(z) \varphi(z-t) dx dy$$

есть равномерный предел периодических функций переменной $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, является почти периодической функцией, то есть $\log f(z)$ - обобщенная почти периодическая функция.

Проверим непрерывность $f(z)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ и выберем какую-нибудь ограниченную окрестность $U(z_0)$. Пусть $|\operatorname{Im} z_0| \leq 3^N$. Выберем $n_0 \geq N$ столь большим, чтобы $U(z_0) \cap A_n = \emptyset$, $U(z_0) \subset \{z : |\operatorname{Im} z| \leq 3^n\}$ при $n > n_0$ и, кроме того,

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{2^{n_0}}}\right) \prod_{n=1}^N f_n(z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тогда для $z \in U(z_0)$ имеем

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(z)| &\leq \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z) \left| \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z) - \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z_0) \right| + \\ &+ \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z_0) \left| \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z) - \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z_0) \right| \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\prod_{n=1}^{n_0} f_n(z_0) \leq \prod_{n=1}^N f_n(z_0),$$

$$1 \geq \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(z) \geq e^{-\frac{1}{2^{n_0}}}$$

при любом $z \in U(z_0)$ и уменьшить окрестность $U(z_0)$ так, чтобы для всех z из уменьшенной окрестности выполнялось неравенство

$$\left| \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z) - \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, заметим, что точка $x_m = 3^{m-1} + \frac{1}{2^m}$ не лежит ни в одном из множеств A_n , поэтому, ввиду (5), $f(x_m) \geq e^{-1}$. Так как $f(3^{m-1}) = 0$, то функция $f(z)$ не является равномерно непрерывной, а поэтому не может быть почти периодической в смысле определения 2.

Замечание 2. Из работы [4] следует, что $f(z)$ является обобщенной почти периодической функцией.

Замечание 3. Определение 1 очевидным образом обобщается на почти периодические функции на множестве $\mathbb{R}^m + iK$, K - компактное подмножество $\mathbb{R}^m$, определения 2 и 3 - на трубчатой области $\mathbb{R}^m + iG$, G - область в $\mathbb{R}^m$; сдвиги теперь надо брать на векторы $t \in \mathbb{R}^m$ и вместо сегмента $[\alpha, \beta]$ надо брать компакты в G . **Теоремы 1 и 2** также переносятся на этот случай.

Автор благодарит научного руководителя проф. Фаворова С.Ю. за постановку задачи и рецензента проф. Гришина А.Ф. за ценные замечания, позволившие существенно упростить доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б.М. Почти периодические функции. - М.: ГИТТЛ, 1953.
2. Ронкин Л.И., Теоремы Иессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях. // Сиб. мат. ж. 28 - No8 - 1987.
3. Ронкин Л.И. Почти периодические обобщенные функции и дивизоры в трубчатых областях. // Записки науч. семинаров ПОМИ. - 247. - 1997. - С. 210-236.
4. Favorov S.Yu., Rashkovskii A.Yu. and Ronkin A.I.: Almost periodic divisors in a strip. // J. Anal. Math. - 74. - 1998 - p. 325-345;
5. Азарин В.С. Теория роста субгармонических функций: Тексты лекций. - Харьков: ХГУ, 1978.
6. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Теория распределения и анализ Фурье, том 1. - М.: Мир, 1986.
7. Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions, vol. 1, Academic Press, New York, 1976.

Многочленные асимптотические представления субгармонических функций с выделенной переменной

П.З. Агранович

Физико-технический институт низких температур им.Б.И.Веркина, Украина

В работе рассматриваются плюрисубгармонические функции в $D \times \mathbb{C}$, где D область в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, мера которых сосредоточена на множестве $D \times \{w : \Im w = 0\}$. Для таких функций в терминах многочленных асимптотических представлений установлена зависимость между поведением самой функции на бесконечности по выделенной переменной и функции распределения ее меры.

2000 Mathematics Subject Classification 32U05, 31C10.

Эта работа¹ продолжает серию исследований по изучению зависимости между поведением субгармонических функций на бесконечности и функциями распределения их мер Рисса в терминах многочленных асимптотик.

Пусть D - некоторая область в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Через $PSH(D \times \mathbb{C})$ обозначим класс плюрисубгармонических на множестве $D \times \mathbb{C}$ функций.

Определение 1.² Будем говорить, что $u(z, w) \in PSH(D \times \mathbb{C})$ является функцией не более чем нормального типа при порядке ρ по переменной w , если

$$u(z, w) \leq C_1(z)|w|^\rho + C_2(z) \quad \forall z \in D,$$

где $C_i, i = 1, 2$ - ограниченные функции в любой подобласти $D' \subset\subset D$.

Множество плюрисубгармонических на множестве $D \times \mathbb{C}$ функций не более чем нормального типа при порядке ρ по переменной w будем обозначать в дальнейшем $PSH(D \times \mathbb{C})[\rho]$.

Для класса функций $PSH(D \times \mathbb{C})[\rho]$, используя полученные ранее в работах [1, 2, 3] результаты, удастся получить описание связи между самой функцией и некоторой связанной с ней мерой в терминах многочленных асимптотических представлений.

В дальнейшем для функции $f(z)$, заданной на множестве G , используется следующее обозначение

$$f(G) = \int_G f(z) d\lambda_z,$$

¹Эта работа поддержана грантом ИНТАС № 99-00089.

²Это и следующее определения были даны в [1].

где λ_z мера Лебега в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Определение 2. Множество E называется $\Xi_{0,\alpha}$ -множеством в $D \times \mathbb{C}$, если для любой подобласти $D' \subset\subset D$ существует такая система "цилиндров" $\Pi_j = \{z : |z - z_j| < r_j\} \times \{w : |w - w_j| < R_j\}, j = \overline{1, n}$, что

$$i) E \cap (D' \times \mathbb{C}) \subset \bigcup_j \Pi_j;$$

$$ii) \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^\alpha} \sum_{j: |w_j| < R} r_j^{2n} R_j^\alpha = 0;$$

iii) радиусы любого "цилиндра" Π_j , покрывающего точку $(z, w) \in E, z \in D'$, удовлетворяют условию

$$\frac{R_j}{r_j} \leq C|w|,$$

где постоянная C зависит от D' и не зависит от выбора Π_j .

Будем говорить, что функция $f(\cdot, t), t > 0$, имеет многочленную асимптотику, если она может быть представлена следующим образом:

$$f(\cdot, t) = \Delta_1(\cdot)t^{\rho_1} + \Delta_2(\cdot)t^{\rho_2} + \dots + \Delta_n(\cdot)t^{\rho_n} + \kappa(\cdot, t), t \rightarrow \infty,$$

где $\Delta_j(\cdot), j = 1, \dots, n$, — вещественные функции; $0 < [\rho_1]^3 < \rho_n < \dots < \rho_1$ и последний член справа, т.е. функция $\kappa(\cdot, t)$, мала по переменной t в некотором смысле по сравнению с предыдущим членом. Аналогично понимается выражение "многочленная асимптотика функции $f(\cdot, w), w \rightarrow \infty$ ". В этом случае коэффициенты Δ_j являются функциями от $\theta = \arg w$, а $t = |w|$.

Рассмотрим плюрисубгармоническую функцию $u(z, w)$, проинтегрируем ее по множеству $D', D' \subset\subset D$. Как нетрудно видеть, $u(D', w)$ является субгармонической в плоскости функцией. Обозначим через $n_{D', u}$ меру Рисса функции $u(D', w)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 1.4 Пусть $u(z, w) \in PSH(D \times \mathbb{C})[\rho]$, где ρ — нецелое число, все массы которой сосредоточены во множестве $D \times \{w : \operatorname{Im} w = 0\}$. Пусть для функции $n_u(D', t)$ выполняется соотношение

$$n_{D', u}(t) = n_{D', t}(\{|w| < t\}) = \Delta_1(D')t^{\rho_1} + \Delta_2(D')t^{\rho_2} + \varphi(D', t), \quad \forall D' \subset\subset D, \quad (1)$$

где $\rho_1 \notin \mathbb{Z}; p = [\rho_1] < \rho_2 < \rho_1; \Delta_1(D') \geq 0$; а для функции $\varphi(D', t)$ при некотором $q \geq 1$ имеет место оценка

$$\int_T^{2T} |\varphi(D', t)|^q dt = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \rightarrow \infty, D' \subset\subset D. \quad (2)$$

³Как обычно $[a]$ обозначает целую часть числа a .

⁴В дальнейшем будем рассматривать лишь случай двучленных асимптотических представлений, что не уменьшает общности.

Тогда $u(z, w) \in PSH(D \times \mathbb{C})[\rho_1]$ и

$$u(D', w) = \frac{\pi r^{\rho_1} \Delta_1(D')}{\sin \pi \rho_1} \cos \rho_1(\theta - \pi) + \frac{\pi r^{\rho_2} \Delta_2(D')}{\sin \pi \rho_2} \cos \rho_2(\theta - \pi) + \psi(D', re^{i\theta}), \quad D' \subset D, \quad (3)$$

причем для любого множества $D' \subset D$ функция $\psi(D', re^{i\theta}) = o(r^{\rho_2})$, $r \rightarrow \infty$, равномерно по $\theta \in [0, \pi]$, если точка $(z, re^{i\theta})$ не принадлежит некоторому $\Xi_{0,1}$ -множеству.

Если $q > 1$, то

$$\int_T^{2T} \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\psi(D', re^{i\theta})|^q dr = o(T^{\rho_1 q + 1}), \quad T \rightarrow \infty, D' \subset D. \quad (4)$$

Доказательство. Из соотношений (1) и (2) несложно вывести, что

$$n_{D', u}(t) = \Delta_1(D') t^{\rho_1} + o(t^{\rho_1}), \quad \forall D' \subset D.$$

Таким образом, $u(z, w) \in PSH(D' \times \mathbb{C})[\rho_1]$ и функция $u(D', w)$ не более чем нормального типа при порядке ρ_1 .

