Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

И.Е. Тарапов, И.И. Иевлев

НЕРАВНОВЕСНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К МЕХАНИКЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ СРЕД

Учебное пособие
Изд. 2-е

Харьков – 2013

УДК 530.145:536.24

Рецензенты: – д.т.н., проф. Янютин Е.Г., Харьковский национальный автодорожный университет;
Кизилова Н.Н. – к.ф.-м.н., доц. каф. теоретической и прикладной механики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина.

Изложены основные положения неравновесной термодинамики для модели многокомпонентной газообразной среды. Методами неравновесной термодинамики получена основная система уравнений для изотропной намагничивающейся и поляризующейся среды, приведены граничные условия на поверхностях разрыва с учетом поверхностных эффектов.

Пособие предназначено для студентов-механиков.

УДК 530.145: 536.24

Навчальне видання

Тарапов Іван Євгенович, Ієвлев Іван Іванович

НЕРІВНОВАЖНА ТЕРМОДИНАМІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У МЕХАНІЦІ СЕРЕДОВИЩ, ЯКІ НАМАГНІЧУЮТЬСЯ ТА ПОЛЯРИЗУЮТЬСЯ

Навчальний посібник
для студентів-механіків, 2-ге вид.
(Рос.мовою)

Тел. 707-52-87

Содержание

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

В данной главе принята модель N-компонентой газообразной или жидкой сплошной среды. В качестве системы (макросистемы) рассматривается произвольный объем этой среды. При термодинамическом равновесии система характеризуется конченым числом термодинамических параметров (температура, давление, удельный объем и пр.), относящихся к системе в целом [1-3]. При нарушении термодинамического равновесия эти параметры становятся функциями координат и времени.

Принимаемые ниже гипотеза локального равновесия позволяет утверждать, что достаточно малые объемы системы находятся в равновесии. Если система переходит из одного состояния в другое, то характеристики системы (энергия, энтропия, плотность среды и т.д.) со временем меняются. Эти изменения описываются соответствующими уравнениями – уравнениями баланса.

§1.Уравнения баланса

Рассмотрим материальный объем $V = V(t)$ движущейся сплошной среды, ограниченный замкнутой поверхностью $\Sigma = \Sigma(t)$ (рис1.1).

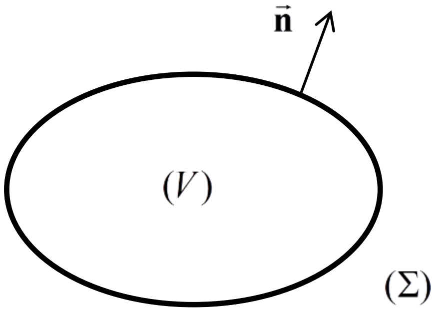

Рис.1. 1

Обозначим через A некоторую скалярную величину, характеризующую состояние системы (энергия, энтропия, масса системы). Введем удельную величину для A - объемную плотность a_V

$$a_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}$$

Величины $A = A(t)$ и a_V связаны соотношением

$$A(t) = \int\limits_{V(t)} a_V \, dV$$

Изменение величины A происходит в результате притока (оттока) ее через замкнутую поверхность Σ, ограничивающую объем V, и наличия источников (стоков), расположенных внутри объема V.

Поток величины A можно разбить на два составляющих: первый – конвективный поток, который определяет перенос A за счет движения среды, второй – кондуктивный поток, возникающий в результате какого-либо физического процесса, например, поток тепла в среде при наличии градиента температуры. В качестве количественной характеристики потока введем его объемную плотность.

Обозначим через $\overrightarrow{J_a}$ объемную плотность кондуктивного потока – количество величины A, проникающее в единицу времени через единицу площади материальной поверхности по нормали к ней. Объемная же плотность конвективного потока, очевидно, равна $\vec{v}a_{v}$ - это количество величины A, проходящее в единицу времени через единицу площади «геометрической» (неподвижной) поверхности по нормали к ней и обусловленное движением сплошной среды. Тогда скорость изменения величины A, связанной с материальным объемом V, может быть представлена суммой слагаемых $d_e A / dt$ и $d_i A / dt$, где

$$\frac{d_e A}{dt} = -\int\limits_{\Sigma(t)} \vec{n} \cdot \overrightarrow{J_a} d\Sigma$$

определяет скорость изменения A за счет кондуктивного потока, а

$$\frac{d_i A}{dt} = \int\limits_{V(t)} \sigma_a dV$$

- скорость изменения A из-за наличия «источников» и «стоков» внутри объема $V(t)$, σ_a- объемная плотность «источника» величины A внутри объема $V(t)$; $\vec{n}$-внешняя нормаль к поверхности $\Sigma(t)$.

Используя связь между A и a_V, можно представить последнее соотношение в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} a_V\left(t,\vec{r}\right)dV = \oint\limits_{\Sigma(t)} \vec{n}\cdot\overrightarrow{J_a}d\Sigma + \int\limits_{V(t)} \sigma_a dV, \qquad (1.1)$$

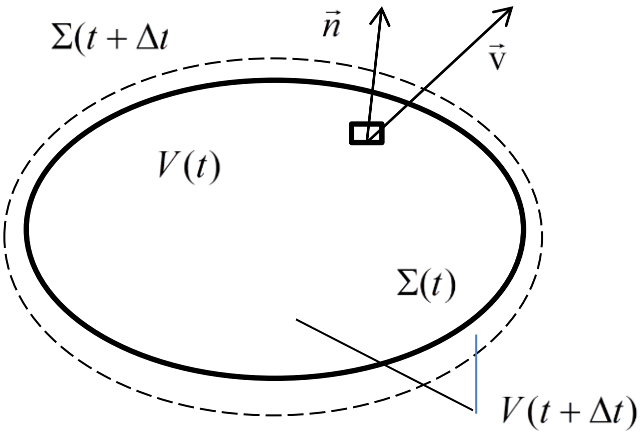

Рис.1. 2

которое представляет собой интегральную форму субстанционального уравнения баланса для величины A.

Часто уравнения баланса записывают в другом виде. Для получения его понадобится соотношения, носящее название теоремы переноса [11,12]:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} a_V(t,\vec{r})dV = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial a_V}{\partial t}dV + \oint\limits_{\Sigma(t)} \vec{n}\,a_V d\Sigma = \int\limits_{V(t)}\left(\frac{da_V}{dt} + a_{\mathrm{V}}\,div\vec{\mathrm{v}}\right)dV \qquad (1.2)$$

Докажем его. По определению

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} a_V(t,\vec{r})dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V(t+\Delta t)} a_V(t+\Delta t,\vec{r})dV - \int\limits_{V(t)} a_V(t,\vec{r})dV\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V(t)} a_V(t+\Delta t,\vec{r}) - a_V(t,\vec{r})dV + \int\limits_{V(t+\Delta t)\setminus V(\mathrm{t})} a_V(t+\Delta t,\vec{r})dV\right\}$$

Здесь $V(t+\Delta t)\setminus V(t)$- объем, заключенный между поверхностями $\Sigma(t)$ и $\Sigma(t+\Delta t)$ (рис1.2).

Предельный переход при $\Delta t \to 0$ для первого слагаемого дает первое слагаемое соотношения (1.2). Второе же слагаемое может быть преобразовано следующим образом с применением теоремы о среднем для интегралов

$$\int\limits_{V(t+\Delta t)\backslash V(t)} a_V(t+\Delta t,\vec r)dV = \int\limits_{\Sigma(\mathrm{t})}\int_0^{h(t,u^1,\mathrm{u}^2)} a_V(t+\Delta t,u^1,\mathrm{u}^2,n)dnd\Sigma =$$

$$= \int\limits_{\Sigma(t)} h\left(t,u^1,u^2\right)a_V\left(t+\Delta t,u^1,u^2,\tilde n\right)d\Sigma,$$

где первое равенство выполняется с точностью $o(h)$; u^1,u^2,n - локальная система координат, связанная с поверхностью $\Sigma(t)$; u^1,u^2 - криволинейные координаты на поверхности $\Sigma(t)$; n расстояние от $\Sigma(t)$ до пространственной точки, отсчитываемое вдоль нормали $\vec n$; $h\left(t,u^1,u^2\right)-$ расстояние от $\Sigma(t)$ до $\Sigma(t+\Delta t)$, отсчитываемое вдоль нормали $\vec n$; $\tilde n -$ некоторое значение $n: 0<\tilde n<h$ (либо $h<\tilde n<0$, если $h<0$). В пределе при $\Delta t\to 0$ получаем $h\left(t,u^1,u^2\right)=\vec n\left(t,u^1,u^2\right)\cdot \vec{\mathrm{v}}\left(t,u^1,u^2,0\right)dt$, а, следовательно,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{V(t+\Delta t)\backslash V(t)} a_V\left(t+\Delta t,\vec r\right)dV = \oint\limits_{\Sigma(t)} \vec n\cdot a_V\vec{\mathrm{v}}d\Sigma.$$

Правая часть последнего соотношения по формуле Гаусса-Остроградского может быть преобразована в интеграл по объему

$$\oint\limits_{\Sigma(t)} \vec n\cdot a_V\vec{\mathrm{v}}d\Sigma = \int\limits_{V(t)} div\left(\vec{\mathrm{v}}a_V\right)dV =$$

$$= \int\limits_{V(t)} (\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla a_V + a_V div\,\vec{\mathrm{v}})dV = \int\limits_{V(t)}\left(-\frac{\partial a_V}{\partial t}+\frac{da_V}{dt}+a_V div\,\vec{\mathrm{v}})dV\right)$$

Тем самым завершается доказательство (1.2).

Введем полный поток $\vec J_a^o$, равный сумме конвективного и кондуктивного потоков,

$$\vec J_a^o = \vec{\mathrm{v}}a_V + \vec J_a, \tag{1.3}$$

Тогда, исходя из соотношений (1.1)), (1.2), можно представить уравнение баланса в виде

$$\int\limits_V \frac{\partial a_V}{\partial t}dV = -\oint\limits_\Sigma \vec n\cdot\vec J_a^0 d\Sigma + \int\limits_V \sigma_a dV, \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) в применении к геометрическому объему называют локальным уравнением баланса в интегральной форме.

Для получения дифференциальной формы уравнение баланса (1.1), (1.4) поверхностные интегралы преобразуем в интегралы по объему. Тогда, предполагая подынтегральные выражения гладкими и учитывая (1.2) и то, что объем V - произвольный, получим субстанциональное

$$\frac{da_V}{dt}+a_V div\vec{v}=-div\vec{J}_a^0+\sigma_a \qquad (1.5)$$

и локальное

$$\frac{\partial a_V}{\partial t}=-div\vec{J}_a^0+\sigma_a \qquad (1.6)$$

уравнения баланса величины A в дифференциальной форме.

Следует заметить, что уравнения баланса выполняются не только для скалярных величин, но и для величин любого тензорного ранга. Пусть объемная плотность величины A представляет тензор $n-$ ранга, который в декартовой системе координат определяется своими компонентами $a_{i_1 \dots i_n}$. Тогда, применяя уравнения (1.1), (1.4)-(1.6) к каждой отдельной компоненте $a_{i_1 \dots i_n}$ тензора $\hat{a}$, получим уравнение баланса для тензорной величины

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} a_{i_1 \dots i_n} dV=-\oint\limits_{\Sigma(t)} n_k J_{k,i_1 \dots i_n} d\Sigma+\int\limits_{V(t)} \sigma_{i_1 \dots i_n} dV; \\
\int\limits_V \frac{\partial a_{i_1 \dots i_n}}{dt} dV=-\oint\limits_\Sigma n_k J^0_{k,,i_1 \dots i_n} d\Sigma+\int\limits_V \sigma_{i_1 \dots i_n} dV; \\
\frac{da_{i_1 \dots i_n}}{dt}+a_{i_1 \dots i_n} div\vec{v}=-\frac{\partial}{\partial x} J_{k_{i_1 \dots i_n}}+\sigma_{i_1 \dots i_n}; \\
\frac{\partial a_{i_1 \dots i_n}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_k} J^0_{k_{i_1 \dots i_n}}+\sigma_{i_1 \dots i_n}.
\end{gathered} \qquad (1.7)$$

Из этих соотношений видно, что в уравнениях баланса для тензорной величины $n-$го ранга потоки ($J_{k,i_1 \dots i_n}$ – кондуктивный и $J^0_{k,i_1 \dots i_n}$ – полный) представляют собой тензоры $(n+1)-$го ранга. Если ввести условное обозначение для тензора $n-$го ранга знак '^' над величиной и двойной знак '^' над величиной для тензора $(n+1)-$го ранга, а также воспользоваться знаком '·' между величинами для внутреннего произведения тензоров, то (1.7) можно записать в символическом виде следующим образом

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \hat{a}\, dV=-\oint\limits_\Sigma \vec{n}\cdot\hat{\hat{J}}\, d\Sigma+\int\limits_V \hat{\sigma} dV \\
\int\limits_V \frac{\partial a}{\partial t} dV=-\oint\limits_\Sigma \vec{n}\cdot\hat{\hat{J}}^0 d\Sigma+\int\limits_V \hat{\sigma} dV \\
\frac{d\hat{a}}{dt}+\hat{a}\, div\vec{v}=-\nabla\cdot\hat{\hat{J}}+\hat{\sigma} \\
\frac{\partial\hat{a}}{\partial t}=-\nabla\cdot\hat{\hat{J}}^0+\hat{\sigma}
\end{gathered} \qquad (1.8)$$

Для изолированной системы внешний поток dA_e / dt величины A отсутствует, и $dA / dt = dA_i / dt$. Тогда условие сохранения величины A сводится к тому, что должно выполнятся равенство $dA_i / dt = 0$. А, так как это равенство нулю должно иметь место для произвольного объема V, то отсюда следует

$$\sigma_a \equiv 0. \tag{1.9}$$

Данное равенство выражает собой закон сохранения величины A и соответствует тому, что отсутствуют «источники» внутри объема.

В качестве примера рассмотрим закон сохранения массы. В этом случае $a_V = \rho$ - это плотность среды, кондуктивный поток массы отсутствует $\vec{J}_\rho = 0$, так как перенос массы осуществляется движением самой среды, и в силу закона сохранения (1.9) отсутствуют источники $\sigma_\rho = 0$. Уравнения баланса (1.5), (1.6) переходят в уравнения неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\, div\, \vec{\text{v}}; \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\left(\rho \vec{\text{v}}\right). \tag{1.10}$$

Часто уравнения баланса формируются в терминах другой интенсивной величины – массовой плотности: $a = a_V / \rho$. При условии выполнения закона сохранения массы (1.10) левая часть уравнения (1.5) может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{da_V}{dt} + a_V div\, \vec{\text{v}} = \frac{d\left(\rho a\right)}{dt} + \rho a\, div\, \vec{\text{v}} = \rho \frac{da}{dt} + a\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{\text{v}}\right) = \rho \frac{da}{dt}$$

А субстанциональное уравнения баланса в дифференциальной форме может быть записано в виде

$$\rho \frac{da}{dt} = -div \vec{J}_a + \sigma_a. \tag{1.11}$$

§2. Основные законы для много компонентных сред

Каждая из компонент среды может рассматриваться как сплошная среда, взаимно проникающая одна в другую, движение которой определяется своим полем скоростей $\vec{\text{v}}_k = \vec{\text{v}}_k\left(t, \vec{r}\right)$. Введем плотность ρ_k $k-$й компоненты, плотность среды ρ в целом и массовой концентрации c_k $k-$й компоненты соотношениями

$$\rho_k = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M_k}{\Delta V}, \ \ \rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \sum_{k=1}^{N} \rho_k, \ \ c_k = \frac{\rho_k}{\rho} \tag{1.12}$$

где ΔM_k - масса k-й компоненты в объеме ΔV; ΔM - суммарная масса всех компонент в объеме ΔV. Отсюда следует, что выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{N} c_k = 1.$$

Компоненты могут превращаться одна в другую, например, в результате химических реакций. Поэтому уравнение баланса для k- й компоненты должно содержать источники:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}}_k\right) + \rho_k m_k \qquad (1.13)$$

где m_k -массовая плотность источников $(\mathrm{k} = 1..\mathrm{N})$.

Движение отдельных компонент многокомпонентных сред важно знать при изучении процессов диффузии. Для описания движения компонент вводят диффузионные потоки $\vec{I}_k = \rho_k \vec{w}_k$, где $\vec{w}_k = \vec{\mathrm{v}}_k - \vec{\mathrm{v}}$ - скорость диффузии k-ой компоненты; $\vec{\mathrm{v}}$ – барицентрическая скорость или скорость центра масс компонент, определяемая соотношением

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N} \rho_k \vec{\mathrm{v}}_k = \sum_{k=1}^{N} c_k \vec{\mathrm{v}}_k. \qquad (1.14)$$

Из определения диффузионного потока и барицентрической скорости (1.14) вытекает связь между потоками $\vec{I}_k$:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{I}_k = 0 \qquad (1.15)$$

Суммируя соотношения (1.13) по всем компонентам с учетом (1.14), придем к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\left(\rho \vec{\mathrm{v}}\right) + \sum_{k=1}^{N} \rho_k m_k$$

В силу закона сохранения массы для среды в целом последнее слагаемое обращается в нуль, и уравнение баланса массы переходит в обычное уравнение неразрывности (1.10).

Преобразуем уравнение (1.13) в эквивалентные ему следующим образом :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \frac{\partial \rho c_k}{\partial t} = -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}}_k\right) + \rho_k m_k =$$

$$= -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}} + \rho_k \vec{w}_k\right) + \rho_k m_k = -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}}\right) - div \vec{I}_k + \rho_k m_k.$$

Отсюда следуют уравнения баланса для концентрации c_k в локальной и субстанциональной формах

$$\frac{\partial \rho c_k}{\partial t} = -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}}_k + \vec{I}_k\right) + \rho_k m_k \qquad (1.16)$$

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = -div\,\vec{I}_k + \rho_k m_k. \qquad (1.17)$$

Помимо закона сохранения массы, к числу основных постулатов механики сплошных сред относятся законы изменения импульсов и моментов количества движения для конечных объемов, которые в случае однокомпонентных сред имеют вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho \vec{\mathrm{v}} dV = -\oint\limits_{\Sigma(t)} \vec{P}_n d\Sigma + \int\limits_{V(t)} \rho\,\vec{f} dV \qquad (1.18)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\left(\vec{r}\times\vec{\mathrm{v}}+\vec{k}\right)dV = \oint\limits_{\Sigma(t)}\left(-\vec{r}\times\vec{P}_n+\vec{q}_n\right)d\Sigma + \int\limits_{V(t)}\rho\left(\vec{r}\times\vec{f}+\vec{m}\right)dV. \qquad (1.19)$$

Здесь $\vec{P}_n$ - напряжение поверхностных сил; $\vec{f}$ - массовая плотность объемных сил; $\vec{k}$ -плотность внутренних моментов количества движения; $\vec{r}$ - радиус-вектор; $\vec{q}_n$ - плотность распределенных поверхностных моментов пар сил; $\vec{m}$ - плотность распределенных по объему моментов пар сил.

Во многих случаях можно пренебречь слагаемыми, содержащими $\vec{k},\vec{q},\vec{m}$ в силу их малости по сравнению с остальными слагаемыми. Тогда закон изменения моментов количества движения сводится к симметрии тензора давления $\hat{P}$, удовлетворяющему соотношению Коши $\vec{P}_n = \vec{n}\cdot\hat{P}$, где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности Σ. В дальнейшем будем полагать, что выполняются условия, при которых тензор давления $\hat{P}$ является симметричным. Соответствующее соотношению (1.18) локальное уравнение баланса в дифференциальной форме будет иметь вид

$$\frac{\partial \rho\vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = -div\left(\rho\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}+\hat{P}\right)+\rho\,\vec{f} \qquad (1.20)$$

либо в координатной форме в декартовой системе координат

$$\frac{\partial \rho \mathrm{v}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho \mathrm{v}_k \mathrm{v}_i + P_{ki}\right) + \rho f_i.$$

В случаем многокомпонентных сред для каждой компоненты необходимо записать уравнение, аналогичное (1.20),

$$\frac{\partial \rho_k \vec{\mathrm{v}}_k}{\partial t} = -div\left(\rho_k \vec{\mathrm{v}}_k \vec{\mathrm{v}}_k + \hat{P}_k\right) + \rho_k \vec{f}_k$$

(здесь нет суммирования по k).

Суммируя последние соотношения по k, после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial \rho\vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = -div\left[\rho\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}} + \sum_{k=1}^{N}\left(\hat{P}_k + \rho_k \vec{w}_k \vec{w}_k\right)\right] + \rho\,\vec{f},$$

где $\rho\vec{f} = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \vec{f}_k$. Видно, что уравнение движения для среды в целом, описываемое полем барицентрических скоростей $\vec{\mathrm{v}}$, после обозначения $\hat{P} = \sum_{k=1}^{N} \left(\hat{P}_k + \rho_k \vec{w}_k \vec{w}_k \right)$ принимает форму соотношения (1.20). Причем $\hat{P}$ играет роль плотности (тензора 2-го ранга) кондуктивного потока импульсов, а $\rho\vec{f}$ - объемной плотности источников. Уравнению (1.20) отвечает соответствующее субстанциональное уравнение импульсов

$$\rho \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = -div\,\hat{P} + \rho\vec{f} \qquad (1.21)$$

Еще одним постулатом механики сплошной среды является закон сохранения полной энергии, для которой субстанциональное уравнение баланса в дифференциальной форме имеет вид

$$\rho \frac{de}{dt} = -div\,\vec{J}_{e,} \qquad (1.22)$$

где e и $\vec{J}_e$- массовая плотность и плотность кондуктивного потока полной энергии. При построении модели сплошной среды правильное определение полной энергии системы является сложной проблемой. Выполнение соотношения (1.22) является одним из подтверждений правильного выбора полной энергии.

Предположим, что многокомпонентная среда движется в консервативном поле сил так, что можно ввести потенциальную энергию ψ :

$$\vec{f}_k = -\nabla\psi, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \qquad (1.23)$$

Так, если внешнем силовым полем является поле сил тяжести, то $\psi = -\vec{g}\cdot\vec{r}$, $\vec{f}_k = \vec{g}$. Тогда в полной энергии можно выделить кинетическую энергию движения в целом с массовой плотностью $\mathrm{v}^2/2$, потенциальную энергию внешнего силового поля плотности ψ. Разность $u = e - \mathrm{v}^2/2 - \psi$ характеризует взаимодействие частиц среды между собой вместе с и энергией, необходимой на изменение состава среды за счет процессов диффузии и превращений самих компонент. Таким образом, u представляет собой удельную величину внутренней энергии системы. Уравнение баланса потенциальной энергии следует из соотношения (1.23):

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = \rho\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\psi = -\rho\,\vec{f}\cdot\vec{\mathrm{v}}. \qquad (1.24)$$

Как видим, здесь отсутствует кондуктивный поток потенциальной энергии, а источник σ_Ψ равен объемной плотности мощности сил внешнего силового поля, взятой с противоположным знаком.

Уравнение баланса кинетической энергии вытекает из уравнения импульсов (1.21):

$$\begin{gathered}\rho\frac{d}{dt}\frac{\mathrm{v}^2}{2}=\vec{\mathrm{v}}\cdot\rho\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=-\vec{\mathrm{v}}\cdot div\hat{P}+\rho\vec{f}\cdot\vec{v}=\\=-div\left(\hat{P}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)+\hat{P}:\nabla\vec{\mathrm{v}}+\rho\vec{f}\cdot\vec{\mathrm{v}}\end{gathered}\tag{1.25}$$

Здесь $\hat{P}\cdot\vec{\mathrm{v}}$ - кондуктивный поток кинетической энергии и представляет собой вектор с компонентами $\left(\hat{P}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)_i=P_{ik}\mathrm{v}_k$ (по повторяющимся индексам здесь суммирование от 1 до 3) $-\hat{P}:\nabla\vec{\mathrm{v}}$ двойное внутреннее произведение тензоров второго ранга; $\hat{P}$- тензор давления и $\nabla\vec{\mathrm{v}}$- градиент вектора скорости, $\sigma_{кин}=\hat{P}:\nabla\vec{\mathrm{v}}+\rho\vec{f}\cdot\vec{\mathrm{v}}$- источник кинетической энергии. Смысл дивергентного слагаемого в правой части (1.25) становится ясным после интегрирования его по произвольному объему $V(t)$, Ограниченному поверхностью $\Sigma(t)$, и приведению его к интегралу по поверхности

$$-\int\limits_{V(t)}div\left(\hat{P}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)dV=-\oint\limits_{\Sigma(t)}\vec{n}\cdot\hat{P}\cdot\vec{\mathrm{v}}d\Sigma=\oint\limits_{\Sigma(t)}\vec{P}_n\cdot\vec{\mathrm{v}}d\Sigma.$$

Это выражение представляет собой мощность поверхностных сил $\vec{P}_n$, действующих на поверхности $\Sigma(t)$. Второе же и третье слагаемые в (1.25) являются объемными плотностями мощностей соответственно внутренних сил с противоположным знаком и внешних сил.

Из определения внутренней энергии следует, что ее кондуктивный поток $\vec{J}_u$ равен разности кондуктивных потоков полной и кинетической энергии (здесь потенциальная энергия вклада не дает, так как ее кондуктивный поток равен нулю). Плотность же источников внутренней энергии σ_u определяется из равенства

$$\sigma_e=\sigma_u+\sigma_{кин}+\sigma_\Psi=0.$$

выполняющегося в силу закона сохранения полной энергии

$$\sigma_u=-\sigma_{кин}-\sigma_\Psi=-\hat{P}:\nabla\vec{v}$$

В этом случае уравнение баланса внутренней энергии может быть записано в виде

$$\rho\frac{du}{dt}=-div\vec{J}_u-\hat{P}:\nabla\vec{\mathrm{v}}\tag{1.26}$$

§3.Гипотеза локального равновесия. Тождество Гиббса

Основных законов, полученных в предыдущем параграфе, недостаточно для полного описания динамики среды. Для этого необходимо учитывать дополнительные факторы термодинамического характера. Основополагающей здесь является гипотеза локального равновесия, суть которой состоит в следующем. Время релаксации τ замкнутой системы к термодинамическому равновесию тем меньше, чем меньше ее размер, т.е. число частиц, входящих в эту систему. С другой стороны, если состав системы, все таки, достаточно большой, то время τ_p изменения энергии такой системы будет существенно большим времени релаксации τ. Т.о. можно выбрать в качестве системы такое количество частиц среды, для которой будет иметь место неравенство $\tau \ll \tau_p$. Само же состояние ее можно будет считать равновесным. Это приводит к справедливости следующих положений.