Так как ρ_1 является нецелым числом, то для дальнейшего достаточно предполагать, что функция $u(D', w)$ является каноническим потенциалом, а значит, имеет следующий вид

$$u(D', w) = \int_{\{|\zeta| > 1\}} h_p(w, \zeta) dn_{D', u}(\zeta),$$

где

$$h_p(w, \zeta) = \ln \left| 1 - \frac{w}{\zeta} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left| \frac{w}{\zeta} \right|^k \cos k\alpha$$

и α - угол между w и ζ . Теперь воспользовавшись теоремой 1 [2], устанавливаем, что возникающее исключительное множество является $\Xi_{0,1}$ множеством и имеет место асимптотическое представление (3) - (4).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $u(z, w) \in PSH(D \times \mathbb{C})[\rho_1]$, где ρ_1 нецелое число, и пусть все ее массы Рисса сосредоточены на множестве $(D \times \{w : \operatorname{Im} w = 0\}) \setminus (D \times \{w : |w| < 1\})$. Предположим, что для любого подмножества $D' \subset D$ имеет место следующее соотношение

$$u(D', x) = \pi \Delta_1(D') x^{\rho_1} \operatorname{ctg} \pi \rho_1 + \pi \Delta_2(D') x^{\rho_2} \operatorname{ctg} \pi \rho_2 + \psi(D', x), \quad x > 0,$$

где ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют одному из следующих условий:

- $[\rho_1] < \rho_2 < \rho_1 + \frac{1}{2}$;
- $[\rho_1] + \frac{1}{2} < \rho_2 < \rho_1 + 1$,

а для функции $\psi(D', x)$ при некотором $q > 1$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} |\psi(D', x)|^q dx = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \rightarrow \infty.$$

Тогда для любого подмножества $D' \subset D$ функция $n_{D', u}(t)$ представима в виде

$$n_u(D', t) = \Delta_1(D')t^{\rho_1} + \Delta_2(D')t^{\rho_2} + \varphi(D', t),$$

причем остаточный член

$$\varphi(D', t) = o(t^{\rho_2})$$

при $t \rightarrow \infty$ вне исключительного множества нулевой относительной меры.

Если $q > 1$, то

$$\int_T^{2T} |\varphi(D', t)|^q dt = o(T^{\rho_2 q + 1}), \quad T \rightarrow \infty.$$

Используя рассуждения, проведенные при доказательствах теоремы 1 и теоремы 3 [2], убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Отметим, что эта теорема может быть обобщена на случай конечной системы лучей подобно тому, как это было сделано для целых функций одной комплексной переменной в [2].

Аналогично заключаем, что для функций из $PSH(D \times \mathbb{C})[\rho]$ с произвольным распределением меры по w имеет место следующая [4]

Теорема 3. Пусть $u(z, w) \in PSH(D \times \mathbb{C})[\rho_1]$, ρ_1 - нецелое число, и пусть для любого $D' \subset D$ при всех $\Theta \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [\Theta, 2\pi + \Theta]$, кроме, быть может, множества $D' \times E$, где E не более чем счетное, имеет место соотношение

$$n_{D', u}(\{\zeta : 0 < |\zeta| \leq t, \Theta < \arg \zeta \leq \theta\}) =$$

$$\Delta_1(D', \Theta, \theta)t^{\rho_1} + \Delta_2(D', \Theta, \theta)t^{\rho_2} + \varphi(D', t, \Theta, \theta),$$

где $[\rho_1] < \rho_2 < \rho_1$. Предположим далее, что $n_u(D', t, \Theta, \theta) \equiv 0$ при $|t| < 1$; функции $\Delta_j, j = 1, 2$, локально суммируемы и для остаточного члена $\varphi(D', t, \Theta, \theta)$ при некотором $q \geq 1$ и любом конечном T равномерно по Θ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_T^{\Theta+T} d\alpha \int_R^{2R} |\varphi(D', t, \Theta, \alpha)|^q dt = o(R^{\rho_2 q + 1}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Тогда порядок функции $u(z, w)$ по выделенной переменной равен ρ_1 и

$$u(D', re^{i\theta}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\pi r^{\rho_j}}{\sin \pi \rho_j} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho_j(\theta - \alpha - \pi) d\Delta_j(D', 0, \alpha) + \psi(D', re^{i\theta}).$$

где функция $\psi(D', re^{i\theta}) = o(r^{\rho_2})$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$ вне некоторого $\Xi_{0,2}$ - множества.

Если число $q > 1$, то

$$\int_{R \leq |w| \leq 2R} |\psi(D', w)|^q d\lambda_w = o(R^{\rho_2 q + 2}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Замечание. Отметим, что для доказательства приведенных выше теорем от функции $u(z, w)$ достаточно потребовать, чтобы она была функцией полунепрерывной сверху и субгармонической по выделенной переменной w .

Однако наиболее интересен, по нашему мнению, случай функций из $PSH(D \times \mathbb{C})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович П.З. Многочленные асимптотические представления субгармонических функций с массами на конечной системе лучей. // МАГ. - 1996. - Т. 3,3/4. - С. 219-230.
2. Агранович П.З., Логвиненко В.Н. Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей. // Сиб.мат.журнал. - 1985. - Т. 24,5. - С. 3-19.
3. Агранович П.З., Логвиненко В.Н. Многочленные асимптотические представления субгармонической в плоскости функции. // Сиб.мат.журнал. - 1991. - Т. 32,1. - С. 3- 21.

Минимальные поверхности в группе Гейзенберга

Л.А. Масальцев, Е.В. Петров

Харьковский национальный университет, Украина

Исследуются линейчатые и $SO(2)$ -инвариантные минимальные поверхности в трехмерной группе Гейзенберга с левоинвариантной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. Доказано несуществование вполне геодезических поверхностей.

2000 *Mathematics Subject Classification* 53C40, 53C42.

Трехмерная группа Гейзенберга или в терминологии [3, гл.4] геометрия Nil представляет собой трехмерную действительную группу Ли с умножением

$$L_{\bar{a}}\bar{x} = (a^1, a^2, a^3)(x, y, z) = (x + a^1, y + a^2, z + a^3 + a^1y),$$

с левоинвариантной метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. Группа Nil возникает в физике: ее алгебра Ли совпадает с алгеброй Ли (со скобкой Пуассона) координатных функций гамильтоновой механики, а также с алгеброй Ли соответствующих им наблюдаемых квантовой механики ([5]). Группа изометрий Nil описана в [3]. Она имеет размерность 4, содержит подгруппу трансляций, изоморфную самой Nil, затем одномерную подгруппу вращений относительно вертикальных слоев и отражения типа $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, -z)$. В [2, теорема 0] отмечено, что группа изометрий группы Гейзенберга разлагается в полупрямое произведение группы трансляций и $Aut(nil) \cap O(f)$ - группы автоморфизмов алгебры Ли nil, сохраняющих метрику. Тензор Римана метрики Nil имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1212} = \frac{x^2-3}{4}$, $R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{4}$, $R_{1213} = -\frac{x}{4}$. Для того чтобы оценить, в каких пределах меняется секционная кривизна Nil, очевидно, достаточно это сделать в начале координат. Если выбрать в $T_e Nil$ два ортонормированных вектора $X = (\cos u, \sin u, 0)$ и $Y = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, \sin v)$, то секционная кривизна $K(X, Y)$ в направлении двумерной плоскости, натянутой на X, Y , может быть найдена по формуле

$$K(X, Y) = R_{1212} \cos^2 v + R_{1313} \cos^2 u \sin^2 v + R_{2323} \sin^2 u \sin^2 v + \\ + 2R_{1223} \sin u \cos v \sin v + 2R_{1312} \cos u \cos v \sin v + 2R_{1323} \cos u \sin u \sin^2 v =$$

$$= -\frac{3}{4} \cos^2 v + \frac{1}{4} \sin^2 v.$$

Следовательно, $-\frac{3}{4} \leq K(X, Y) \leq \frac{1}{4}$ и поэтому Nil представляет собой пример трехмерной односвязной римановой группы Ли (в терминологии [2]) со знакопеременной секционной кривизной. Представляет интерес описание множества минимальных поверхностей в Nil . В первом разделе мы изучаем поведение геодезических Nil . Оказывается, что их естественно классифицировать на "горизонтальные", "вертикальные" и "винтовые". Во втором разделе мы находим все линейчатые минимальные поверхности, состоящие из "горизонтальных" и, отдельно, из "вертикальных" геодезических. В третьем разделе приведены формулы для коэффициентов первой и второй фундаментальных форм поверхности в Nil , заданной в виде $(x, y, z(x, y))$, получено уравнение явно заданной минимальной поверхности и доказано несуществование вполне геодезических поверхностей в Nil . (В отличие от компактных групп Ли, где вполне геодезическим будет экспоненциальный образ любой тройной системы Ли в соответствующей алгебре Ли, в частности, любой подалгебры). В последнем разделе мы приводим формулы для $SO(2)$ -инвариантных минимальных поверхностей в группе Гейзенберга. Заметим, что $SO(2)$ -инвариантные поверхности постоянной ненулевой средней кривизны были исследованы П. Томтером в [6]. Первым из авторов написаны разделы 1-3, а вторым последний раздел.

1. Геодезические в Nil

В этом разделе мы опишем поведение связки геодезических выходящих из произвольной точки многообразия Nil . Ковариантный и контравариантный метрический тензор имеют вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Символы Кристоффеля выражаются следующим образом

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & x/2 & -1/2 \\ x/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x^2-1}{2} & -x/2 \\ \frac{x^2-1}{2} & 0 & 0 \\ -x/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Классические уравнения геодезической в Nil следующие (штрихом обозначено дифференцирование по натуральному параметру геодезической)

$$\begin{cases} x'' - xy'^2 + y'z' = 0, \\ y'' + xx'y' - x'z' = 0, \\ z'' + (x^2 - 1)x'y' - xx'z' = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Умножая первое уравнение на x' , а второе на y' и складывая, получим $x'^2 + y'^2 = c_1^2$. Умножая второе уравнение на x и вычитая из него третье, получим $xy' - z' = c_2$. Поскольку $x'^2 + y'^2 + (z' - xy')^2 = 1$, то постоянные c_1, c_2 связаны следующим образом $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

Подставляя $z' = xy' - c_2$ в первое и второе уравнения системы (1), получим

$$\begin{aligned}x'' - c_2 y' &= 0, \\y'' + c_2 x' &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Интегрируем эту систему

$$\begin{aligned}x' - c_2 y &= c_3, \\y' + c_2 x &= c_4.\end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее уравнение

$$x'' + c_2^2 x - c_2 c_4 = 0 \quad (3)$$

Здесь надо различать два случая 1) $c_2 = 0$ и 2) $c_2 \neq 0$. В первом случае имеем

$$x = c_3 s + c_5, y = c_4 s + c_6, z = c_3 c_4 \frac{s^2}{2} + c_5 c_4 s + c_7, \quad (4)$$

причем постоянные c_3, c_4 должны быть связаны условием $c_3^2 + c_4^2 = 1$, для того чтобы s было длиной дуги.