A. Малый объем среды в любой момент времени находится в термодинамическом равновесии.
B. Термодинамические потенциалы, относящиеся к малым объемам, являются функциями таких же термодинамических переменных, как и в случае термодинамического равновесия.
C. Производные термодинамических потенциалов по переменным, функциями которых они являются, определяют обобщенные термодинамические силы так же, как и в равновесии.

В применении к рассматриваемой в этой главе модели N- компонентной среды положение A означает, что каждый малый объем (то, чему в механике сплошной сред соответствует точка, частица, макродифференциал) характеризуется параметрами: плотностью среды ρ (или объемом системы V), давлением p, концентрациями компонент c_k и химическими потенциалами $\mu_k\left(k=1,2,...,N\right)$, температурой T, энтропией S, которые могут быть различными для разных точек среды и разных моментов времени, т.е. являются функциями координат и времени. В зависимости от условий, в которых находится рассматриваемая система, часть этих переменных представляет собой независимые обобщенные термодинамические переменные, а остальные – обобщенные термодинамические силы. Например, в качестве независимых переменных могут выступать $S, V, c_1, ..., c_n$, а соответствующих термодинамических сил $T, p, \mu_1, ..., \mu_N$.

Прежде чем перейти к разъяснению положения В гипотезы локального равновесия, получим выражение для основного термодинамического равенства. Предположим, что материальный объем V газа или жидкости находится в условиях, при которых имеет место термодинамическое равновесие. Обозначим через U - внутреннюю энергии данной системы, S -энтропию, N_k - число частиц k -ой компоненты, p - давление. Тогда основное термодинамическое равенство для объема V имеет вид [1]

$$dU = TdS - pdV + \sum_{k=1}^{N} \tilde{\mu}_k dN_k. \qquad (1.27)$$

В дальнейшем потребуется формулировка этого соотношения в терминах удельных массовых величин:

$$u = U / \rho V; \;\; s = S / \rho V; \;\; \mu_k = \tilde{\mu}_k / m_k^0,$$

где m_k^0-масса одной частицы k -й компоненты. Обозначим через $M = \rho V$ - массу всего объема V, которая остается неизменной в силу закона сохранения массы: $M = \rho V = const$. А так как $N_k = m_k^0 N_k / m_k^0 = M_k / \mathrm{m}_k^0 = c_k M / m_k^0$, где M_k - масса k -й компоненты в объеме V, то $dN_k = Mdc_k / m_k^0$. Кроме того,

$$dU = Mdu, \quad dS = Mds, \quad dV = d\left(\rho V / \rho\right) = Md\left(1/\rho\right) = -\frac{M}{\rho^2} d\rho$$

Эти соотношения позволяют основное термодинамическое равенство (1.27) привести к виду

$$du = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k dc_k \qquad (1.28)$$

Отсюда вытекает, что $u = u\left(S, \rho, c_1, ..., c_N\right)$ и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\rho, c_k} = T, \; \left(\frac{\partial u}{\partial (1/\rho)}\right)_{s, c_k} = -p, \; \left(\frac{\partial u}{\partial c_k}\right)_{s, \rho, c_j} = \mu_k \qquad (1.29)$$

Соотношение (1.28) является математическим выражением первого и второго законов термодинамики для равновесных процессов. Если объем V в целом не находится в состоянии термодинамического равновесия, то сформулированное выше положение В позволяет утверждать, что для малой составной части объема V и в этом случае выполняются равновесные соотношения (1.29). Тогда выражение для любого бесконечно малого изменения δu внутренней энергии u имеет вид

$$\delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\rho, c_k} \delta s + \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{s, c_k} \delta \rho + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial c_k}\right)_{s, \rho, c_j} \delta c_k =$$
$$= T\delta s - p\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \delta c_k, \qquad (1.30)$$

а само соотношение (1.30) называется тождеством Гиббса.

§4. Уравнение баланса энтропии. Производство энтропии

Тождество Гиббса (1.30) может быть представлено в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{du}{dt} + p\, div \vec{\mathrm{v}} - \sum_{k=1}^{N} \mu_k \rho \frac{dc_k}{dt}.$$

Для дальнейшего преобразования полученного соотношения привлечем уравнение баланса (1.10), (1.17), (1.26) и рассмотрим для простоты случай $m_k = 0$, т.е. когда в системе нет химических реакций. Несложные преобразования, которые предлагается проделать читателю самостоятельно, приводят к следующему соотношению [3,4]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -div\left(\vec{J}_u - \sum_{k=1}^{N} \mu_k \vec{I}_k\right) + p\, div \vec{\mathrm{v}} - \hat{P} : \nabla \vec{\mathrm{v}} - \sum_{k=1}^{N} \vec{I}_k \cdot \nabla \mu_k, \qquad (1.31)$$

которое, если ввести обозначения

$$\vec{J}_q = \vec{J}_u - \sum_{k=1}^{N} \mu_k \vec{I}_k; \quad \overset{o}{\tau} = p'\hat{\delta} - \hat{P};$$

$$\sigma_T = p\, div \vec{\mathrm{v}} - \hat{P} : \nabla \vec{\mathrm{v}} - \sum_{k=1}^{N} \vec{I}_k \cdot \nabla \mu_k =$$

$$= -\left(p' - p\right) div \vec{\mathrm{v}} + \overset{o}{\tau} : \nabla \vec{\mathrm{v}} - \sum_{k=1}^{N} \vec{I}_k \cdot \nabla \mu_k$$

где $\hat{\delta}$ - единичный тензор 2-го ранга, $p' = 1/3\, P_{mm}$ - полное давление, $\overset{o}{\tau}$ - девиатор тензора напряжений $\sigma_{ik} = -P_{ik}$, можно представить в более компактном виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -div \vec{J}_q + \sigma_T. \qquad (1.32)$$

Данное соотношение носит название уравнения тепла по следующим соображениям. Умножим обе части (1.32) на $\Delta V dt$, где ΔV - малый материальный объем, ограниченный поверхностью $\Delta\Sigma$. Тогда левая часть (1.32) даст выражение

$$T\rho\Delta V ds = Td\left(\rho\Delta V s\right) = Td\left(\Delta s\right).$$

которое определяет количество тепла, полученного системой (объемом ΔV). Величина

$$-\Delta V dt\, div\vec{J}_q \simeq -dt\int\limits_{\Delta V} div\,\vec{J}_q dV = -dt\int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{n}\cdot\vec{J}_q d\Sigma.$$

определяет количество тепла, поступившего к системе извне, а $\vec{J}_q$ представляет собой объемную плотность кондуктивного потока тепла. Выражение $\Delta V dt\sigma_T$ определяет количество тепла, получаемого системой в результате внутренних необратимых процессов вязкого трения, диффузии и называется «некомпенсированным теплом». Таким образом, соотношение (1.32) определяет баланс между количеством тепла, получаемого системой извне и изнутри за счет внутренних источников.

После деления обеих частей соотношений (1.32) на температуру и выделения в его правой части дивергентного слагаемого приходим к уравнению баланса энтропии

$$\begin{aligned}&\rho\frac{ds}{dt} = -div\left(\vec{J}_q / T\right) - \vec{J}_q\cdot\nabla T / T^2 - \\ &-p^{\mathrm{v}}\frac{div\vec{\mathrm{v}}}{T} + \overset{o}{\tau} : \overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}} / T - \sum_{k=1}^{N}\vec{I}_k\cdot\nabla\mu_k / T\end{aligned} \tag{1.33}$$

где $\overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}}$ - девиатор симметричной части градиента вектора скорости, $p^{\mathrm{v}} = p' - p$.

Отсюда следует, что источник энтропии σ_S и ее объемная плотность кондуктивного потока определяются равенствами

$$\begin{aligned}&\sigma_s = -\vec{J}_q\cdot\nabla T / T^2 - \\ &-p^{\mathrm{v}}\frac{div\vec{\mathrm{v}}}{T} + \overset{o}{\tau} : \overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}} / T - \sum_{k=1}^{N}\vec{I}_k\cdot\nabla\mu_k / T \\ &\vec{J}_s = \vec{J}_q / T\end{aligned} \tag{1.34}$$

Как будет видно из дальнейшего, выражение для источника энтропии σ_S играет важную роль в понимании неравновесных процессов, протекающих в системе. В дальнейшем согласно принятой терминологии σ_S будем называть «производством энтропии».

Определим энтропию S произвольного объема сплошной среды $V\left(t\right)$, ограниченного поверхностью $\Sigma\left(t\right)$, как интеграл

$$S\left(t\right) = \int\limits_{V(t)}\rho s dV.$$

Тогда изменение энтропии определяется притоком или оттоком ее через поверхность

$$\frac{d_e S}{dt} = -\oint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \vec{J}_S d\Sigma$$

и ее «производством» внутри объема за счет неравновесных процессов

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_V \sigma_s dV$$

Для изолированной системы имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_i S}{dt}$$

А так как в такой системе энтропия не убывает, то имеем

$$\frac{d_i S}{dt} \geq 0.$$

Отсюда следует неравенство для производства энтропии

$$\sigma_s \geq 0, \qquad (1.35)$$

представляющее собой локальную форму второго закона термодинамики.

§5.Феноменологические соотношения и соотношения симметрии феноменологических коэффициентов

В выражении для производства энтропии (1.34) первый сомножители слагаемых определяют термодинамические потоки: $\vec{J}_q$-поток тепла; τ- составляющая потока импульсов, связанного с вязким трением в среде; $\vec{I}_k$-диффузионный поток k-й компоненты. Вторые сомножители слагаемых этого же выражения содержат градиенты соответствующих величин: $\nabla T / T^2, \nabla\vec{\mathrm{v}} / T,\ \nabla\mu_k / T$. Эти сомножители называют термодинамическими силами. Они являются причиной возникновения термодинамических потоков; при отсутствии термодинамических сил нет и термодинамических потоков. Поэтому, если состояние системы близко к равновесному, то можно допустить, что термодинамические потоки линейным образом зависят от сил. Прежде чем указать эту зависимости, преобразуем производство энтропии. Разумность проводимого ниже преобразования определяется совпадением формально получаемых соотношений с известными из молекулярно-кинетической теории законами.

Соотношение (1.15) указывает на зависимость между диффузионными потоками. Выделим среди них независимые, полагая, например,

$$\vec{I}_N = -\sum_{k=1}^{N-1} \vec{I}_k. \qquad (1.36)$$

Примем обозначение $p^{\mathrm{v}} = p' - p$, и учтем соотношение (1.36) придем к другой форме производства энтропии

$$\sigma_s = -p^{\mathrm{v}} \frac{div\vec{\mathrm{v}}}{T} - \vec{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{N-1} \vec{I}_k \cdot \frac{\nabla\left(\mu_k - \mu_N\right)}{T} + \overset{o}{\tau} : \frac{\overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}}}{T} \qquad (1.37)$$

где фигурируют независимые термодинамические потоки.

Введем обозначения: для потоков $J_1 = p^{\mathrm{v}}, J_2 = J_{qx}, J_3 = J_{qy}, \ldots$, для термодинамических сил

$$X_1 = \frac{1}{T}\left(div\vec{\mathrm{v}}\right),\ X_2 = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x}, \ldots.$$

Тогда производство энтропии σ_s может быть представлено в виде

$$\sigma_s = \sum_i J_i X_i$$

а линейные соотношения между термодинамическими потоками и силами могут быть записаны как

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j \qquad (1.38)$$

Связи между термодинамическими потоками и силами, определяемые равенствами (1.38), называют феноменологическими соотношениями. Здесь L_{ij} - феноменологические коэффициенты, значения которых для конкретных сред определяются либо экспериментальными методами, либо методами статистической физики. В феноменологической термодинамике соотношения (1.38) принимаются как постулат и представляют собой одно из основных положений линейной неравновесной термодинамики.

Экспериментальные данные и расчеты для простых моделей сред (идеальный газ) методами статистической физики говорят о том что феноменологические коэффициенты L_{ij} удовлетворяют соотношениям симметрии. Этот результат распространяют аксиоматически на случай и других моделей сред. В нашем случае соотношения симметрии феноменологических коэффициентов (соотношения Онзагера) имеют вид

$$L_{ij} = L_{ji} \qquad (1.39)$$

и в макроскопической неравновесной термодинамике они входят в состав основных положений.

Феноменологические соотношения (1.38) позволяют представить производство энтропии в виде положительно определенной квадратичной формы

$$\sigma_s = \sum_{i,j} L_{ij} X_i X_j > 0$$

Необходимый и достаточный критерий положительной определенности квадратичной формы (критерий Сильвестра) приводит к следующим неравенствам для феноменологических коэффициентов:

$$L_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0, ... \tag{1.40}$$

Эти соотношения позволяют установить знаки диагональных элементов и неравенства между остальными коэффициентами матрицы коэффициентов $\left\| L_{ij} \right\|$, что оказывается полезным при анализе явлений, протекающих в исследуемой системе.

§6. Изотропные среды. Принцип Кюри

Для изотропных сред феноменологические соотношения (1.38) упрощаются. Дополнительные ограничения на эти соотношения устанавливаются с помощью принципа Кюри: для изотропных сред связи вида (1.38) имеют место между термодинамическими потоками и силами одинакового тензорного ранга. Согласно принципу Кюри термодинамические потоки, стоящие в выражении (1.37), будут связаны с термодинамическими силами следующим образом:

$$p^{\mathrm{v}} = -L^{s} \frac{div\vec{\mathrm{v}}}{T} \tag{1.41}$$

$$\vec{J}_q = -L^{\mathrm{v}} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{N-1} L_k^{\mathrm{v}} \frac{\nabla(\mu_k - \mu_N)}{T} \tag{1.42}$$

$$\vec{I}_k = -L_k^{\mathrm{v}} \frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{j=1}^{N-1} L_{kj}^{\mathrm{v}} \frac{\nabla\left(\mu_k - \mu_N\right)}{T} \qquad \left(k = 1, 2, ..., N-1\right) \tag{1.43}$$

$$\overset{0}{\tau} = L^{\tau} \frac{\overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}}}{T} \tag{1.44}$$

Здесь $L^s, L^{\mathrm{v}}, L_k^{\mathrm{v}}, L_{kj}^{\mathrm{v}}, L^{\tau}$ - феноменологические коэффициенты, связывающие между собой соответственно скалярные, векторные и тензорные потоки и силы, а соотношения Онзагера (1.39) сводятся к равенствам $L_{kj} = L_{jk}$.

Полученные соотношения обобщают известные из молекулярно-кинетической теории законы. Так, при отсутствии диффузии равенство (1.42) приводит к закону Фурье

$$\vec{J}_q = -\lambda \nabla T,$$

где $\lambda = L^{\text{v}} / T^2$ - коэффициент теплопроводности. При изотермических условиях $(\nabla T = 0)$ и постоянном давлении в двухкомпонентных системах $(N = 2)$ равенства (1.43) дают известный в диффузии закон Фика

$$\vec{I}_1 = -D\nabla c_1$$

где

$$D = L_{11}^{\text{v}} \left[\frac{\partial(\mu_1 - \mu_2)}{\partial c_1} \right]_{T,p} / T$$

- коэффициент диффузии.

Соотношения же (1.41), (1.44) определяют тензор вязких напряжений

$$\hat{\tau} = -p^{\text{v}}\hat{\delta} + \overset{0}{\tau} = \left(\zeta + \frac{2}{3}\mu \right) div\vec{\text{v}}\,\hat{\delta} + 2\mu \overset{so}{\nabla\vec{\text{v}}}$$

где $\mu = L^{\tau} / 2T$ - динамический коэффициент вязкости;

$\zeta = L^{s} / T$ - второй коэффициент вязкости.

Присутствие градиентов химических потенциалов в соотношении (1.42) и градиент температуры в (1.43) говорит о наличии так называемых перекрестных эффектов, т.е. о взаимном влиянии друг на друга процессов теплопроводности и диффузии.

После подстановки выражений (1.41)-(1.44) в соотношение (1.37) производство энтропии можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_s = \sigma_{s1} + \sigma_{s2}$$

где

$$\sigma_{s1} = L^{s} \left(\frac{div\vec{\text{v}}}{T} \right)^2 + L^{\tau} \frac{\overset{so}{\nabla\vec{\text{v}}} : \overset{so}{\nabla\vec{\text{v}}}}{T^2}$$

обусловливает возникновение энтропии за счет вязкой диссипации

$$\sigma_{S2} = L^{\text{v}} \frac{(\nabla T)^2}{T^4} + 2\sum_{k=1}^{N-1} L_k^{\text{v}} \frac{\nabla T \cdot \nabla(\mu_k - \mu_N)}{T^3} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N-1} L_{kj}^{\text{v}} \frac{\nabla(\mu_k - \mu_N) \cdot \nabla(\mu_j - \mu_N)}{T^2}$$

связано с диссипацией в процессах теплопроводности и диффузии.

Глава 2
ИЗОТРОПНАЯ НАМАГНИЧИВАЮЩАЯСЯ И ПОЛЯРИЗУЮЩАЯСЯ СРЕДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Основным при изучении динамики систем, взаимодействующих с электромагнитным полем, является определение пондеромоторной силы - силы, с которой действует поле на среду [5,6]. Экспериментально установлено, что на свободные заряды в электрическом поле действует сила Кулона, а на токи в магнитном поле – сила Лоренца. Наличие деформируемой сплошной среды, способной поляризоваться и намагничиваться в электромагнитном поле, вносит дополнительные трудности при нахождении пондеромоторной силы. Для получения выражения этой силы необходимо привлекать методы термодинамики.

В данной главе приведено основное термодинамическое равенство, установленное для термодинамически равновесных систем. Оно позволяет определить вклад электромагнитного поля в термодинамические потенциалы (внутреннюю энергию, энтропия и т.д.), найти составляющую пондеромоторной силы, обусловленную поляризацией и намагниченностью среды, и получить тождество Гиббса для данной модели среды.

Получение выражения для пондеромоторной силы и уравнения энергии для совместной системы, состоящей из движущейся материальной среды и поля, требует привлечения аппарата специальной теории относительности, формулировки основных законов в четырехмерном пространстве Минковского через тензор энергии-импульса. Здесь схема построения основных уравнений следующая [7,8].

Исходя из основных уравнений баланса, сформулированных в собственной системе отсчета K^*, получают выражение для тензора энергии-импульса в K^*. Затем, используя преобразования Лоренца, переходят в систему отсчета наблюдателя K. В данной главе в соответствии с указанной схемой получены уравнения энергии и импульсов в K в дорелятивистском приближении с точностью до членов порядка v^2 / c^2.

§1.Основное термодинамическое равенство. Пондеромотрная сила для неподвижных сред

В электродинамике принимаются гипотезы: элементарная работа dA^{em}, необходимая для изменения энергии электромагнитного поля, поляризации и намагничивания среды при отсутствии токов и свободных зарядов равна [9]

$$dA^{em} = \frac{\vec{H}\cdot d\vec{B} + \vec{E}\cdot d\vec{D}}{4\pi}\Delta V \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{E}, \vec{H}$ -векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{B}$ и $\vec{D}$ - векторы, соответственно, магнитной и электрической индукции; ΔV - малый объем, занимаемый средой.

В этой случае правая часть основного термодинамического равенства (1.27) должна быть дополнена слагаемыми

$$\frac{\vec{H}\cdot d\vec{B} + \vec{E}\cdot d\vec{D}}{4\pi}\Delta V$$

Переходя к удельным величинам, аналогично (1.28), окончательно получим основное термодинамическое равенство в виде

$$du = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho + \sum_{k=1}^{N}\mu_k dc_k + \frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot d\frac{\vec{B}}{\rho} + \frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot d\frac{\vec{D}}{\rho}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем рассматривается модель изотропной среды, для которой векторы $\vec{H}$ и $\vec{B}$, $\vec{E}$ и $\vec{D}$ - колинеарны

$$\vec{B} = B\vec{H}\,/\,H, \quad \vec{D} = D\vec{E}\,/\,E. \tag{2.3}$$

Это позволяет в последних двух слагаемых соотношения (2.2) перейти от векторов $\vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}$ к их модулях B, H, D, E.

Чтобы получить выражение для внутренней энергии u, свободной энергии f, энтропии s удобно перейти в (2.2) к другому термодинамическому потенциалу

$$\tilde{f} = \tilde{f}\left(T,\rho,c_k,H,E\right) = u - TS - \frac{HB+ED}{4\pi\rho} = f - \frac{HB+ED}{4\pi\rho} \tag{2.4}$$

удовлетворяющему равенству

$$d\tilde{f} = -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho + \sum_{k=1}^{N}\mu_k dc_k - \frac{B}{4\pi\rho}dH - \frac{D}{4\pi\rho}dE. \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial H}\right)_{T,\rho,c_k,E} = -\frac{B}{4\pi\rho}; \quad \left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial E}\right)_{T,\rho,c_k,\mathrm{H}} = -\frac{D}{4\pi\rho}; \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)_{T,\rho,c_k,E} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{B}{\rho}\right)_{\rho,c_k,H,E}; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_{T,\rho,c_k,H} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{D}{\rho}\right)_{\rho,c_k,H,E}. \tag{2.7}$$

Положим, что имеет место зависимости

$$B = B\left(T,\rho,c_k,H\right), \quad D = D\left(T,\rho,c_k,E\right).$$

Такие зависимости характерны для магнетиков (ферромагнетиков), диэлектриков. Тогда, интегрируя первое равенство (2.6) по H, второе по E, придем к выражению для $\tilde f$

$$\tilde f\left(T,\rho,c_k,H,E\right)=f_0\left(T,\rho,c_k\right)-\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H BdH'-\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^E DdE',$$

которое, используя связь магнитной индукции B с намагниченностью $M: B=H+4\pi M$ и электрической индукции D с поляризацией $P: D=E+4\pi P$, можно представить в виде

$$\tilde f = f_0-\frac{H^2+E^2}{8\pi\rho}-\int\limits_0^H\frac{M}{\rho}dH'-\int\limits_0^E\frac{P}{\rho}dE'. \tag{2.8}$$

Аналогично, интегрируя первое равенство (2.7) по H, а второе по E, получим

$$s=s\left(T,\rho,c_k,H,E\right)=$$

$$=s_0\left(T,\rho,c_k\right)+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_{\rho,c_k,H,E}dH'+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^E\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_{\rho,c_k H,E}dE'= \tag{2.9}$$

$$=s_0+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\rho,c_k,H}dH'+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^E\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho,c_k,E}dE'.$$

Из соотношений (2.4), (2.8), (2.9) получаем выражение для свободной и внутренней энергий

$$f\left(T,\rho,c_k,H,E\right)=$$

$$=f_0\left(T,\rho,c_k\right)+\frac{H^2+E^2}{8\pi\rho}+\frac{1}{\rho}\left(HM-\int\limits_0^H MdH'+EP-\int\limits_0^E PdE'\right) \tag{2.10}$$

$$u\left(T,\rho,c_k,H,E\right)=$$

$$=u_0\left(T,\rho,c_k\right)+\frac{H^2+E^2}{8\pi\rho}+ \tag{2.11}$$

$$+\frac{1}{\rho}\left[HM-T^2\int\limits_0^H\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{M}{T}\right)_{\rho,c_k,H}dH'+EP-T^2\int\limits_0^E\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{P}{T}\right)_{\rho,c_k,E}dE'\right]$$

В равенство (2.5) входит величина p, которая играет роль полного давления,

$$p=\rho^2\left(\frac{\partial\tilde f}{\partial\rho}\right)_{T,c_k,H,E}=p_0\left(T,\rho,c_k\right)+\frac{H^2+E^2}{8\pi}-\rho^2\int\limits_0^H\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{M}{\rho}dH'-\rho^2\int\limits_0^E\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{P}{\rho}dE',$$

где первое слагаемое

$$p_0=\rho^2\left(\frac{\partial f_0}{\partial\rho}\right)_{T,c_k}$$

не зависит от электромагнитного поля в явном виде, а второе представляет собой электромагнитное давление p^{em}

$$p^{em} = \frac{H^2 + E^2}{8\pi} - \rho^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{M}{\rho} dH' - \rho^2 \int_0^E \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{P}{\rho} dE'. \qquad (2.12)$$

В случае неравновесных процессов, совершаемых системой в целом, в соответствии с гипотезой локального равновесия равенство (2.2), формулируемое для удельных величин, переходит в тождество Гиббса. При этом свободная энергия F конечного объема (или бесконечного) определяется в виде

$$F = \int_V \rho f \, dV$$

Пусть среда занимает все пространство V. Рассмотрим возможные перемещения точек среды $\delta\vec{r}$, отличные от нуля в части V_i пространства V при $T = const,\ c_k = const$, происходящие так, что процесс, совершаемый системой, можно считать медленным (квазистатическим). При этом будем полагать, что отсутствуют свободные заряды и токи в объеме V_i, а электрическое и магнитное поля создаются неизменными зарядами с объемной плотностью ρ_e и токами $\vec{j}$ вне области V_i. Электромагнитное поле в пространстве V как в невозмущенном, так и возмущенном состоянии системы удовлетворяет уравнениям электромагнитостатики

$$\begin{aligned} &rot\,\vec{E} = 0; \qquad div\,\vec{D} = 4\pi\rho_e; \\ &rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \quad div\,\vec{B} = 0, \end{aligned} \qquad (2.13)$$

возможные перемещения удовлетворяют условию сохранения массы

$$\delta(\rho dV) = 0$$

или

$$\delta\rho = -\rho div\,\delta\vec{r}, \qquad \delta'\rho = -div(\rho\delta\vec{r}). \qquad (2.14)$$

где $\delta'\rho$ - изменение плотности в данной точке пространства; $\delta\rho$ - изменение плотности в данной частице материальной среды.