Нетрудно проверить, что скалярное произведение орта оси z $(0, 0, 1)$ на касательный вектор геодезической (4) равно нулю в любой точке этой геодезической. Проекцией геодезической (4) на координатную плоскость xOy является прямая, поэтому мы будем называть геодезическую (4) "горизонтальной".

Рассмотрим теперь случай 2) $c_2 \neq 0$. В этом случае интегрируя сначала уравнение (3), а затем и оставшиеся уравнения системы, получим

$$\begin{aligned}x &= c_5 \cos(c_2 s) + c_6 \sin(c_2 s) + \frac{c_4}{c_2}, \\y &= -c_5 \sin(c_2 s) + c_6 \cos(c_2 s) - \frac{c_3}{c_2}, \\z &= \frac{c_5 c_6}{2} \cos(2c_2 s) + \frac{c_6^2 - c_5^2}{4} \sin(2c_2 s) - \frac{c_4}{c_2} (c_5 \sin(c_2 s) - c_6 \cos(c_2 s)) - \\&\quad - \frac{(c_5^2 + c_6^2 + 2)c_2 s}{2} + c_7,\end{aligned}\quad (5)$$

причем условие, что s является длиной дуги влечет $c_2^2(c_5^2 + c_6^2 + 1) = 1$.

Геодезическая (5) проектируется на плоскость xOy в окружность радиуса $r = \sqrt{c_5^2 + c_6^2}$, которая может вырождаться в точку. Поскольку орт оси z образует с касательным вектором геодезической (5) постоянный угол, то мы

будем называть геодезическую (5) "винтовой", если $c_5^2 + c_6^2 > 0$ и "вертикальной", если $c_5 = c_6 = 0$. Таким образом, "вертикальная" геодезическая имеет следующие уравнения

$$x = c_4, y = c_3, z = s + c_7. \quad (6)$$

2. Линейчатые минимальные поверхности в Nil.

Линейчатые минимальные поверхности в Nil следует искать в виде однопараметрических семейств геодезических каждого из трех описанных в разделе 1 видов, т.е. как коллекции "горизонтальных", "вертикальных" и "винтовых" геодезических, проходящих через некоторую фиксированную кривую в Nil.

Теорема 1 *Линейчатая минимальная поверхность в Nil, состоящая из "горизонтальных" геодезических (4) имеет один из следующих двух видов*

$$1) r(s, t) = (s \cos t - a_0 ctgt + b_0, s \sin t,$$

$$\frac{s^2}{4} \sin 2t + s(-a_0 ctgt + b_0) \sin t + \frac{a_0^2}{2} ctgt + c_0 t + d_0), \quad (7)$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 - произвольные действительные постоянные,

$$2) r(s, t) = (c_3(t)s, c_6(t), a_0 c_6(t) + b_0),$$

где c_3, c_6, c_7 - произвольные дифференцируемые функции переменной t

Доказательство. 1) Предположим, что искомая линейчатая минимальная поверхность, составленная из "горизонтальных" геодезических, пересекает "плоскость" xOz . Выберем тогда в качестве направляющей семейства "горизонтальных" геодезических кривую $(c_5(t), 0, c_7(t))$, расположенную в плоскости xOz . Кроме того мы можем положить $c_3 = \cos t$ и тогда в силу того, что всегда $c_3^2 + c_4^2 = 1$ будем иметь $c_4 = \sin t$. Таким образом, можно искать линейчатую минимальную поверхность, составленную из семейства "горизонтальных" геодезических (4) в виде

$$r(s, t) = \left(s \cos t + c_5(t), s \sin t, \frac{s^2}{4} \sin 2t + s c_5(t) \sin t + c_7(t) \right)$$

Касательные векторы к ней имеют вид

$$r'_s = (\cos t, \sin t, (s \cos t + c_5) \sin t),$$

$$r'_t = (-s \sin t + c'_5, s \cos t, s \cos t(s \cos t + c_5) - A),$$

где $A = \frac{s^2}{2} - s(c_5)' \sin t - (c_7)'$. Вектор нормали (n^1, n^2, n^3) к поверхности имеет следующие координаты

$$\left(\frac{-A \sin t, A \cos t, A \cos t(s \cos t + c_5) + s - (c_5)' \sin t}{\sqrt{A^2 + (s - (c_5)' \sin t)^2}} \right).$$

Затем находим коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности

$$\bar{g}_{11} = \langle r'_s, r'_s \rangle = x_s^2 + y_s^2 + (z_s - xy_s)^2 = 1,$$

$$\bar{g}_{12} = \langle r'_s, r'_t \rangle = x_s x_t + y_s y_t + (z_s - xy_s)(z_t - xy_t) = (c_5)' \cos t.$$

Значение коэффициента g_{22} окажется несущественным и поэтому мы его не приводим. Коэффициенты второй фундаментальной формы поверхности мы находим по формулам [1, гл.5, с.119].

$$b_{ij} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha y_i^\mu y_j^\nu \right) n^\beta.$$

Вычисления дают следующие результаты:

$$b_{11} = 0,$$

$$b_{12} = \frac{\frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}(c_5')^2 \sin^2 t - (c_7)'}{\sqrt{A^2 + (s - (c_5)') \sin t)^2}},$$

$$b_{22} = \frac{A^2 c_5' \cos t + \frac{s^2}{2} c_5'' \sin t + s c_5' \cos t (s - c_5' \sin t) + s c_7'' + c_5'' c_7' \sin t - c_5' c_7'' \sin t}{\sqrt{A^2 + (s - c_5' \sin t)^2}}.$$

Условие минимальности $\bar{g}_{22} b_{11} - 2\bar{g}_{12} b_{12} + \bar{g}_{11} b_{22} = 0$ сводится к уравнению $0 = b_{22} - 2c_5' \cos t b_{12}$, которое в свою очередь приводится к виду

$$\begin{aligned} s^2 \left(\frac{c_5''}{2} \sin t + c_5' \cos t \right) + s (c_7'' - (c_5')^2 \sin t \cos t) + (c_5'' c_7' - c_5' c_7'') \sin t + \\ + \cos t \sin^2 t (c_5')^3 + 2c_5' c_7' \cos t = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, что коэффициенты при s^2 и s должны аннулироваться, что приводит к двум уравнениям

$$1) \frac{c_5''}{2} \sin t + c_5' \cos t = 0,$$

$$2) c_7'' - (c_5')^2 \sin t \cos t = 0.$$

Решениями этой системы уравнений являются функции

$$c_5(t) = -a_0 \operatorname{ctgt} + b_0, c_7(t) = \frac{a_0^2}{2} \operatorname{ctgt} + c_0 t + d_0,$$

где a_0, b_0, c_0, d_0 - произвольные действительные постоянные.

Легко проверить, что при подстановке найденных функций в уравнение (8) аннулируется также и свободный член (зависящий только от переменной t), откуда и следует указанная в формулировке теоремы параметризация 1) линейчатой минимальной поверхности, составленной из "горизонтальных" геодезических пересекающих "плоскость" xOz .

2) Предположим, теперь, что линейчатая минимальная поверхность, составленная из "горизонтальных" геодезических, не пересекает "плоскости" xOz . Тогда проекция любой "горизонтальной" геодезической на xOy будет прямой, параллельной оси Ox . Из (4) следует, что $c_4 = 0$ и уравнения произвольной "горизонтальной" геодезической таковы

$$x = c_3 s + c_5, y = c_6, z = c_7,$$

где c_3, c_5, c_6, c_7 - некоторые неизвестные функции, зависящие от параметра t , которые нужно подобрать таким образом, чтобы поверхность была минимальной. Мы можем также положить $c_5 = 0$, если расположим направляющую кривую поверхности в плоскости yOz .

Аналогичным образом находим:

$$\bar{g}_{11} = c_3^2, \bar{g}_{12} = c_3 c_3' s.$$

Мы не вычисляем g_{22} , потому что $b_{11} = 0$. Далее,

$$b_{12} = \frac{c_3 (c_6'^2 - (xc_6' - c_7)^2)}{2\sqrt{(c_7' - xc_6')^2 + c_6'^2}},$$

$$b_{22} = \frac{c_3' s (c_6'^2 - (xc_6' - c_7)^2) + c_7' c_6'' - c_7'' c_6'}{\sqrt{(c_7' - xc_6')^2 + c_6'^2}}.$$

Теперь нетрудно проверить, что условие минимальности линейчатой поверхности сводится к решению уравнения $c_7' c_6'' - c_7'' c_6' = 0$, откуда следует, что $c_7(t) = a_0 c_6(t) + b_0$, что и доказывает справедливость параметризации 2), указанной в формулировке теоремы.

Найдем теперь минимальные линейчатые поверхности, составленные из "вертикальных" геодезических (6).

Теорема 2 *Линейчатая минимальная поверхность, составленная из "вертикальных" геодезических, имеет вид*

$$r(s, t) = (s, a_0 s + b_0, t),$$

где a_0, b_0 - произвольные действительные постоянные.

Доказательство. Пусть искомая поверхность проектируется в кривую $(u(s), v(s), 0)$ плоскости xOy и имеет следующее параметрическое представление в $\mathbb{R}^3$:

$$r(s, t) = (u(s), v(s), t).$$

Коэффициенты первой и второй фундаментальных форм есть: $\bar{g}_{11} = u'^2 + v'^2 + u^2 v'^2$, $\bar{g}_{12} = -uv'$, $\bar{g}_{22} = 1$,

$$b_{11} = \frac{-u''v' + u'v'' + uv'(u'^2 + v'^2)}{\sqrt{u'^2 + v'^2}},$$

$$b_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{u'^2 + v'^2},$$

$$b_{22} = 0.$$

Следовательно, условие минимальности $\bar{g}_{11}b_{22} - 2\bar{g}_{12}b_{12} + \bar{g}_{22}b_{11} = 0$ приводит к уравнению

$$u''v' - u'v'' = 0,$$

решением которого является линейная функция $v = a_0u + b_0$, что и доказывает теорему.

Следствие 1 В Nil не существует вполне геодезической поверхности, составленной из "вертикальных" геодезических.

Для доказательства следует обратить внимание на коэффициент b_{12} , который всегда отличен от нуля для невырожденной кривой $(u(s), v(s))$ в плоскости xOy .

3. Несуществование вполне геодезических поверхностей в Nil.

Пусть поверхность в Nil задана в виде $(x, y, z(x, y))$. Касательные векторы к ней есть $(1, 0, z_x)$, $(0, 1, z_y)$ и нормаль

$$n = \frac{(-z_x, x - z_y, 1 + x^2 - xz_y)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}.$$

Вычисления, подобные проведенным в разделе 2, дают следующие выражения для коэффициентов первой и второй фундаментальных форм поверхности

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= 1 + z_x^2, \bar{g}_{12} = z_x(z_y - x), \bar{g}_{22} = 1 + (z_y - x)^2, \\ b_{11} &= \frac{-z_{xx} - z_x(z_y - x)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}, b_{12} = \frac{-z_{xy} - \frac{1}{2}(z_y - x)^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}, \\ b_{22} &= \frac{-z_{yy} + z_x(z_y - x)}{\sqrt{1 + z_x^2 + (z_y - x)^2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение минимальной поверхности в Nil, заданной над "плоскостью" xOy имеет вид

$$(1 + (z_y - x)^2)z_{xx} - 2z_x(z_y - x)z_{xy} + z_{yy}(1 + z_x^2) + z_x(z_y - x) = 0. \quad (10)$$

Замечание. Полученная в теореме 1 параметризация (2) линейчатой минимальной поверхности, составленной из "горизонтальных" геодезических, параллельных оси Ox , очевидно, может быть представлена в виде $z(x, y) = a_0y + b_0$ и нетрудно убедиться в том, что данная поверхность удовлетворяет уравнению (10). Если же положить $a_0 = b_0 = 0$ в формуле (7), то получается следующее решение уравнения (10): $z = \frac{1}{2}xy + c_0 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + d_0$

Теорема 3 В Nil не существует вполне геодезических поверхностей.

Доказательство. Сначала покажем, что не существует вполне геодезической поверхности, заданной в виде $(x, y, z(x, y))$. Если такая поверхность существует, то все коэффициенты b_{ij} ее второй фундаментальной формы должны обращаться в нуль в некоторой области плоскости xOy . Используя их выражения (9), получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} z_{xx} + z_x(z_y - x) = 0, \\ -z_{xy} - \frac{1}{2}(z_y - x)^2 + \frac{1}{2} + \frac{z_x^2}{2} = 0, \\ z_{yy} - z_x(z_y - x) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Сложив первое и третье уравнения, получим $z_{xx} + z_{yy} = 0$. Если продифференцировать первое уравнение по y , а второе по x и сложить, то получим $z_x(z_{xx} + z_{yy}) + z_y - x = 0$. Следовательно, должно выполняться уравнение $z_y = x$. Тогда из второго уравнения системы (11) получаем, что $\pm z_x = 1$, что несовместно с условием $z_y = x$. Полученное противоречие доказывает несуществование явно заданной над областью плоскости xOy вполне геодезической поверхности. В комбинации со следствием, доказанным в разделе 2, мы получаем доказательство несуществования вполне геодезической поверхности в Nil.

Замечание. Можно предложить иной способ доказательства теоремы 3, основанный на одной теореме, принадлежащей Риччи [4, гл.4, с.218]. Она утверждает, что нормали к вполне геодезической поверхности являются собственными векторами тензора Риччи объемлющего пространства. Остается проверить, что не существует вполне геодезической поверхности с данным нормальным полем.

4. $SO(2)$ -инвариантные минимальные поверхности в Nil.

Рассмотрим преобразования Nil вида $R_v(x, y, z) = (x \cos v - y \sin v, x \sin v + y \cos v, z + \frac{1}{2} \sin v(x^2 \cos v - y^2 \cos v - 2xy \sin v))$; $v \in [0, 2\pi)$ (см. [3, с.123]).

Утверждение 1 R_v образуют подгруппу в $Iso(Nil)$, изоморфную $SO(2)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что $R_{v_1} \circ R_{v_2} = R_{v_1+v_2}$, $(R_v)^{-1} = R_{-v}$, $R_0 = Id$. Отсюда следует, что данные преобразования составляют группу, изоморфную $SO(2)$ (или $U(1)$). Легко проверить, что R_v - изометрии.

Замечание. Поскольку $R_v(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, это подгруппа $Iso_e(Nil)$ - подгруппы изометрий Nil, оставляющих неподвижной единицу Nil.

Утверждение 2 Связная компонента единицы $Iso_e(Nil)$ совпадает с подгруппой, образованной R_v .

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{nil}$ группы Nil. Коммутатор (скобка Ли) в $\mathfrak{nil}$ имеет вид $[(p, q, t), (p', q', t')] = (0, 0, pq' - qp')$. Рассмотрим базис $X_1 = (1, 0, 0)$, $X_2 = (0, 1, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$ с единственным нетривиальным соотношением $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1] = X_3$. Левоинвариантная метрика

Nil индуцирует на $nil = T_e Nil$ декартово скалярное произведение f . Найдём группу $Aut(nil) \cap O(f)$. Тут $O(f) = O(3)$. Рассмотрим линейный оператор C на nil : $C(X_j) = C_j^i X_i$. Условие $C \in Aut(nil)$:

$$[C(X_1), C(X_2)] = C(X_3)$$

$$[C_1^i X_i, C_2^j X_j] = C_3^k X_k$$

$$(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1) X_3 = C_3^i X_i$$

Отсюда, $C_3^1 = C_3^2 = 0$, $C_3^3 = C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1$. Соотношения $[C(X_1), C(X_3)] = [C(X_2), C(X_3)] = 0$ тогда выполняются автоматически. Найдём для $C \in Aut(nil)$ условие ортогональности ($C \in O(3)$):

$$C_k^i C_j^k = \delta_j^i$$

$$(C_1^1)^2 + (C_2^1)^2 = (C_1^2)^2 + (C_2^2)^2 = (C_1^3)^2 + (C_2^3)^2 + (C_3^3)^2 = 1,$$

$$C_1^1 C_1^2 + C_2^1 C_2^2 = C_1^3 C_1^1 + C_2^3 C_2^1 = C_1^3 C_2^1 + C_2^3 C_1^2 = 0.$$

Введём переменные v_1 и v_2 : $C_1^1 = \cos v_1$, $C_2^1 = \sin v_1$, $C_1^2 = \sin v_2$, $C_2^2 = \cos v_2$. Тогда $0 = C_1^1 C_1^2 + C_2^1 C_2^2 = \cos v_1 \sin v_2 + \sin v_1 \cos v_2 = \sin(v_1 + v_2)$, $C_3^3 = C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1 = \cos v_1 \cos v_2 - \sin v_1 \sin v_2 = \cos(v_1 + v_2)$, и либо $v_1 + v_2 = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), тогда обозначив $v = v_2$, имеем $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cos v$, $C_1^2 = -C_2^1 = \sin v$, $C_3^3 = 1$, либо $v_1 + v_2 = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), и тогда обозначив $v = v_1$, имеем $\frac{1}{1} = -C_2^2 = \cos v$, $C_1^2 = C_2^1 = \sin v$, $C_3^3 = -1$. В любом случае, $(C_1^3)^2 + (C_2^3)^2 = 1 - (C_3^3)^2 = 0$, $C_1^3 = C_2^3 = 0$, и $Aut(nil) \cap O(3)$ образована операторами ви-

да $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ \sin v & -\cos v & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Как видим, она состоит

из двух связных компонент, и $(Aut(nil) \cap O(3))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ \sin v & -\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Согласно [2, теорема 0], $Iso_e(Nil)$ изоморфна $Aut(nil \cap O(3))$, при этом изометриям отвечают их дифференциалы в единице. Поскольку $dR_v|_e =$

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (Iso_e(Nil))_0 = \{R_v\}.$$

Замечание. Из доказательства предыдущего утверждения и [2, теорема 0] следует, что $Iso_e(Nil)$ изоморфна $O(2)$, и $Iso(Nil) = O(2) \cdot Nil$ - полупрямое произведение.

Рассмотрим в Nil поверхность, инвариантную относительно действия $\{R_v\}$ (поверхность вращения). Её можно задать кривой в плоскости $y=0$. Пусть $(x(u), 0, z(u))$ - такая кривая с натуральным параметром u : $(x'(u))^2 + (z'(u))^2 = 1$. Тогда возможна следующая параметризация поверхности:

$$r(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u) + \frac{1}{2} \sin v \cos v (x(u))^2). \quad (12)$$

Далее вместо $x(u), z(u)$ будем писать x, z соответственно. В [6] изучались поверхности вращения в Nil постоянной средней кривизны, не равной 0. Рассмотрим минимальные поверхности вращения.

Теорема 4 Минимальные поверхности вращения вида (12) в Nil задаются кривыми

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}},$$

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{(C - C^2)u^2 + \frac{4}{C} - 4}{Cu^2 + \frac{4}{C} - 4}} du,$$

где C - константа ($C \in (0, 1]$).

Доказательство. Коэффициенты первой фундаментальной формы поверхности следующие: $\bar{g}_{11} = 1, \bar{g}_{12} = -\frac{1}{2}z'x^2, \bar{g}_{22} = x^2 + \frac{1}{4}x^4$. Коэффициенты второй фундаментальной формы следующие:

$$b_{11} = \frac{1}{\Delta}(x''z' + \frac{1}{2}x(x')^2z' - z''x'),$$

$$b_{12} = \frac{1}{\Delta}(\frac{1}{2}x(z')^2 - \frac{1}{8}x^3(x')^2),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\Delta}(-xz' - \frac{1}{2}x^3z').$$

Средняя кривизна поверхности имеет вид:

$$H = \frac{1}{2\Delta^3}(x''z' - z''x')(1 + \frac{1}{4}x^2) - \frac{z'}{2\Delta^3x}.$$

Отсюда, условие минимальности представляет собой следующее дифференциальное уравнение:

$$(x''z' - z''x')(1 + \frac{1}{4}x^2) = \frac{z'}{x}.$$

Кроме того, по условию натуральности u , $(x')^2 + (z')^2 = 1$. Преобразуем и исключим z' :

$$x''x(1 + \frac{1}{4}x^2) = 1 - (x')^2.$$

Заменим $w(u) = \frac{1}{2}x^2(u)$:

$$(w'' - \frac{(w')^2}{2w})(1 + \frac{w}{2}) = 1 - \frac{(w')^2}{2w},$$

$$1 + \frac{(w')^2}{4} = C(1 + \frac{w}{2}),$$

где C - константа. Решая полученное уравнение с разделяющимися переменными, находим:

$$w = \frac{C}{2}u^2 - 2 + \frac{2}{C},$$

$$x(u) = \sqrt{Cu^2 - 4 + \frac{4}{C}}.$$

$$z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - (x')^2} du = \int_0^u \sqrt{\frac{(C - C^2)u^2 + \frac{4}{C} - 4}{Cu^2 + \frac{4}{C} - 4}} du.$$

Рассматривая области определения этих выражений, получаем, что $C \in (0, 1]$.