Нашей целью является определение пондеромоторной силы. Поэтому предположим, что возмущение состояния системы происходит без изменения ее состава $(\delta c_k = 0)$. Рассмотрим изменение свободной энергии системы

$$(\delta F)_{T,c_k} = \left(\delta \int_V \rho f dV\right)_{T,c_k} = \int_V \rho (\delta f)_{T,c_k} dV.$$

Тождество Гиббса (2.2) и выражение (2.4) позволяют определить изменение свободной энергии

$$\left(\delta f\right)_{T,c_k}=\frac{p}{\rho^2}\delta\rho+\frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot\delta\frac{\vec{B}}{\rho}+\frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot\delta\frac{\vec{D}}{\rho},$$

где полное изменение в движущейся частице среды $\delta\left(\vec{B}/\rho\right)$, $\delta\left(\vec{D}/\rho\right)$ связаны с изменениями этих величин в точке пространства $\delta'\left(\vec{B}/\rho\right)$, $\delta'\left(\vec{D}/\rho\right)$ так же, как и величины a_V и a в формулах (1.6), (1.11)

$$\rho\delta\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right)=\delta'\vec{B}+div\left(\delta\vec{r}\,\vec{B}\right)$$

$$\rho\delta\left(\frac{\vec{D}}{\rho}\right)=\delta'\vec{D}+div\left(\delta\vec{r}\,\vec{D}\right)$$

Тогда с учетом (2.14) имеем

$$\left(\delta F\right)_{T,c_k}=\int_V\left[-pdiv\,\delta\vec{r}+\frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot\delta'\vec{B}+\frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot\delta'\vec{D}+\frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot div\left(\delta\vec{r}\,\vec{B}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot div\left(\delta\vec{r}\,\vec{D}\right)\right]dV=\int_{V_i}\delta\vec{r}\cdot\left[\nabla p-\frac{\vec{B}\nabla\vec{H}+\vec{D}\nabla\vec{E}}{4\pi}\right]dV+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_V(\vec{H}\cdot\delta' rot\,\vec{A}-\nabla\varphi\cdot\delta'\vec{D})dV.$$

Здесь учтено, что $\delta\vec{r}=0$ вне области V_i, в первом интеграле произведено интегрирование по частям; $\vec{A}$- векторный потенциал магнитного поля $\left(\vec{B}=rot\,\vec{A}\right)$; φ- скалярный потенциал электрического поля $\left(E=\nabla\varphi\right)$. Преобразуем второй интеграл в последнем выражении, применяя интегрирование по частям и учитывая, что поле на бесконечности стремится к нулю,

$$\frac{1}{4\pi}\int_V\left(\vec{H}\cdot\delta' rot\,\vec{A}-\nabla\varphi\cdot\delta'\vec{D}\right)dV=\frac{1}{4\pi}\int_V\left(\delta'\vec{A}\cdot rot\,\vec{H}+\varphi\delta' div\,\vec{D}\right)dV=$$

$$=\frac{1}{c}\int_{V\setminus V_i}\vec{j}\cdot\delta'\vec{A}dV+\int_{V\setminus V_i}\varphi\delta'\rho_e dV=\frac{1}{c}\int_{V\setminus V_i}\vec{j}\cdot\delta'\vec{A}dV.$$

В этом соотношении $\delta'\rho_e=0$, а оставшееся слагаемое представляет собой работу внешних ЭДС по поддержанию постоянных токов $\vec{j}$ вне V_i. Таким образом,

$$\left(\delta F\right)_{T,c_k}=\frac{1}{c}\int_{V\setminus Vi}\vec{j}\cdot\delta'\vec{A}dV+\int_{V_i}\delta\vec{r}\cdot\left[\nabla p_0+\nabla p^{em}-\frac{\vec{B}\nabla\vec{H}+\vec{D}\nabla\vec{E}}{4\pi}\right]dV.$$

Второе слагаемое в этом выражении представляет собой работу, совершаемую на виртуальных перемещениях объема V_i по преодолению сил воздействия электромагнитного поля на среду и внешнего механического давления:

$$\int_{V_i} \delta\vec{r} \cdot \nabla p_0 dV .$$

Отсюда следует, что пондеромоторная сила имеет объемную плотность;

$$\vec{f}^{\,em} = -\nabla p^{em} + \frac{\vec{B}\nabla\vec{H} + \vec{D}\nabla\vec{E}}{4\pi},$$

обусловленную намагничиванием и поляризацией среды.

При наличии свободных зарядов в объеме и токов $\vec{j}$ в силу принципа суперпозиции к последнему выражению необходимо добавить силу Кулона $\rho_e\vec{E}$ и силу Лоренца $\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$

$$\vec{f}^{\,em} = -\nabla p^{em} + \frac{\vec{B}\nabla\vec{H} + \vec{D}\nabla\vec{E}}{4\pi} + \rho_e\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B} \qquad (2.15)$$

Используя уравнения (2.13), правую часть равенства (2.15) можно преобразовать к виду

$$\vec{f}^{\,em} = div\,\hat{P}^{em} \qquad (2.16)$$

где

$$\hat{P}^{em} = -p^{em}\hat{\delta} + \frac{\vec{B}\vec{H} + \vec{D}\vec{E}}{4\pi} \qquad (2.17)$$

- максвеллов тензор натяжений.

К постулатам электродинамики относится предположение о том, что для переменных электромагнитных полей в неподвижных средах пондеромоторная сила имеет вид

$$\vec{f}^{\,em} = div\,\hat{P}^{em} - \frac{\partial\vec{g}^{\,em}}{\partial t}, \qquad (2.18)$$

где $\vec{g}^{\,em}$ - объемная плотность импульса электромагнитного поля, выбираемая либо в соответствии с гипотезой Минковского

$$\vec{g}^{\,em,Минк} = \frac{1}{4\pi c}\vec{D}\times\vec{B}, \qquad (2.19)$$

либо в соответствии с гипотезой Абрагама

$$\vec{g}^{\,em,Абр} = \frac{1}{4\pi c}\vec{E}\times\vec{H} \qquad (2.20)$$

Справедливость той или иной гипотезы проверяется экспериментом. На данном этапе развития электродинамики принята гипотеза Абрагама. Следует заметить, что различие между двумя гипотезами ощутимо лишь для электромагнитных полей высокой частоты (порядка частоты видимого света) [10].

Используем известное векторное равенство

$$\left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b}=\vec{a}\nabla\vec{b}-\vec{a}\times rot\,\vec{b} \tag{2.21}$$

уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} &c\ rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, && div\vec{B}=0 \\ &c\ rot\,\vec{H}=4\pi\vec{j}+\frac{\partial D}{\partial t}, && div\vec{D}=4\pi\rho_e \end{aligned} \tag{2.22}$$

и импульс электромагнитного поля в форме Абрагама, преобразуем выражение для пондеромоторной силы (2.18) к виду

$$\vec{f}^{em}=-\nabla p^{em}+\frac{\vec{B}\nabla\vec{H}+\vec{D}\nabla\vec{E}}{4\pi}+\rho_e\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}+\vec{f}_A \tag{2.23}$$

либо, учитывая соотношение (2.3) ,

$$\vec{f}^{em}=-\nabla p^{em}+\frac{B\nabla H+D\nabla E}{4\pi}+\rho_e\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}+\vec{f}_A \tag{2.24}$$

где

$$\vec{f}_A=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}\times\vec{B}-\vec{E}\times\vec{H}\right)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}\times\vec{B}-\vec{M}\times\vec{E}\right). \tag{2.25}$$

называется силой Абрагама, четвертое слагаемое – сила Лоренца, третье представляет собой силу Кулона, а первые два возникают в результате поляризации и намагничивания среды. Сравнение соотношений (2.15) и (2.23) показывает, что в переменных электромагнитных полях появляется дополнительная сила – сила Абрагама.

§2.Тензор энергии-импульса. Пондеромоторная сила для движущихся сплошных сред

Вначале рассмотрим поток невзаимодействующих частиц, образующих сплошную среду и движущихся без внешнего силового поля [7]. Уравнение неразрывности в данном случае имеет такой же вид, как и (1.10). В уравнении импульсов отсутствуют источник и кондуктивный поток импульса, отражающий взаимодействие частиц среды между собой. Эти уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t}+div\vec{S}=0;\qquad \frac{\partial\vec{g}}{\partial t}+div\left(\rho\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}}\right)=0, \tag{2.26}$$

где $e=\rho c^2$ согласно закону специальной теории относительности о связи массы с энергией и представляет собой объемную плотность энергии; $\vec{S}=e\vec{\mathrm{v}}=\rho c^2\vec{\mathrm{v}}$ объемная плотность потока энергии; $\vec{g}=\rho\vec{\mathrm{v}}$ - объемная плотность импульса системы; c - скорость света в вакууме. Воспользуемся четырехмерным аппаратом специальной теории относительности, введем пространство переменных $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$ с симметрическим метрическим тензором $G_{00} = 1, G_{11} = G_{22} = G_{33} = -1,\ G_{ij} = 0\left(i \neq j\right)$ (здесь и в дальнейшем латинские индексы принимают значения 0, 1, 2 , 3, а греческие 1, 2, 3, по повторяющимся индексам – суммирование в соответствующих пределах). В этом случае уравнение (2.26) могут быть сведены к одному уравнению

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} = 0 \tag{2.27}$$

с тензором T^{ik}, который называется тензором энергии-импульса, и имеет следующую структуру:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} e & S_1/c & S_2/\mathrm{c} & S_3/\mathrm{c} \\ cg_1 & \rho \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_1 & \rho \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2 & \rho \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_3 \\ cg_2 & \rho \mathrm{v}_2 \mathrm{v}_1 & \rho \mathrm{v}_2 \mathrm{v}_2 & \rho \mathrm{v}_2 \mathrm{v}_3 \\ cg_3 & \rho \mathrm{v}_3 \mathrm{v}_1 & \rho \mathrm{v}_3 \mathrm{v}_2 & \rho \mathrm{v}_3 \mathrm{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \vec{S}/c \\ c\vec{g} & \rho \vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Здесь $T^{00} = e$ является объемной плотностью энергии системы, $T^{0\alpha} = S_\alpha / c = cg_\alpha = T^{\alpha 0}$. Свойство симметрии тензора энергии-импульса соответствует одному из основных постулатов специальной теории относительности, указывающих на связь потока энергии с импульсом,

$$\vec{S} = c^2 \vec{g} \tag{2.29}$$

Инвариантная форма записи уравнения энергии-импульса (2.27) позволяет перейти от записи уравнений энергии и импульса в одной инерциальной системе отсчета K' в другой K, движущейся по отношению к первой с постоянной скоростью $-\vec{V}$. В специальной теории относительности переход от одной системы отсчета к другой осуществляется с помощью преобразования Лоренца. Частное преобразование Лоренца для системы K и K' с параллельными осями координат, когда система K движется вдоль оси Ox' системы K' со скоростью $-\vec{V}$, определяется матрицей $\left\| B^i_{\cdot k} \right\|$

$$\left\| B^i_{\cdot k} \right\| = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta = V/c,\ \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$, а соответствующие формулы преобразования имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x^0 = \gamma x'^0 + \gamma x'^1 \\
&x^1 = \gamma\beta x'^0 + \gamma x'^1 \\
&x^2 = x'^2;\; x^3 = x'^3
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Получим общее преобразование Лоренца, когда оси координат системы K и K' направлены произвольным образом. Обозначим через $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ радиус-векторы произвольной точки пространства соответственно в системах отсчета K и K', а через $\vec{r}_{\|}, \vec{r}\,'_{\|}, \vec{r}_{\perp}, \vec{r}\,'_{\perp}$ -параллельную и перпендикулярную к вектору скорости $\vec{V}$ составляющие этих радиусов-векторов: $\vec{r} = \vec{r}_{\|} + \vec{r}_{\perp}$, $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'_{\|} + \vec{r}\,'_{\perp}$. Тогда $r_{\|} = \vec{r} \cdot \vec{V} / V$ и $r'_{\|} = \vec{r}\,' \cdot \vec{V} / V$ связаны вторым соотношением (2.30), а $\vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\|}$ и $\vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r}\,' - \vec{r}\,'_{\|}$ последними двумя соотношениями (2.30)

$$
r_{\|} = \gamma\beta x'^0 + r'_{\|}, \quad r_{\perp} = r'_{\perp}
$$

а, следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\vec{r} = \vec{r}_{\|} + \vec{r}_{\perp} = \\
&= \gamma x'^0 \vec{V} / c + \gamma r'_{\|} \vec{V} / V + \vec{r}\,' - r'_{\|} \vec{V} / V = \\
&= \gamma x'^0 \vec{V} / V + \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{V} \cdot \vec{r})\vec{V} / V^2
\end{aligned}
$$

Преобразование же временной составляющей аналогично первому соотношению (2.30)

$$
x^0 = \gamma x'^0 + \gamma\beta r_{\|} = \gamma x'^0 + \gamma \frac{\vec{V} \cdot \vec{r}}{c}
$$

Отсюда следует, что преобразование Лоренца задается матрицей

$$
\left\| B^i_{\cdot k} \right\| = \begin{pmatrix}
\gamma & \gamma V_x / c & \gamma V_y / c & \gamma V_x / c \\
\gamma V_x / c & 1 + (\gamma - 1)\dfrac{V_x V_x}{V^2} & (\gamma - 1)\dfrac{V_x V_y}{V^2} & (\gamma - 1)\dfrac{V_x V_z}{V^2} \\
\gamma V_y / c & (\gamma - 1)\dfrac{V_y V_x}{V^2} & 1 + (\gamma - 1)\dfrac{V_y V_y}{V^2} & (\gamma - 1)\dfrac{V_y V_z}{V^2} \\
\gamma V_z / c & (\gamma - 1)\dfrac{V_z V_x}{V^2} & (\gamma - 1)\dfrac{V_z V_y}{V^2} & 1 + (\gamma - 1)\dfrac{V_z V_z}{V^2}
\end{pmatrix}. \tag{2.31}
$$

Для установления вида тензора энергии-импульса для движущихся сред намагничивающихся и поляризующихся сред воспользуемся следующими соображениями. Установим основные уравнения баланса в собственной системе отсчета K^* - инерциальной системе отсчета, скорость движения которой в данный момент времени совпадает со скоростью рассматриваемой частицы среды. При этом учтем, что, во-первых, в системе K^* $\vec{\mathrm{v}} = 0$, а $\nabla\vec{\mathrm{v}}$ и $\partial\vec{\mathrm{v}} / \partial t$ в общем случае отличны от нуля, во-вторых, кроме электромагнитного поля, не действуют никакие другие силовые поля и в системе не происходит превращения одной компоненты в другую ($m_k = 0$ в соотношении (1.17)). Тогда имеет место уравнения (1.10), (1.17), (1.20) с $\rho\vec{f} = \vec{f}^{em}$, (1.22), (1.25). Здесь уравнение импульсов (1.20) с учетом равенства (2.18) может быть преобразовано к виду, отражающему закон сохранения полного импульса,

$$\frac{\partial\left(\rho\vec{\mathrm{v}} + \vec{g}^{em}\right)}{\partial t} + div\hat{\Pi} = 0, \tag{2.32}$$

где

$$\hat{\Pi} = \rho\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}} + \hat{P} - \hat{P}^{em} \tag{2.33}$$

-объемная плотность потока импульса.