Замечание. Выражая u через x , можно найти явное задание профильной кривой:

$$z(x) = \pm \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{x^2 + 4}{Kx^2 - 4}} dx,$$

где $K = \frac{C}{1-C}$, $K \in (0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминов Ю.А. Геометрия подмногообразий. - К.: Наукова думка, 2002. - 468 с.
2. Горбацевич В.В. Об изометриях некоторых римановых групп Ли. // Известия РАН. Сер. математ., -2002. -66. - с. 27-46.
3. Скотт П. Геометрии на трехмерных многообразиях. - М.: Мир, 1989. -164 с.
4. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. - М.: изд. иностр. лит., 1948. -316 с.
5. Folland G.B. Harmonic analysis in phase space. - Princeton: Princeton univ. press, 1989. -IX,277 p.
6. Tomter P. Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group. // Proc. of Symp. pure math., -1993. -54,part 1. -P. 485-495.

Функциональные модели коммутативной системы
линейных операторов

В.А. Набока

Харьковский национальный университет, Украина

Построены функциональные модели для коммутативной системы линейных ограниченных операторов A_1, A_2 в случае, когда эта система операторов не содержит диссипативных операторов, то есть $A_1x_1 + A_2x_2$ не является диссипативным оператором для любых $x_1, x_2 \in R$, при этом $\dim G = 2$, где $G = \text{span}\{(A_k - A_k^*)h, k = 1, 2; h \in H\}$.

Mathematics Subject Classification 2000: 47A45

Введение

Функциональные модели сжимающих (диссипативных) операторов, которые впервые были построены Б.С. Надям и Ч. Фояшем [1], являются операторами умножения на независимую переменную в специальных пространствах функций. Построение этих моделей в диссипативном случае тесно связано с преобразованием Фурье. Для недиссипативных операторов построение аналогичных функциональных моделей основано на изучении преобразования Л. де Бранжа [2,3].

Для коммутативной системы линейных операторов A_1, A_2 построение функциональных моделей, когда оператор A_1 (например), диссипативен, также опирается на преобразование Фурье [4]. В том случае, когда коммутативная система операторов A_1, A_2 не содержит диссипативных операторов, такие функциональные модели построены не были. Данная работа как раз и посвящена изучению этого случая. А именно, в этой работе получены функциональные модели для произвольной коммутативной системы линейных операторов A_1, A_2 в случае, когда $\dim G = 2$, где $G = \text{span}\{(A_k - A_k^*)h; k = 1, 2, h \in H\}$.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейный ограниченный оператор A , действующий в гильбертовом пространстве H .

Напомним [5], что следующая совокупность

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, J), \quad (1.1)$$

называется **локальным узлом**, если выполнено соотношение

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi, \quad (1.2)$$

где E – некоторое гильбертово пространство, φ, J – операторы такие, что $\varphi: H \rightarrow E$, $J: E \rightarrow E$, причем $J = J^* = J^{-1}$.

Основным инструментом для изучения несамосопряженных операторов является характеристическая функция $S(\lambda)$ [5], которая имеет вид

$$S(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* J. \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай, когда $\dim E = 2$, а J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

причем спектр оператора A лежит на R . Тогда известно [5,6], что $S(\lambda)$ имеет следующее мультипликативное представление:

$$S(\lambda) = S_l(\lambda); \quad S_x(\lambda) = \int_0^x \exp \left\{ \frac{iJdF_t}{\lambda - \alpha_t} \right\}, \quad (1.5)$$

где α_x – вещественная, ограниченная, неубывающая на $[0; 1]$ функция, а F_t – матричнозначная (2×2) неубывающая функция такая, что $tr F_x = x$.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение для матрицы-функции $M_x(z)$:

$$(1 - \alpha_x z) M_x(z) + iz \int_0^x M_t(z) dF_t J = I, \quad (1.6)$$

где $x \in [0; l]$, $z \in C$. Нетрудно видеть, что $M_x(z)$ можно представить в виде

$$M_x(z) = JS_x^*(\bar{z}^{-1}) J, \quad (1.7)$$

где $S_x(z)$ – функция вида (1.5). Определим вектор-строку $L_x(z) = [A_x(z); B_x(z)]$ как решение интегрального уравнения

$$(1 - \alpha_x z) L_x(z) + iz \int_0^x L_t(z) dF_t J = (1; 0) = L_x(0), \quad (1.8)$$

причем $z \in C \setminus \Omega_\alpha$, где

$$\Omega_\alpha = \{y \in R : \exists x \in [0; l], y\alpha_x = 1\}. \quad (1.9)$$

Очевидно

$$L_x(z) = (1, 0)M_x(z) = (1, 0)JS_x^*(\bar{z}^{-1})J. \quad (1.10)$$

Рассмотрим пространство $L_{2,l}^2(F_t)$:

$$L_{2,l}^2(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in E^2; \int_0^l f(t) dF_t f^*(t) < \infty \right\}, \quad (1.11)$$

считая, что надлежащая факторизация по ядру метрики уже проведена. Нетрудно показать, что если определить функцию $E_x(z)$ и сопряженную к ней функцию $\tilde{E}_x(z)$

$$E_x(z) = A_x(z) - iB_x(z), \quad (1.12.1)$$

$$\tilde{E}_x(z) = A_x(z) + iB_x(z), \quad (1.12.2)$$

то имеет место следующая теорема [3].

Теорема 1.1. Вектор-функция $L_x(z) = [A_x(z); B_x(z)]$, являющаяся нетривиальным ($L_x(z) \neq (1, 0)$) решением интегрального уравнения (1.8) такова, что: 1) $L_t(z) \in L_{2,a}^2(F_t)$ для любого $a \in [0; l]$ и $z \in C \setminus \Omega_\alpha$; 2) для всех $z \in C \setminus \Omega_\alpha$ функции $E_x(z)$ (1.12.1) и $\tilde{E}_x(z)$ (1.12.2) не имеют корней в полуплоскостях $\{Imz > 0\}$ и $\{Imz < 0\}$ соответственно, причем выполнено:

$$|E_x(z)| - |\tilde{E}_x(z)| = \begin{cases} > 0, & Imz > 0 \\ = 0, & Imz = 0 \\ < 0, & Imz < 0 \end{cases}. \quad (1.12.3)$$

и $E_x(0) = \tilde{E}_x(0) = 1$ при всех $x \in [0; l]$.

Замечание 1.1. Аналогичным образом определяется вектор-функция $N_x(z) = [C_x(z); D_x(z)]$ как решение интегрального уравнения

$$(1 - \alpha_x z)N_x(z) + iz \int_0^x N_t(z) dF_t J = (0; 1) = N_x(0), \quad (1.13)$$

причем $z \in C \setminus \Omega_\alpha$, и

$$N_x(z) = (0; 1)M_x(z) = (0; 1)JS_x^*(\bar{z}^{-1})J. \quad (1.14)$$

Для функций $G_x(z)$ и $\tilde{G}_x(z)$, которые имеют вид

$$G_x(z) = C_x(z) - iD_x(z), \quad (1.15.1)$$

$$\tilde{G}_x(z) = C_x(z) + iD_x(z) \quad (1.15.2)$$

будет также справедлив аналог теоремы 1.1.

Рассмотрим пару голоморфных при $z \in C \setminus \Omega_\alpha$ функций $A(z)$ и $B(z)$ такую, что для функции $E(z)$ и сопряженной к ней функции $\tilde{E}(z)$ выполнено

соотношение (1.12.3). Ассоциируем с такой парой функций гильбертово пространство $B(A(z), B(z))$ [3].

Определение 1.1. Пространством Л. де Бранжа $B(A(z), B(z))$ называется линейное многообразие голоморфных функций $F(z)$ при $z \in C \setminus \Omega_\alpha$ таких, что:

- А) $\frac{F(z)}{E(z)} \left(\frac{F(z)}{\bar{E}(z)} \right)$ является функцией ограниченного вида неположительного среднего типа [3] в верхней полуплоскости ($\{Im z > 0\}$) (нижней ($\{Im z < 0\}$)) полуплоскости;
- Б) имеет место:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(t)}{E(t)} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(t)}{\bar{E}(t)} \right|^2 dt < \infty. \quad (1.16)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. (Л. де Бранжа) [2]. Рассмотрим семейство гильбертовых пространств Л. де Бранжа $B(A_x(z), B_x(z))$, где вектор-строка $L_x(z) = [A_x(z); B_x(z)]$ является решением интегрального уравнения (1.8) на интервале $[0, l]$ для некоторой матричнозначной меры F_t . Сопоставим каждой строке $h(t) = [f(t); g(t)] \in L_{2,l}^2(F_t)$ функцию

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^a h(t) dF_t L_t^*(\bar{z}), \quad (1.17)$$

где a внутренняя точка интервала $[0, l]$, $0 < a < l$. Тогда $F(z) \in B(A_a(z), B_a(z))$, причем справедливо "равенство Парсеваля"

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(t)|^2}{|E(t)|^2} dt = \int_0^a [f(t); g(t)] dF_t \begin{bmatrix} \overline{f(t)} \\ \overline{g(t)} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Для любой функции $G(z) \in B(A_a(z), B_a(z))$ существует вектор-функция $\xi(t) = [\varphi(t); \phi(t)] \in L_{2,l}^2(F_t)$ с носителем на $[0, a]$ такая, что для $G(z)$ имеет место представление (1.17).