Уравнения баланса энтропии получим из тождества Гиббса (2.2), которое представим в виде

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \rho\frac{du}{dt} + p\,div\vec{\mathrm{v}} - \sum_{k=1}^{N}\mu_k\rho\frac{dc_k}{dt} - \frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot\rho\frac{d}{dt}\frac{\vec{B}}{\rho} - \frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot\rho\frac{d}{dt}\frac{\vec{D}}{\rho} \tag{2.34}$$

Воспользуемся уравнением неразрывности (1.10), теоремой Пойтинга и тем, что $\vec{\mathrm{v}} = 0$ в системе K^*, преобразуем последние два слагаемых в соотношении (2.34) к виду

$$-\frac{\vec{H}}{4\pi}\cdot\rho\frac{d}{dt}\frac{\vec{B}}{\rho} - \frac{\vec{E}}{4\pi}\cdot\rho\frac{d}{dt}\frac{\vec{D}}{\rho} = \vec{j}\cdot\vec{E} + div\left(\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

Преобразование остальных слагаемых в соотношении (2.34) и приведению его к уравнению баланса производится совершенно аналогично §4, гл.1. Тогда уравнение баланса энтропии в системе K^* можно записать в виде

$$\rho\frac{ds}{dt} = -div\left(\frac{\vec{J}_q}{T}\right) + \sigma_s \tag{2.35}$$

где

$$\vec{J}_q = \vec{J}_u - \sum_{k=1}^{N}\mu_k\vec{I}_k - \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H} \tag{2.36}$$

-объемная плотность теплового потока,

$$\sigma_s = -p^{\mathrm{v}}\frac{div\vec{\mathrm{v}}}{T} - \vec{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{N}\vec{I}_k\cdot\frac{\nabla\left(\mu_k - \mu_N\right)}{T} + \overset{0}{\tau}:\frac{\overset{so}{\nabla\vec{v}}}{T} + \vec{j}\cdot\frac{\vec{E}}{T} \tag{2.37}$$

-производство энтропии.

Феноменологические соотношения (1.41), (1.44) между термодинамическими силами и потоками остаются прежними, а (1.42), (1.43) видоизменяются. Введем массовую плотность заряда z_k k -й компоненты. Тогда объемная плотность тока $\vec{j}$ в K^* определяется формулой

$$\vec{j}=\sum_{k=1}^{N}\rho_k z_k \vec{\mathrm{v}}_k=\sum_{k=1}^{N}\rho_k \vec{w}_k z_k=\sum_{k=1}^{N} z_k \vec{I}_k \tag{2.38}$$

и третье, и пятое слагаемые в (2.37) можно объединить в одно

$$\sum_{k=1}^{N-1}\vec{I}_k\cdot\frac{\nabla\left(\mu_k-\mu_N\right)}{T}-j\cdot\frac{E}{T}=\sum_{k=1}^{N-1}I_k\cdot\frac{\nabla\left(\mu_k-\mu_N\right)-\left(z_k-z_N\right)\vec{E}}{T}.$$

В этом случае феноменологические соотношения (1.42), (1.43) переходят в равенства

$$\vec{J}_q=-L^{\mathrm{v}}\frac{\nabla T}{T^2}-\sum_{k=1}^{N-1}L_k^{\mathrm{v}}\frac{\nabla\left(\mu_k-\mu_N\right)-\left(z_k-z_N\right)\vec{E}}{T}. \tag{2.39}$$

$$\vec{I}_k=-L_k^{\mathrm{v}}\frac{\nabla T}{T^2}-\sum_{k=1}^{N-1}L_{kj}^{\mathrm{v}}\frac{\nabla\left(\mu_k-\mu_N\right)-\left(z_k-z_N\right)\vec{E}}{T} \tag{2.40}$$

Приведенные выше соображения позволяют получить выражение для тензора энергии-импульса в собственной системе отсчета K^*. В дальнейшем все величины, определяемые в K^*, будем отмечать звездочкой вверху! Так, в полную энергию системы, помимо внутренней энергии $\rho^* u^*$, где u^* определяется соотношением (2.11), необходимо включить в соответствии со специальной теорией относительности энергии, связанную с массой $\rho^* c^2$,

$$T^{*00}=e^*=\rho^* c^2+\rho^* u^*. \tag{2.41}$$

Поток полной энергии в K^* состоит из потока внутренней энергии, объемная плотностью которой согласно равенству (2.36) с учетом $\vec{\mathrm{v}}^*=0$ равна

$$\vec{S}^*=\vec{J}_u^*=\vec{J}_q^*+\sum_{k=1}^{N}\mu_k^*\vec{I}_k^*+\vec{J}^{*em} \tag{2.42}$$

где $\vec{J}^{*em}=\dfrac{c}{4\pi}\vec{E}^*\times\vec{H}^*$.

Отсюда следует, что полный импульс $\vec{g}^*$ в системе K^* в соответствии с формулой (2.29)

$$\vec{g}^*=\frac{1}{c^2}\vec{J}_q^*+\frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{N}\mu_k^*\vec{I}_k^*+\vec{g}^{*\mathrm{em}} \tag{2.43}$$

Пространственная часть $T^{*\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса определяется тензором $\hat{\Pi}^*$, который, как следует, из соотношения (2.33)

$$\hat{\Pi}^*=\hat{P}^*-\hat{P}^{*em} \tag{2.44}$$

Окончательно тензор энергии-импульса T^{*ik} в собственной системе отсчета K^* имеет вид

$$T^{*ik} = \begin{pmatrix} e^* & \vec{S}^* / c \\ c\vec{g}^* & \hat{\Pi}^* \end{pmatrix}. \qquad (2.45)$$

Получим выражение для тензора энергии-импульса в системе наблюдателя (неподвижная система отсчета K). Для этого воспользуемся общим преобразованием Лоренца (2.31). Конечной целью является получение уравнений, описывающих движение сред со скоростями, значительно меньшими скорости света. Поэтому воспользуемся, так называемым дорелятивистским приближением, в дальнейшем во всех выражениях будем оставлять слагаемые не выше первого порядка по отношению к V / c.

Энергия систем

$$e = T^{00} = B^{0\cdot}_{.i} B^{0\cdot}_{.k} T^{*ik} = \rho c^2 + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} + \rho u^* + 2\frac{\vec{\mathrm{v}}}{c^2} \cdot \vec{S}^* \qquad (2.46)$$

компонента объемной плотности потока S_α определяется соотношением

$$S_\alpha = cT^{0\alpha} = cB^{0\cdot}_{,i} B^{\alpha\cdot}_{.k} T^{*ik} = c^2 \rho \mathrm{v}_\alpha + \rho u^* \mathrm{v}_\alpha + \frac{\rho \mathrm{v}^2}{2} \mathrm{v}_\alpha + S^*_\alpha + \mathrm{v}_\beta \Pi^*_{\beta\alpha} \qquad (2.47)$$

а компонента полного импульса

$$g_\alpha = S_\alpha / c^2 \qquad (2.48)$$

Пространственная часть тензора энергии-импульса $T^{*\alpha\beta}$ в системе отсчета K принимает вид

$$T^{\alpha\beta} = B^{\alpha\cdot}_{,i} B^{\beta\cdot}_{.k} T^{*ik} = \rho \mathrm{v}_\alpha \mathrm{v}_\beta + \frac{1}{c^2} \mathrm{v}_\alpha S^*_\beta + \frac{1}{c^2} S^*_\alpha \mathrm{v}_\beta + \Pi^*_{\alpha\beta} \qquad (2.49)$$

Тогда, учитывая уравнение неразрывности (1.10), уравнение (2.27) и полученные выше соотношения (2.46)-(2.49), уравнения энергии и импульсов можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + u^* + 2\frac{\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{S}^*}{c^2} \right) + div \left[\rho \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + u^* \right) \vec{\mathrm{v}} + \hat{\Pi}^* \cdot \vec{\mathrm{v}} + \vec{S}^* \right] = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \vec{\mathrm{v}} + \vec{g}^* \right) + div \left[\rho \vec{\mathrm{v}} \vec{\mathrm{v}} + \hat{\Pi}^* + \frac{\vec{\mathrm{v}} \vec{S}^* + \vec{S}^* \vec{\mathrm{v}}}{c^2} \right] = 0 \qquad (2.51)$$

Проведем оценки слагаемых, входящих в уравнения (2.50), (2.51). Для примера рассмотрим воздух при нормальных условиях ($T = 20^0 C,\ p = 1$ атм). Справочные данные для воздуха следующие: плотность $\rho = 0{,}001 \text{г/см}^3$, удельная теплоемкость $C_V = 0{,}18$ кал/г $\cdot$ град=$7{,}7 \cdot 10^6$ эрг/г $\cdot$ град, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}022$ ккал/м $\cdot$ ч $\cdot$ град=$2{,}55 \cdot 10^2$эрг/см $\cdot$ с $\cdot$ град. В качестве характерных величин примем: скорость $V = 3 \cdot 10^3$ см/с, градиент температуры $\nabla T = 1$ град/см, напряженности электрического и магнитного полей

$E^* = 10^5$ В/м=3,3 $г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$ и $H^* = 1$Тл=10^4 $г^{1/2}см^{-1/2}с^{-1}$. Тогда тепловой поток $\vec{J}_q^* = -\lambda \nabla T$ имеет порядок $J_q^* = 2,55 \cdot 10^2$ эрг/см^{2}с, а поток электромагнитной энергии $\vec{J}^{*em} = c/4\pi \vec{E}^* \times \vec{H}^*$ - порядок $J^{*em} = 8 \cdot 10^{13}$ эрг/см^{2}с. Внутренняя энергия ρu^* содержит слагаемое $\rho u_0(\rho, T)$, которое в оценках можно принять равным $\rho c_V T = 2 \cdot 10^6$ эрг/см^3. Слагаемые $2\dfrac{\vec{v}\vec{S}^*}{c^2}$ в (2.50) и $\dfrac{\vec{v}\vec{S}^*}{c^2} + \dfrac{\vec{S}^*\vec{v}}{c^2}$ в

(2.51) имеют порядок $5 \cdot 10^{-2}$ эрг/см^3, а $P_{\alpha\beta}^{*em} \sim 10 -$ г эрг $см^{-3}$. Эти оценки говорят о том, что уравнения (2.50), (2.51) можно упростить, отбросив в них несущественные слагаемые, и привести их к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + u^*\right) + div\left[\rho\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + u^*\right)\vec{\mathrm{v}} + \hat{\Pi}^* \cdot \vec{\mathrm{v}} + \vec{J}^{*em}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\vec{\mathrm{v}} + g^{*em}\right) + div\left[\rho\vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{v}} + \hat{\Pi}^*\right] = 0$$

Отсюда следует, что объемная плотность пондеромоторной силы равна

$$\begin{aligned} \vec{f}^{em} &= div\,\hat{P}^{*em} - \frac{\partial \vec{g}^{*em}}{\partial t} = \\ &= -\nabla p_{em}^* + \frac{B^*\nabla H^* + D^*\nabla H^*}{4\pi} + \rho_e^* \vec{E}^* + \frac{1}{c}\vec{j}^* \times \vec{B}^* + \vec{f}_A^* \end{aligned} \tag{2.52}$$

Окончательно выпишем те соотношения, которые составляют основную систему уравнений, описывающих динамику изотропной сплошной среды в дорелятивистском приближении

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\,\vec{\mathrm{v}} = 0 \tag{2.53}$$

$$\rho\frac{dc_k^*}{dt} = -div\,\vec{I}_k^* \qquad (k = 1, 2, ..., N-1) \tag{2.54}$$

$$\rho\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = -div\,\hat{P}^* + \vec{f}^{em} + \rho\vec{f} = 0 \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{ds^*}{dt} &= -div\left(\vec{J}_q^*/T\right) + p^{\mathrm{v}}\frac{div\,\vec{\mathrm{v}}}{T} + \overset{0}{\tau} : \frac{\overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}}}{T} - \vec{J}_q^* \cdot \frac{\nabla T}{T^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{N-1} \vec{I}_k^* \cdot \frac{\nabla\left(\mu^*_k - \mu^*_N\right) - \left(z_k^* - z_N^*\right)\vec{E}^*}{T} \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\hat{P}^* = p^*\hat{\delta} - \hat{\tau}^*, \qquad \hat{\tau}^* = \overset{0}{\tau^*} + \frac{1}{3}p^{*\mathrm{v}}\hat{\delta} \tag{2.57}$$

$$p^* = p^*\left(T, \rho, \mathrm{c}_1^*, ..., \mathrm{c}_{N-1}^*\right) \tag{2.58}$$

$$p^{*\mathrm{v}} = -L^{*s}\,\frac{div\,\vec{\mathrm{v}}}{T} \quad (2.59)$$

$$\overset{o}{\tau}{}^{*} = L^{*\mathrm{t}}\,\frac{\overset{so}{\nabla\vec{\mathrm{v}}}}{T} \quad (2.60)$$

$$\vec{f}^{\,em} = -\nabla p^{*\mathrm{em}} + \frac{\vec{B}^{*}\nabla\vec{H}^{*} + \vec{D}^{*}\nabla\vec{E}^{*}}{4\pi} + \rho_e\vec{E}^{*} + \frac{1}{c}\vec{j}^{\,*}\times\vec{B}^{*} + \vec{f}_A^{*} \quad (2.61)$$

$$\vec{f}_A^{*} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{P}^{*}\times\vec{B}^{*} - \vec{M}^{*}\times\vec{E}^{*}\right) \quad (2.62)$$

$$\vec{J}_q^{*} = -L^{*\mathrm{v}}\,\frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{N-1} L_k^{*\mathrm{v}}\,\frac{\nabla\left(\mu_k^{*} - \mu_N^{*}\right) - \left(z_k - z_N\right)\vec{E}^{*}}{T} \quad (2.63)$$

$$\vec{I}_k^{*} = -L^{*\mathrm{v}}\,\frac{\nabla T}{T^2} - \sum_{k=1}^{N-1} L_{kj}^{*\mathrm{v}}\,\frac{\nabla\left(\mu^{*}{}_k - \mu^{*}{}_N\right) - \left(z_k - z_N\right)\vec{E}^{*}}{T} \quad (2.64)$$

$$\left(k = 1, 2, \ldots N-1\right)$$

$$\mu_k^{*} = \mu_k^{*}\left(T, \rho, c_1^{*}, \ldots, c_{N-1}^{*}, E^{*}, H^{*}\right) \;\; \left(k = 1, 2, \ldots, N\right) \quad (2.65)$$

$$s^{*} = s^{*0} + s^{*em} \quad (2.66)$$

$$s^{*0} = s^{*0}\left(T, \rho, c_1^{*}, \ldots, c_{N-1}^{*}\right) \quad (2.67)$$

$$s^{*em} = \frac{1}{\rho}\int_0^{H^{*}}\left(\frac{\partial M^{*}}{\partial T}\right)_{\rho^{*}, c_k^{*}, H^{*}} dH' + \frac{1}{\rho}\int_0^{E^{*}}\left(\frac{\partial P^{*}}{\partial T}\right)_{\rho^{*}, c_k^{*}, E^{*}} dE' \quad (2.68)$$

$$\rho\frac{dc_k^{*}z_k}{dt} = -div\left(z_k\vec{I}_k^{*}\right) \;\; \left(k = 1, 2, \ldots, N\right) \quad (2.69)$$

$$p_{em}^{*} = \frac{H^{*2} + E^{*2}}{8\pi} - \rho^2\int_0^{H^{*}}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{M^{*}}{\rho}dH' - \rho^2\int_0^{E^{*}}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{P^{*}}{\rho}dE' \quad (2.70)$$

$$\rho_e = \rho\sum_{k=1}^{N-1}\left(c_k^{*} - c_N^{*}\right)z_k \quad (2.71)$$

$$\vec{j}^{\,*} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(z_k - z_N\right)\vec{I}_k^{*} \quad (2.72)$$

$$\vec{B}^{*} = B^{*}\left(T, \rho, c_1^{*}, \ldots, c_{N-1}^{*}, H^{*}\right)\vec{H}^{*} / H^{*}. \quad (2.73)$$

$$\vec{D}^{*} = D^{*}\left(T, \rho, c_1^{*}, \ldots, c_{N-1}^{*}, E^{*}\right)\vec{E}^{*} / E^{*}. \quad (2.74)$$

$$\vec{B}^{*} = \vec{B} - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{E}, \qquad \vec{H}^{*} = \vec{H} - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{D} \quad (2.75)$$

$$\vec{D}^{*} = \vec{D} + \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{H}, \qquad \vec{E}^{*} = \vec{E} - \frac{1}{c}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B} \quad (2.76)$$

$$c\,rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad div\,\vec{B} = 0 \tag{2.77}$$

$$c\,rot\,\vec{H} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad div\,\vec{D} = 4\pi\rho_e \tag{2.78}$$

$$\vec{j} = \vec{j}^{*} + \rho_e\vec{v}. \tag{2.79}$$

Здесь учтено то, что с точностью до членов порядка v^2/c^2 выполняется равенства $\rho_e^* = \rho_e, T^* = T, z_k^* = z_k$, а также $\nabla\vec{v}^* = \nabla\vec{v}$. В правую часть уравнения (2.55) добавлена объемная плотность механической силы $\rho\vec{f}$.

§3. Граничные условия.

Внутри области непрерывности характеристик могут содержаться поверхности, на которых эти характеристики претерпевают разрыв (либо сами характеристики, либо соответствующие производные от них по пространственным переменным). В этом случае дифференциальные уравнения теряют смысл в точках таких поверхностей. Интегральная форма уравнений, эквивалентных дифференциальным уравнениям, остается справедливой и позволяет получить предельные соотношения, связывающие между собой значения величин, вычисляемые по разные стороны поверхностей. Эти соотношения называют динамическими граничными условиями. В некоторых случаях на таких поверхностях можно указать дополнительные соотношения физического или кинематического характера. Ниже приведены граничные условия, которые позволяют сформулировать краевую задачу для определения величин, соответствующих выбранной модели среды. Процедура получения граничных условий соответствует схеме, описанной в книгах [11,12].

Рассмотрим поверхность $\Sigma = \Sigma(t)$ сильного разрыва - поверхность, при переходе через которую соответствующие функции терпят конечный разрыв. Движение такой поверхности можно определить скоростью движения U ее точек вдоль нормали $\vec{n}: \vec{U} = \vec{n}U$. Выберем произвольную точку A с радиус-вектором $\vec{r}_A$ поверхности Σ и рассмотрим ее в произвольный, но фиксированный момент времени t'. Введем инерциальную систему координат K', движущуюся со скоростью $\vec{U}_A = \vec{U}(t',\vec{r}_A) = U(t',\vec{r}_A)\vec{n}(t',\vec{r}_A)$, и обозначим поле скоростей среды в этой системе координат через $\vec{w} = \vec{w}(t,\vec{r}) = \vec{v}(t,\vec{r}) - \vec{U}_A$. Тогда в системе координат K' точка A поверхности Σ в момент времени $t = t'$ находится в покое. Рассмотрим неподвижный в K' объем ΔV, заключенный внутри замкнутой поверхности $S = S_1 + S_\delta + S_2$. Здесь S_2, S_1 -эквидистантные поверхности, расположенные на расстоянии h от $\Sigma' = \Sigma(t')$, соответственно, со стороны нормали $\vec{n}_A = \vec{n}(t', \vec{r}_A)$ и противоположной стороны; S_δ- боковая поверхность, образованная нормалями к Σ', проходящими через замкнутый контур L, сам контур L лежит на поверхности Σ' и охватывает ее часть $\Delta\Sigma$ (рис. 2.1).

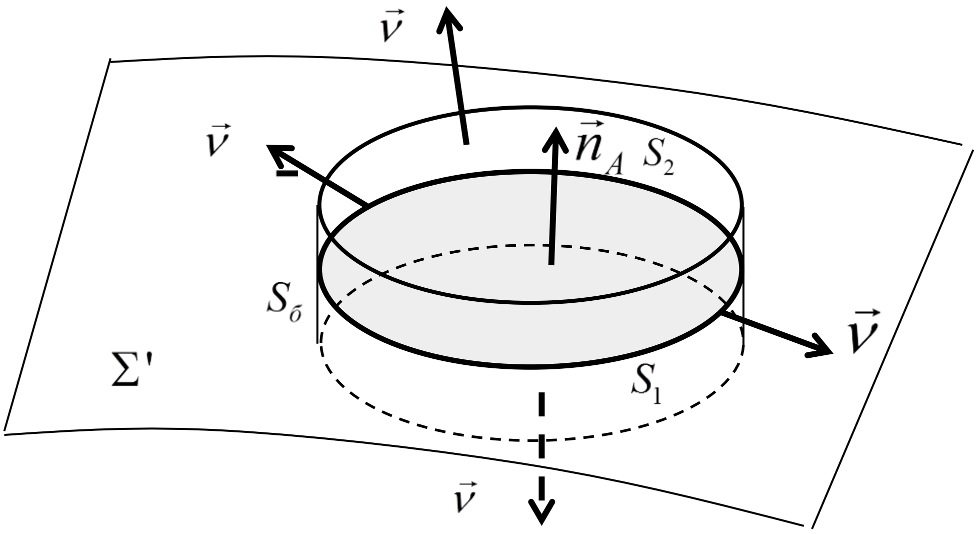

Рис.2.1

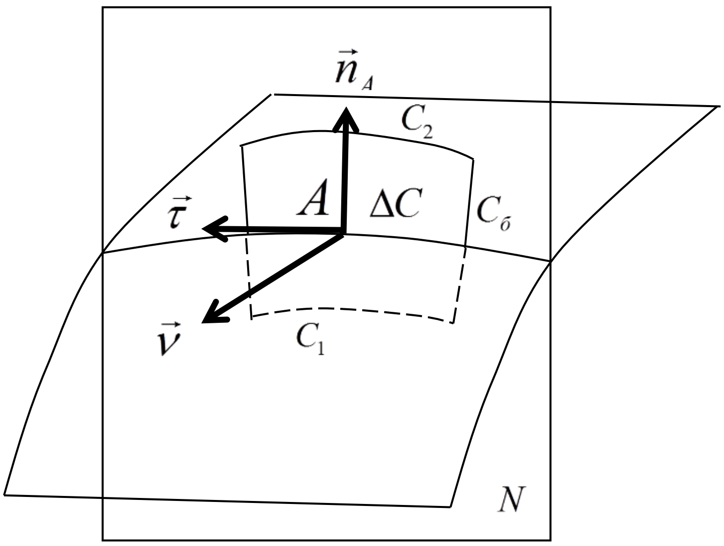

Рис.2. 2

Кроме того, рассмотрим неподвижную в K' плоскость N, проходящую через точку A и содержащую нормаль $\vec{n}_A$. Эта плоскость пересекается с поверхностью Σ' по линии ΔC. Ограничим часть ΔN плоскости N контуром $C = C_1 + C_\delta + C_2$, состоящим из эквидистантных линий C_1, C_2, расположенных на расстоянии h от ΔC, и C_δ (рис.2.2).

Дальше потребуется интегральная форма записи основных уравнений в применении к неподвижному объему ΔV. Эти уравнения совпадают по форме с соотношениями (1.4) и с учетом того, что операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени здесь перестановочны, будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V} a_V dV = -\oint_S \vec{\nu}\cdot\vec{J}_a^0\, dS + \int_{\Delta V}\sigma_a dV.$$

Тогда в этой форме уравнения (2.53), (2.54), (2.51), (2.50), (2.69), вторые уравнения в (2.77) и (2.78) записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho dV = -\oint_S \rho\vec{\nu}\cdot\vec{w}\,dS,\ \frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho c_k^* dV = -\oint_S \vec{\nu}\cdot\left(\rho c_k^*\vec{w} + \vec{I}_k^*\right)dS \\
\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\left(\rho\vec{w} + \vec{g}^{*em}\right)dV = -\oint_S \vec{\nu}\cdot\left(\rho\vec{w}\vec{w} + \hat{\Pi}^*\right)dS \\
\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho\left(\frac{w^2}{2} + u^*\right)dV = -\oint_S \vec{\nu}\cdot\left[\rho\left(\frac{w^2}{2} + u^*\right)\vec{w} + \hat{\Pi}^*\cdot\vec{w} + \vec{S}^*\right]dS \qquad (2.80) \\
\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho c_k^* z_k dV = -\oint_S \vec{\nu}\cdot\left(\rho c_k^* z_k\vec{w} + z_k\vec{I}_k^*\right)dS \\
\oint_S \vec{\nu}\cdot\vec{B}' dS = 0; \qquad \oint_S \vec{\nu}\cdot\vec{D}' dS = 4\pi\int_{\Delta V}\rho_e dV
\end{gathered}$$

Первые уравнения в соотношениях (2.77) и (2.78) запишем в интегральной форме в системе K', как это делается в электродинамике для контура C и ограниченной им части ΔN плоскости N,

$$\begin{gathered}
c\oint_c \vec{E}'\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_{\Delta N}\vec{\nu}\cdot\vec{B}' dN \\
c\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{l} = 4\pi\int_{\Delta N}\vec{\nu}\cdot\vec{j}' dN + \frac{d}{dt}\int_{\Delta N}\vec{\nu}\cdot\vec{D}\,dN
\end{gathered} \qquad (2.81)$$