Определение 1.2. Преобразование $F(z)$ (1.17) функции $h(t) \in L_{2,l}^2(F_t)$ будем называть преобразованием Л. де Бранжа по мере F_t функции $h(t)$. Аналогичным образом рассмотрим пространство Л. де Бранжа $B(C(z), D(z))$, построенного по паре голоморфных при $z \in C \setminus \Omega_\alpha$, функций $C(z)$ и $D(z)$, для которых функции $G(z)$ и $\bar{G}(z)$ имеют вид (1.15.1) и (1.15.2) соответственно. Преобразование Л. де Бранжа функции $h(t) \in L_{2,l}^2(F_t)$ в пространстве $\Phi(z) \in B(C(z), D(z))$ имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^a h(t) dF_t N_t^*(\bar{z}), \quad (1.19)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Phi(t)}{G(t)} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Phi(t)}{\tilde{G}(t)} \right|^2 dt < \infty. \quad (1.20)$$

Пространства $B(A(z), B(z))$ и $B(C(z), D(z))$ изоморфны, так как существует изоморфизм $\varphi : B(A(z), B(z)) \rightarrow B(C(z), D(z))$, задаваемый следующим образом:

$$(\varphi F)(z) = \frac{G(z)}{E(z)} F(z) = \Phi(z) \quad (Imz > 0), \quad (1.21)$$

$$(\varphi F)(z) = \frac{\tilde{G}(z)}{\tilde{E}(z)} F(z) = \Phi(z) \quad (Imz < 0). \quad (1.21.1)$$

где $F(z) \in B(A(z), B(z))$, а $\Phi(z) \in B(C(z), D(z))$, причем

$$\|F(z)\|_{B(A(z), B(z))}^2 = \|\Phi(z)\|_{B(C(z), D(z))}^2,$$

так как

$$\begin{aligned} \|F(z)\|_{B(A(z), B(z))}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(t)}{E(t)} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Phi(t)}{G(t)} \right|^2 dt = \\ &= \|\Phi(z)\|_{B(C(z), D(z))}^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим изоморфизм $\psi = \varphi^{-1}$, который действует следующим образом:

$$(\psi \Phi)(z) = \frac{E(z)}{G(z)} \Phi(z) = \hat{F}(z) \quad (Imz > 0) \quad (1.22)$$

$$(\psi \Phi)(z) = \frac{\tilde{E}(z)}{\tilde{G}(z)} \Phi(z) = \hat{F}(z) \quad (Imz < 0), \quad (1.22.1)$$

где $\hat{F}(z) \in B(A(z), B(z))$.

Таким образом, по теореме 1.2 существует вектор-функция $\hat{h}(t) = [\hat{f}(t); \hat{g}(t)] \in L_{2,t}^2(F_t)$ с носителем на $[0, a]$ такая, что для функции $\hat{F}(z)$ имеет место представление (1.17), т.е.

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \hat{h}(t) dF_t L_t^*(\bar{z}). \quad (1.23)$$

Определение 1.3. Функцию $\hat{h}(t) = [\hat{f}(t); \hat{g}(t)] \in L_{2,t}^2(F_t)$ назовем двойственной функцией к функции $h(t) = [f(t); g(t)] \in L_{2,t}^2(F_t)$.

2. Треугольные модели пары операторов

Рассмотрим коммутативную систему линейных ограниченных операторов $\{A_1, A_2\}$, действующих в гильбертовом пространстве H , то есть для A_1, A_2 выполнено соотношение

$$[A_1, A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 = 0. \quad (2.1)$$

Как известно [4], совокупность

$$\Delta = (A_1, A_2, H, \varphi, E, \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \tilde{\gamma}), \quad (2.2)$$

где E — некоторое гильбертово пространство, $\varphi, \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \tilde{\gamma}$ — операторы такие, что $\varphi: H \rightarrow E, \sigma_1: E \rightarrow E, \sigma_2: E \rightarrow E, \gamma: E \rightarrow E, \tilde{\gamma}: E \rightarrow E$, причем $\sigma_k = \sigma_k^*, k = 1, 2, \gamma = \gamma^*, \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}^*$, называется **коммутативным узлом**, если выполнены соотношения:

1. $A_k - A_k^* = i\varphi^* \sigma_k \varphi, k = 1, 2;$
2. $\gamma \varphi = \sigma_1 \varphi A_2^* - \sigma_2 \varphi A_1^* (\tilde{\gamma} \varphi = \sigma_1 \varphi A_2 - \sigma_2 \varphi A_1);$
3. $\tilde{\gamma} - \gamma = i(\sigma_1 \varphi \varphi^* \sigma_2 - \sigma_2 \varphi \varphi^* \sigma_1).$

Определение 2.1. Матрица-функция $S(\lambda_1)$, которая имеет вид

$$S(\lambda_1) = I - i\varphi(A_1 - \lambda_1 I)^{-1} \varphi^* \sigma_1 \quad (2.4)$$

называется характеристической функцией узла (2.2), отвечающей оператору A_1 . Причем, в случае, если $\dim E = 2$, и когда спектр оператора A_1 вещественен, то для $S(\lambda_1)$ [5] имеет место мультипликативное представление (1.5).

Пусть $\sigma_1 = J$, где J (1.4) и $\sigma_2 = \sigma$, тогда для данной функции выполнено условие сплетаемости [4]

$$(\sigma \lambda_1 + \gamma) J S(\lambda_1) = S(\lambda_1) (\sigma \lambda_1 + \tilde{\gamma}) J. \quad (2.5)$$

Предположим, что $dF_x = a_x dx$, где матрица a_x такая, что $a_x \geq 0, \text{tr} a_x = 1$, и пусть a_x имеет вид

$$a_x = \begin{pmatrix} \beta_x & \delta_x \\ \bar{\delta}_x & 1 - \beta_x \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

тогда справедлива теорема [4].

Теорема 2.1. Для того чтобы для матрицы-функции $S_x(\lambda)$ выполнялись условия сплетаемости

$$(\sigma \lambda + \gamma_x) J S_x(\lambda) = S_x(\lambda) (\sigma \lambda + \tilde{\gamma}) J, \quad (2.7)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \frac{d}{dx} \gamma_x J = i[J a_x, \sigma J]; \quad \gamma_0 = \tilde{\gamma}, \quad (2.8)$$

причем

$$2) [Ja_x, (\sigma\alpha_x + \gamma_x)J] = 0. \quad (2.9)$$

Изучим теперь, какой вид будет иметь a_x , если учесть условия теоремы 2.1, в случае, когда

$$\sigma_1 = J, \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & ik \\ -ik & a \end{pmatrix}, \quad \gamma_x = \begin{pmatrix} m_x & p_x \\ p_x & -m_x \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Из уравнения $\gamma'_x J = i(Ja_x \sigma J - \sigma a_x)$ следует, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m'_x & p'_x \\ p'_x & -m'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} &= i \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x & \delta_x \\ \bar{\delta}_x & 1 - \beta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ik \\ -ik & a \end{pmatrix} \times \right. \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \left. \begin{pmatrix} a & ik \\ -ik & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_x & \delta_x \\ \bar{\delta}_x & 1 - \beta_x \end{pmatrix} \right], \quad \gamma(0) = \tilde{\gamma}, \\ \begin{pmatrix} -ip'_x & im'_x \\ im'_x & ip'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} &= i \left[\begin{pmatrix} ik\bar{\delta}_x + a(1 - \beta_x) & a\delta_x + ik(1 - \beta_x) \\ -ik\beta_x - a\delta_x & a\beta_x - ik\delta_x \end{pmatrix} - \right. \\ &- \left. \begin{pmatrix} a\beta_x + ik\bar{\delta}_x & a\delta_x + ik(1 - \beta_x) \\ -ik\beta_x + a\bar{\delta}_x & -ik\delta_x + a(1 - \beta_x) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

при $\gamma(0) = \tilde{\gamma}$. Тогда мы получим уравнения:

$$\begin{cases} p'_x = a(2\beta_x - 1), & p_0 = \tilde{p} \\ m'_x = -2a\text{Re}\delta_x, & m_0 = \tilde{m} \end{cases}$$

Из 1) (2.9) следует, что

$$\begin{cases} p_x = p_0 + 2a \int_0^x \beta_\tau d\tau - a \\ m_x = m_0 - 2a \int_0^x \text{Re}\delta_\tau d\tau, \end{cases} \quad (2.11)$$

а из 2) (2.9) вытекает, что

$$\alpha_x Ja_x \sigma + Ja_x \gamma_x J - \alpha_x \sigma Ja_x - \gamma_x a_x = 0,$$

$$\begin{aligned} &\alpha_x \begin{pmatrix} ia\bar{\delta}_x + k(1 - \beta_x) & -k\bar{\delta}_x + ia(1 - \beta_x) \\ -ia\beta_x - k\delta_x & k\beta_x - ia\delta_x \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} p_x \bar{\delta}_x - m_x(1 - \beta_x) & -m_x \bar{\delta}_x - p_x(1 - \beta_x) \\ -p_x \beta_x + m_x \delta_x & m_x \beta_x + p_x \delta_x \end{pmatrix} - \end{aligned}$$

(2.9)

емы

(2.10)

$$-\alpha_x \begin{pmatrix} k\beta_x + ia\bar{\delta} & k\delta_x + ia(1 - \beta_x) \\ -ia\beta_x + k\bar{\delta}_x & -ia\delta_x + k(1 - \beta_x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_x\beta_x + p_x\bar{\delta}_x & m_x\delta_x + p_x(1 - \beta_x) \\ p_x\beta_x - m_x\bar{\delta}_x & p_x\delta_x - m_x(1 - \beta_x) \end{pmatrix} = 0.$$

После элементарных вычислений получим

$$\begin{cases} m_x = k\alpha_x(1 - 2\beta_x); \\ 2m_x - k_x = \frac{p_x(1 - \beta_x)}{Re\delta_x}. \end{cases}$$

×

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. Для того чтобы для $S_x(\lambda)$ выполнялись условия сплетаемости (2.7), где J (1.4), а σ, γ_x (2.10), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.11), причем

$$\begin{cases} m_x = k\alpha_x(1 - 2\beta_x); \\ 2m_x - k_x = \frac{p_x(1 - \beta_x)}{Re\delta_x} \end{cases} \quad (2.12)$$

Рассмотрим кривую Q , которая имеет вид [4]

$$Q = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2, Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0\}, \quad (2.13)$$

где $Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ полином

$$Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = \det[\sigma\lambda_1 - J\lambda_2 + \gamma]. \quad (2.14)$$

(2.11)

Пусть кривая Q (2.13) является неособой (то есть комплексный вектор градиента $\text{grad}Q = (\partial Q_{1,2}/\partial \lambda_1, \partial Q_{1,2}/\partial \lambda_2)$ отличен от нуля для всех $\lambda \in Q$). Следовательно, многочлен $Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ (2.14) — неприводим, т.е. корни полинома $Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ различны, исключая точки ветвления, более того, $\lambda_2^k(\lambda_1)$ — суть ветви двузначной алгебраической функции. Таким образом, $Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2)$ определяет двузначную функцию $\lambda_2(\lambda_1)$, римановой поверхностью, которой является $Q_{1,2}(\lambda_1, \lambda_2) = 0$. Это же соотношение задает риманову поверхность l -значной алгебраической функции $\lambda_1(\lambda_2)$ (где $l = \text{rank}\sigma$, $0 \leq l \leq 2$), и учитывая l -значность $\lambda_1 = \lambda_1(P)$ и двузначность $\lambda_2 = \lambda_2(P)$, где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in Q$, получаем, что $\lambda_1(P)$ имеет 2 полюса, а $\lambda_2(P)$ — l полюсов с учетом их кратности, ($0 \leq l \leq 2$).

Пусть $h(P)$ [4] (где $P = (\lambda_1, \lambda_2) \in Q$) — собственный вектор линейного пучка

$$(\sigma\lambda_1 - J\lambda_2 + \gamma)h(P) = 0, \quad (2.15)$$

который мы нормируем условием $h_2(P) = 1$, где $h_2(P)$ — "2-ая" компонента $h(P)$. Очевидно, что $h(P)$ — рациональная вектор-функция на Q (2.13), причем

количество полюсов $h(P)$ (с учетом кратности) равно $N = 2 + g - l$, где g — род поверхности Q (2.13).

Определим на римановой поверхности Q (2.13) правильные аналоги полуплоскостей $C_{\pm}$ и вещественной оси R следующим образом:

$$Q_{\pm} = \{P \in Q; \pm \operatorname{Im} \lambda_1(P) > 0\}, \quad Q_0 = \partial Q_{\pm}. \quad (2.16)$$

Назовем Q_0 разрезом поверхности Q (2.13). Заметим, что особенности $h(P)$ (2.15) лежат на Q_0 (2.16).

Каждую из вектор-функций $f(\lambda_1) \in L^2(R, E)$, $\lambda_1 \in R$, разложим по ортогональному базису собственных векторов $h(P_k)$ (2.15)

$$f(\lambda_1) = \sum_k h(P_k) \|h(P_k)\|^{-2} \varphi(P_k), \quad (2.17)$$

где $P_k = (\lambda, \lambda_2^k(\lambda_1)) \in Q_0$, $k = 1, 2$, а скалярные функции $\varphi(P_k)$ имеют вид

$$\varphi(P_k) = \langle f(\lambda_1), h(P_k) \rangle. \quad (2.18)$$

Определим гильбертово пространство [4]

$$L^2(h, d\lambda_1) = \left\{ f(P) = h(P) \|h(P)\|^{-2} \varphi(P); \int_{Q_0} \|f(P)\|^2 d\lambda_1 \right\}, \quad (2.19)$$

где $h(P)$ — собственный вектор пучка (2.15), $P \in Q$ (2.13) $\varphi(P)$ — скалярная, измеримая на Q_0 (2.16) функция, имеющая такие же особенности, что и $h(P)$ (с учетом кратности), причем

$$\int_{Q_0} |\varphi(P)|^2 \frac{d\lambda_1}{\|h(P)\|^2} < \infty. \quad (2.20)$$

3. Функциональные модели пары операторов

Зададим в $L^2_{2,l}(F_t)$ (1.11) треугольную модельную систему коммутативных операторов $\{A_1 A_2\}$, действующих в $L^2_{2,l}(F_t)$ следующим образом [4]:

$$A_1 f_x = \alpha_x f_x + i \int_0^x f_t dF_t J \quad (3.1)$$

$$A_2 f_x = f_x J (\alpha_x \sigma + \gamma_x) + i \int_0^x f_t dF_t \sigma. \quad (3.2)$$

где $f_x = [f_1(x), f_2(x)] \in L_{2,l}^2(F_t)$, $k = 1, 2$, γ_x удовлетворяет условиям (2.8), (2.9) теоремы 2.1, и пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}, \quad \gamma_x = \begin{pmatrix} m_x & p_x \\ \bar{p}_x & q_x \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

В данном случае кривая Q (2.13) имеет следующий вид:

$$\det \left[\begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ \bar{b}\lambda_1 & a\lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i\lambda_2 \\ -i\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & p \\ \bar{p} & q \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Пусть $c = a$, $q = -m$, тогда

$$a^2\lambda_1^2 - m^2 - (p + b\lambda_1 - i\lambda_2)(\bar{p} + \bar{b}\lambda_1 + i\lambda_2) = 0,$$

положим $p = \bar{p}$, $b = ik$, тогда

$$a^2\lambda_1^2 - m^2 - p^2 - (\lambda_2 - k\lambda_1)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$a^2\lambda_1^2 - (\lambda_2 - k\lambda_1)^2 = m^2 + p^2, \quad (3.5)$$

где $a > 0$.

Пусть

$$w = \lambda_2 - k\lambda_1, \quad (3.6)$$

тогда равенство (3.5) перепишем следующим образом:

$$a^2\lambda_1^2 - w^2 = m^2 + p^2. \quad (3.7)$$

Таким образом, кривая Q (2.13) в случае (3.3) имеет вид (3.7), причем точками ветвления будут $w = \pm i\sqrt{m^2 + p^2}$. Кривая Q (3.7) — двулистная Риманова поверхность, полученная из двух w листов C , склеенных крест-накрест вдоль разрезов $(-i\infty; -i\sqrt{m^2 + p^2}] \cup [i\sqrt{m^2 + p^2}; i\infty)$, так как $Im\lambda_1 = \frac{1}{a}Im\sqrt{w^2 + m^2 + p^2}$ меняет знак на разрезах, то Q_+ , Q_- — первый и второй из листов Q (3.7), Q_0 — разрезы (аналог R , т.е. где $Im\lambda_1 = 0$).

Перепишем (3.7) в следующем виде: $\frac{a^2}{m^2 + p^2}\lambda_1^2 - \frac{1}{m^2 + p^2}w^2 = 1$. Пусть $\vartheta = \sqrt{m^2 + p^2}$, тогда

$$\left(\frac{a}{\vartheta}\right)^2\lambda_1^2 - \frac{1}{\vartheta^2}w^2 = 1. \quad (3.8)$$

Пусть $\lambda_1 = \frac{\vartheta}{a}ch\theta$, $w = \vartheta sh\theta$, где $\theta \in \Gamma$,

$$\Gamma = \{\theta \in C : Im\theta \in [-\pi; \pi]\}, \quad (3.9)$$

тогда кривая Q (3.7) может быть параметризована функциями $\lambda_1(\theta)$ и $w(\theta)$ следующим образом:

$$Q: \begin{cases} \lambda_1(\theta) = \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{a} ch\theta \\ w(\theta) = \sqrt{m^2 + p^2} sh\theta, \end{cases} \quad (3.10)$$

где $\theta \in \Gamma$ (3.9).

Замечание 3.1. Пусть $\theta = \xi + i\eta$, т.е. $\xi = Re\theta$, $\eta = Im\theta$, тогда

$$\begin{aligned} Im\lambda_1 &= Im \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{a} ch\theta = \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{a} Imch\theta, \\ Im\lambda_1 &= \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{a} sh(Re\theta) \sin(Im\theta), \end{aligned} \quad (3.11)$$

следовательно, $\Gamma_{\pm}$, Γ_0 имеют вид

$$\Gamma_{\pm} = \{\theta \in \Gamma, \pm Im\theta > 0\}, \quad \Gamma_0 = \{\theta \in \Gamma, Im\theta = 0\}. \quad (3.12)$$

Найдем собственные вектора пучка (2.15). Пусть $h = (g, 1)$, тогда

$$g(a\lambda_1 + m) + p - i(\lambda_2 - k\lambda_1) = 0 \quad \left(g(p + i(\lambda_2 - k\lambda_1)) + a\lambda_1 - m = 0 \right),$$

учитывая замену (3.5), получим $g(a\lambda_1 + m) = iw - p$ ($g(p + iw) = m - a\lambda_1$), то есть

$$g = \frac{iw - p}{a\lambda_1 + m} \quad \left(g = \frac{m - a\lambda_1}{p + iw} \right).$$

Используя параметризацию (3.10), получим, что

$$g = \frac{i\sqrt{m^2 + p^2} sh\theta - p}{\sqrt{m^2 + p^2} ch\theta + m} \quad \left(g = \frac{m - \sqrt{m^2 + p^2} ch\theta}{p + i\sqrt{m^2 + p^2} sh\theta} \right). \quad (3.13)$$

Таким образом, собственные вектора пучка (2.15) имеют вид

$$h(\lambda_1, w) = \left(\frac{iw - p}{a\lambda_1 + m}; 1 \right) = \left(\frac{i\sqrt{m^2 + p^2} sh\theta - p}{\sqrt{m^2 + p^2} ch\theta + m}; 1 \right). \quad (3.14)$$

Найдем $\|h(\lambda_1, w)\|^2$ и $\|h(\theta)\|^2$:

$$\|h(\lambda_1, w)\|^2 = \langle h(\lambda_1, w), h(\lambda_1, w) \rangle = \frac{2(p^2 + m^2 + am\lambda_1 - ipw)}{(a\lambda_1 + m)^2} \quad (3.15)$$

$$\|h(\lambda_1, w)\|^2 = \frac{2(p^2 + m^2 + am\lambda_1 - ipw)}{(a\lambda_1 + m)^2}$$

3.10) $w(\theta)$

$$\|h(\theta)\|^2 = \langle h(\theta), h(\theta) \rangle = 2\vartheta \frac{\vartheta + mch\theta - ipsh\theta}{(\vartheta ch\theta + m)^2}.$$

Учитывая $\vartheta = \sqrt{m^2 + p^2}$, получим

$$\|h(\theta)\|^2 = 2\sqrt{m^2 + p^2} \frac{\sqrt{m^2 + p^2} + mch\theta - ipsh\theta}{(\sqrt{m^2 + p^2}ch\theta + m)^2}. \quad (3.15.1)$$

Как ранее было показано, каждую из вектор-функций $f(\lambda_1) \in L^2(R, E)$, $\lambda_1 \in R$ разложим по ортогональному базису собственных векторов $h(\lambda_1, w)$ (3.14), то есть $f(\lambda_1,)$ представима в виде (2.17) и, следовательно, имеет вид

3.11) $f(\lambda_1)$

$$f(\lambda_1) = 2(a\lambda_1 + m) \sum_k \frac{h(P_k)\varphi(P_k)}{p^2 + m^2 + am\lambda_1 - ipw_k}, \quad (3.16)$$

3.12) $\varphi(P_k)$

где $P_k = (\lambda_1, w_k(\lambda_1)) \in Q_0$, $k = 1, 2$, а скалярные, измеримые на Q_0 функции $\varphi(P_k)$ имеют вид (2.18), причем для них выполнено соотношение (2.20).

Замечание 3.2. Если $f(\lambda_1) = (f_1(\lambda_1), f_2(\lambda_1))$, то

$$\varphi(P_k) = f_1(\lambda_1) \frac{iw_k - p}{a\lambda_1 + m} + f_2(\lambda_1). \quad (3.17)$$

Гильбертово пространство $L^2(h, d\lambda_1)$ (2.19) будет иметь следующий вид:

$a\lambda_1$,

$$L^2(h, d\lambda_1) = \left\{ f(\theta) = h(\theta) \|h(\theta)\|^{-2} \varphi(\theta); \right.$$

$$\left. \int_0^\infty \frac{(\sqrt{m^2 + p^2}ch\theta + m)^2 sh\theta}{\sqrt{m^2 + p^2} + mch\theta - ipsh\theta} |\varphi(\theta)|^2 d\theta < \infty \right\}, \quad (3.18)$$

3.13) $a\lambda_1$,

где $h(\theta)$ – собственный вектор пучка (2.15), $\theta \in \Gamma$ (3.9), $\varphi(\theta)$ – скалярная, измеримая на Γ_0 (3.13) функция, причем $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$.

Рассмотрим, во что переходит действие каждого из операторов A_1 (3.1) и A_2 (3.2) при преобразовании Л. де Бранжа (1.17)

3.14) $a\lambda_1$,

$$\pi A_1 f_t = \int_0^l \left(\alpha_t f_t + i \int_t^l f_s dF_s J \right) dF_t L_t^*(\bar{z}) = \int_0^l f_t dF_t \frac{L_t^*(\bar{z}) - L_t^*(0)}{z} =$$

3.15) $a\lambda_1$,

$$= \pi \frac{F(z) - F(0)}{z},$$

то есть

$$A_1 F(z) = \pi \frac{F(z) - F(0)}{z}; \quad F(z) \in B(A_l(z), B_l(z)). \quad (3.19)$$

Вычислим $\pi A_2 f_t$

$$\begin{aligned}
 \pi A_2 f_t &= \int_0^l (A_2 f_t) dF_t L_t^*(\bar{z}) = \int_0^l f_t dF_t (A_2^* L(z))^* = \\
 &= \int_0^l f_t dF_t \left(\alpha_t L_t(z) J \sigma + L_t(z) J \gamma_t - i \int_0^t L_s(z) dF_s J J \sigma \right)^* = \\
 &= \int_0^l f_t dF_t \left(\frac{L_t(z) - L_t(0)}{z} J \sigma + L_t(z) J \gamma_t \right)^* = \\
 &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (L_t(z) J \sigma - L_t(0) J \sigma + L_t(z) J \gamma_t z)^* = \\
 &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (L_t(z) J (\sigma + \gamma_t z) - L_t(0) J \sigma)^*
 \end{aligned}$$

в силу уравнения (1.8).

Замечание 3.3. Очевидно, что

$$L_t(0) J \sigma = L_t(z) (\sigma + \gamma_t z)|_{z=0}. \quad (3.20)$$

Замечание 3.4. Пусть для γ_x выполнены условия (2.11) и (2.12), тогда по теореме 2.2 функция $S_x(\lambda)$ удовлетворяет условию сплетаемости (2.7)

$$(\sigma \lambda + \gamma_x) J S_x(\lambda) = S_x(\lambda) (\sigma \lambda + \tilde{\gamma}) J, \quad (2.7)$$

где $\tilde{\gamma} = \gamma_0$. Перепишем данное условие, положив $\lambda = \frac{1}{z}$:

$$(\sigma + \gamma_x z) J S_x(z^{-1}) = S_x(z^{-1}) (\sigma + \tilde{\gamma} z) J. \quad (3.21)$$

Таким образом, учитывая представление для $L_x(z)$ (1.9) и условие сплетаемости (3.21), получим

$$\begin{aligned}
 L_x(z) J (\sigma + \gamma_x z) &= (1, 0) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J J (\sigma + \gamma_x z) J = (1, 0) J (\sigma + \tilde{\gamma} z) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J \\
 L_x(z) J (\sigma + \gamma_x z) &= (1, 0) J (\sigma + \tilde{\gamma} z) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J.
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Замечание 3.5. Пусть

$$(1, 0) J (\sigma + \tilde{\gamma} z) = \xi(z) (1, 0) + \eta(z) (0, 1), \quad (3.23)$$

тогда $(1, 0) J (\sigma + \tilde{\gamma} z) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J = \xi(z) (1, 0) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J$, и учитывая представления (1.10) и (1.14) функций $L_x(z)$ и $N_x(z)$, получим

$$(1, 0) J (\sigma + \tilde{\gamma} z) J S_x^*(\bar{z}^{-1}) J = \xi(z) (1, 0) L_x^*(\bar{z}) + \eta(z) (0, 1) N_x^*(\bar{z}). \quad (3.24)$$

Функции $\xi(z)$ и $\eta(z)$ в случае (3.3) имеют вид

$$\xi(z) = k + ip_0 z \quad (3.25.1)$$

$$\eta(z) = i(a - m_0 z) \quad (3.25.2)$$

Следовательно, учитывая замечания 3.3 – 3.5, получим

$$\begin{aligned} \pi A_2 f_t &= \int_0^1 \left(f_t J(\alpha \sigma + \gamma_t) + i \int_l^t f_s dF_s \sigma \right) dF_t L_t^*(\bar{z}) = \\ &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (L_t(z) \xi(z) + N_t(z) \eta(z) - L_t(0) \xi(0) - N_t(z) \eta(z))^*. \end{aligned}$$

Замечание 3.6. Учитывая соотношения (1.17) и (1.19), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (L_t(z) \xi(z) - L_t(0) \xi(0))^* &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (\xi(\bar{z}) L_t^*(\bar{z}) - \xi(0) L_t^*(0)) = \\ &= \frac{1}{z} ((k - ip_0 z) F(z) - k F(0)) = k \frac{F(z) - F(0)}{z} - ip_0 F(z). \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (L_t(z) \xi(z) - L_t(0) \xi(0))^* = k \frac{F(z) - F(0)}{z} - ip_0 F(z). \quad (3.26)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (N_t(z) \eta(z) - N_t(0) \eta(0))^* &= \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (\eta(\bar{z}) N_t^*(\bar{z}) - \eta(0) N_t^*(0)) = \\ &= \frac{1}{z} (i(m_0 z - a) \Phi(z) + ia \Phi(0)) = -ia \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{z} + im_0 \Phi(z). \end{aligned}$$

Используя представление (1.22), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^l f_t dF_t (N_t(z) \eta(z) - N_t(0) \eta(0))^* &= \\ &= -ia \frac{\frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z) - \frac{G(0)}{E(0)} \hat{F}(0)}{z} + im_0 \frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z). \end{aligned} \quad (3.26.1)$$

Следовательно,

$$\pi A_2 f_1 = \int_0^l \left(f_t J(\alpha_t \sigma + \gamma_t) + i \int_t^l f_s dF_s \sigma \right) dF_t (L_t^*(\bar{z})) = k \frac{F(z) - F(0)}{z} - ip_0 F(z) - \\ - ia \frac{\frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z) - \frac{G(0)}{E(0)} F(0)}{z} + im_0 \frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z).$$

Действие оператора A_2 (3.2) после преобразования Л. де Бранжа (1.17) будет иметь вид

$$A_2 F(z) = k \frac{F(z) - F(0)}{z} - ip_0 F(z) - \\ - ia \frac{\frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z) - \frac{G(0)}{E(0)} F(0)}{z} + im_0 \frac{G(z)}{E(z)} \hat{F}(z), \quad (3.27)$$

где $F(z) \in B(A(z), B(z))$, причем $A_2 F(z) \in B(A(z), B(z))$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 Пусть A_1 (3.1) и (3.2) – модельные операторы, действующие в пространстве $L_{2,l}^2(F_t)$, причем J (1.4), σ и γ_x имеют вид (3.3). Предположим, что $F(z) \in B(A(z), B(z))$, является преобразованием Л. де Бранжа (1.17) функции $h(t)$ из пространства $L_{2,l}^2(F_t)$, а $\hat{F}(t)$ является преобразованием Л. де Бранжа (1.23) для двойственной $\hat{h}(t)$ функции (в смысле определения 1.4) к $h(t)$. Тогда после преобразованием Л. де Бранжа (1.17) коммутативная система операторов A_1, A_2 имеет вид (3.19) и (3.27) соответственно и действует в пространстве $B(A(z), B(z))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Секефальви-Надь Б., Фояш. Гармонический анализ в гильбертовом пространстве. – М. – 1970. – 431 с.
2. L. De Branges. Hilbert spaces of entire function. – London. – 1968. – 326 с.
3. Золотарев В.А. Пространства Л. де Бранжа и функциональные модели недиссипативных операторов // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9, 4. – С. 622 - 641.
4. Золотарев В.А. Временные кривые и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. – 1990. – Т. 181, 7. С. 965-994.
5. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах // Харьков. – 1971. – 160 с.
6. Поталов В.П. Мультипликативная структура J-нерастягивающейся матрицы-функции // Труды Моск. мат. Об-ва. – 1955, 4. – С. 125-236.