Затем совершим предельный переход, устремляя h к нулю. Тогда в интегральных соотношениях (2.80), (2.81) слагаемые, содержащие интегралы по объему ΔV и интегралы по поверхности ΔN, устремляются к нулю. Если учесть направление нормали $\vec{\nu}$ на S_1 и S_2 : $\vec{\nu}\big|_{S_1} = \vec{n},\ \vec{\nu}\big|_{S_2} = -\vec{n}$, направление обхода контура C : на C_2 оно совпадает с направлением на линии ΔC, определяемым касательным вектором $\vec{\tau}$, на C_1 - противоположно ему, то предельные соотношения (2.80), (2.81) принимают вид:

$$\int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \rho w_n \right\rangle d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \rho c_k^* + I_{kn}^* \right\rangle d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \rho \vec{w} w_n + \vec{n}\cdot\hat{\Pi}^* \right\rangle d\Sigma = 0$$

$$\int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \rho\left(\frac{w^2}{2} + u^*\right) w_n + \vec{n}\cdot\hat{\Pi}^*\cdot\vec{w} + S_n^* \right\rangle d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \rho c_k^* z_k w_n + z_k I_{kn}^* \right\rangle d\Sigma = 0$$

$$\int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle B_n' \right\rangle d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle D_n' \right\rangle d\Sigma = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \vec{E}'\cdot\vec{\tau} \right\rangle dl = 0, \quad \int\limits_{\Delta\Sigma}\left\langle \vec{H}'\cdot\vec{\tau} \right\rangle dl = 0$$

Здесь $\vec{E}', \vec{H}', \vec{D}', \vec{B}'$ - характеристики электромагнитного поля, определяемые в системе K', угловые скобки означают разность значений величины, стоящей между ними, где уменьшаемое – предельное значение величины, определяемое на поверхности Σ' со стороны, куда указывает нормаль, вычитаемое – значение этой величины с противоположной стороны. Затем, стягивая поверхность $\Delta\Sigma$ и линию ΔC к точке A в соответствии с теоремой о среднем интегрального исчисления, получаем граничные условия

$$\begin{gathered}
\left\langle \rho w_n \right\rangle = 0, \quad \left\langle \rho c_k^* + I_{kn}^* \right\rangle = 0, \quad \left\langle \rho \vec{w} w_n + \vec{n}\cdot\hat{\Pi}^* \right\rangle = 0 \\
\left\langle \rho\left(\frac{w^2}{2} + u^*\right) w_n + \vec{n}\cdot\hat{\Pi}^*\cdot\vec{w} + S_n^* \right\rangle = 0 \\
\left\langle \rho c_k^* z_k w_n + z_k I_{kn}^* \right\rangle = 0, \quad \left\langle B_n' \right\rangle = 0, \quad \left\langle D_n' \right\rangle = 0 \\
\left\langle \vec{E}'\cdot\vec{\tau} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \vec{H}'\cdot\vec{\tau} \right\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{2.82}$$

Введем вектор $\vec{\nu} = \vec{n}_A \times \vec{\tau}$ (см. рис.2.2). Тогда соотношения (2.82) можно преобразовать к виду

$$\left\langle \vec{H}'\cdot\vec{\tau} \right\rangle = \left\langle \vec{H}'\cdot(\vec{\nu}\times\vec{n}) \right\rangle = \left\langle \vec{\nu}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{H}'\right) \right\rangle = 0.$$

И в силу произвола выбора вектора $\vec{\tau}$, а следовательно, и вектора $\vec{\nu}$ будут иметь место равенства

$$\left\langle \vec{E}' - \vec{n}\left(\vec{E}'\cdot\vec{n}\right) \right\rangle = 0, \tag{2.83}$$

$$\left\langle \vec{n}\times\vec{H}' \right\rangle = 0. \tag{2.84}$$

Формулы, связывающие векторы $\vec{E}', \vec{H}', \vec{D}', \vec{B}', \vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$, такие же, как и формулы (2.75), (2.76), если заменить в них звездочку на штрих.

§4. Поверхностные явления и граничные условия

Часто при получении граничных условий на поверхностях раздела сред необходимо учитывать дополнительные процессы, происходящие на этих поверхностях (химические процессы, протекающие на границе горения; поверхностное натяжение на поверхности жидкости; образование поверхностного заряда на поверхностях контакта сред с различной электропроводностью, поверхностные токи и т.д.). Укажем, как изменяются граничные условия на поверхностях контактного разрыва (через такие поверхности нет перетекания вещества: $U = \mathrm{v}_n$, а, следовательно, $w_n = 0$), когда имеются поверхностное натяжение, поверхностные заряды и токи.

Обозначим через α, коэффициент поверхностного натяжения, зависящий от температуры $\alpha = \alpha(T)$. Тогда на объем ΔV действуют дополнительные силы, распределенные по контуру L, направленные по нормали $\vec{\nu}$, и линейная плотность которых равна $\alpha\vec{\nu}$ (рис.2.1). В этом случае в правую часть третьего уравнения в (2.80) необходимо добавить слагаемое, равное

$$\vec{I} = \oint_L \alpha\vec{\nu}\,dl. \qquad (2.85)$$

Дальнейшее преобразование $\vec{I}$ требует введения криволинейной системы координат (u^1, u^2, n), где (u', u^2)-криволинейные координаты на поверхности Σ; n- длина отрезка, отсчитываемая вдоль нормали $\vec{n}$ от поверхности Σ, с метрического тензором $g_{ij} = g_{ij}(u', u^2, n)$. Компоненты метрического тензора g_{ij} связаны с компонентами первой $a_{\alpha\beta}$, второй $b_{\alpha\beta}$ и третьей $c_{\alpha\beta}$ квадратичных форм поверхности Σ [13]

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2nb_{\alpha\beta} + n^2 c_{\alpha\beta}$$
$$g_{a3} = g_{3\alpha} = 0,\ g_{33} = 1.$$

возьмем произвольное постоянное векторное поле $\vec{a} = \overrightarrow{const}$, образуем скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{I} = \oint_L \vec{\nu}\cdot\alpha\vec{a}\,dl$$

и воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского

$$\oint_L \vec{\nu}\cdot\vec{b}\,dl = \int_{\Delta\Sigma} div_\Sigma \vec{b}_\Sigma\,d\Sigma$$

где $\vec{b}_\Sigma$- касательная к Σ составляющая векторного поля $\vec{b} = \vec{b}(u^1, u^2, 0)$: $\vec{b}_\Sigma = b^\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{b} - \vec{n}(\vec{b}\cdot\vec{n})$, определенного на поверхности Σ; $\vec{e}_\alpha$- базисные векторы криволинейной системы координат (u', u^2) на Σ $(\alpha = 1,2)$;

$div_\Sigma \vec{b}_\Sigma = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\sqrt{a}\, b^\alpha\right)$- поверхностная дивергенция касательного векторного поля, $a = \det\left(a_{\alpha\beta}\right)$.

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{I} = \int_{\Delta\Sigma} div_\Sigma \left(\alpha \vec{a}_\Sigma\right) d\Sigma = \int_{\Delta\Sigma} \left(\vec{a}_\Sigma \cdot \nabla_\Sigma \alpha + \alpha\, div_\Sigma \vec{a}_\Sigma\right) d\Sigma \qquad (2.86)$$

где

$$\nabla_\Sigma \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial u^\beta} \vec{e}^{\,\beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial u^\beta} a^{\beta\gamma} \vec{e}_\gamma$$

$a^{\alpha\beta}$, $\vec{e}^{\,\beta}$ - контравариантные метрический тензор и базис на Σ.

Для криволинейных координат имеет место равенство (получить этот результат предлагается читателю)

$$div\, \vec{a}\big|_{n=0} = \left.\left(\frac{\partial a_n}{\partial n} - 2\kappa a_n + div_\Sigma\, \vec{a}_\Sigma\right)\right|_{n=0}$$

где a_n- проекции вектора $\vec{a}$ на нормаль $\vec{n}$; 2κ-удвоенная средняя кривизна поверхности Σ. Так как $\vec{a} = \overrightarrow{const}$, следовательно,

$$\frac{\partial a_n}{\partial n} = 0, \;\; div\, \vec{a} = 0, \quad div_\Sigma \vec{a}_\Sigma = 2\kappa\, \vec{a} \cdot \vec{n}$$

Учтем этот результат и вынесем в правой части равенства (2.86) вектор $\vec{a}$ за знак интеграла. тогда в силу произвольного выбора вектора $\vec{a}$ из равенства (2.86) следует соотношение

$$\vec{I} = \int_{\Delta\Sigma} \left(2\kappa\alpha\vec{n} + \nabla_\Sigma \alpha\right) d\Sigma \qquad (2.87)$$

В соответствии с последним результатом получаем

$$\left\langle \vec{n} \cdot \hat{\Pi}^* \right\rangle + 2\kappa\alpha\vec{n} + \nabla_\Sigma \alpha = 0 \qquad (2.88)$$

При получении граничного условия, соответствующего уравнению энергии, в данном случае необходимо учитывать то, что в объем ΔV входит поверхность $\Delta\Sigma$, которая несет дополнительную поверхностную энергию

$$\int_{\Delta\Sigma} e_\Sigma d\Sigma$$

где

$$e_\Sigma = \alpha - T\, d\alpha / dT$$

и мощность сил поверхностного натяжения [14]

$$\oint_L \vec{w} \cdot \alpha \vec{v}\, dl$$

Для поучения предельного соотношения здесь удобно воспользоваться уравнением баланса энергии, записанного для материального объема ΔV ,

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Delta V}\rho e\,dV+\int\limits_{\Delta\Sigma}e_{\Sigma}\,d\Sigma\right)=-\oint\limits_{S}\vec{\nu}\cdot\left[\hat{\Pi}^{*}\cdot\vec{w}+\vec{S}^{*}\right]dS+\oint\limits_{L}\vec{\nu}\cdot\alpha\vec{w}\,dl \qquad (2.89)$$

В соответствии с теоремой переноса (1.2) первое слагаемое в левой части (2.89) будет равняться выражению

$$\int\limits_{\Delta V}\frac{\partial\rho e}{\partial t}dV+\oint\limits_{S}\vec{\nu}\cdot\rho e\,\vec{w}\,dS$$

в котором при $h\to 0$ первое слагаемое обращается в нуль.

Для определения второго слагаемого в левой части (2.89) введем локальную криволинейную систему координат $\left(u^{1},u^{2},n\right)$, связанную с поверхностью Σ, рассматриваемую в данный произвольный, но фиксированный момент времени аналогичного тому, как было сделано при получении условия (2.88). Тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta\Sigma}e_{\Sigma}d\Sigma=\int\limits_{\Delta\Sigma}\left[\frac{\partial e_{\Sigma}}{\partial t}+div_{\Sigma}\left(e_{\Sigma}\vec{w}_{\Sigma}\right)\right]d\Sigma \qquad (2.90)$$

(Доказательство этого равенства предлагается читателю в виде упражнения по тензору анализу).

Последнее слагаемое в равенства (2.89) согласно формуле Грина может быть представлено в виде интеграла по поверхности

$$\oint\limits_{L}\vec{\nu}\cdot\alpha\vec{w}\,dl=\int\limits_{\Delta\Sigma}div_{\Sigma}\left(\alpha\vec{w}_{\Sigma}\right)d\Sigma \qquad (2.91)$$

Это приводит к следующему выражению для граничного условия

$$\frac{\partial e_{\Sigma}}{\partial t}+div_{\Sigma}\left(e_{\Sigma}\vec{w}_{\Sigma}\right)+\left\langle n\cdot\hat{\Pi}^{*}\cdot\vec{w}+S_{n}^{*}\right\rangle-div_{\Sigma}\left(\alpha\vec{w}_{\Sigma}\right)=0. \qquad (2.92)$$

При наличии поверхностных зарядов с поверхностной плотностью $\sigma_{e}=\sum\limits_{k=1}^{N}\sigma_{ek}$, где σ_{ek}-поверхностная плотность заряда k-й компоненты, существуют поверхностный ток проводимости

$$\vec{i}^{*}=\sum_{k=1}^{N}\vec{i}_{k}^{*},\quad \vec{i}_{k}^{*}=\sigma_{ek}\left(\vec{\mathrm{v}}_{k}-\vec{\mathrm{v}}\right)_{\Sigma}$$

и конвективный ток $\sigma_{e}\vec{w}_{\Sigma}$.

Интегральная форма уравнения баланса заряда имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{\Delta V}\rho c_{k}^{*}z_{k}dV+\int\limits_{\Delta\Sigma}\sigma_{ek}d\Sigma\right\}=-\oint\limits_{S}z_{k}\vec{\nu}\cdot\vec{I}_{k}^{*}dS-\oint\limits_{L}\vec{\nu}\cdot\vec{i}_{k}^{*}dl$$

Тогда, по аналогии с (2.92) получим граничное условие

$$\frac{\partial \sigma_{ek}}{\partial t} + div_{\Sigma}\left(\sigma_{ek}\vec{w}_{\Sigma}\right) + \left\langle z_k I_{kn}^{*}\right\rangle + div_{\Sigma}\vec{i}_k^{\,*} = 0. \qquad (2.93)$$

Помимо этого, изменяется граничные условия в седьмой формуле соотношения (2.82) и (2.84) [5]

$$\left\langle D_n'\right\rangle = 4\pi\sigma_e \qquad (2.94)$$

$$\left\langle \vec{n}\times\vec{H}'\right\rangle = \frac{4\pi}{c}\vec{i}'. \qquad (2.95)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983. 344 с.
2. Воронин Г.Ф. Основы термодинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987. – 192 с.
3. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. – 304 с.
4. С. де Гроот, П. Мазур. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. - 456 с.
5. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. - 1976. - 616 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. - 623 с.
7. Баранов А.А., Колпащиков В.Л. Релятивистская термомеханика сплошных сред.
8. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. - 520 с.
9. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. М.: Высшая школа, 1990.-352 с.
10. Скобельцын Д.В. О тензоре импульс-энергии электромагнитного поля. УФН, 1970, т.110,вып.2, с.253-292.
11. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука. -1976. - 536 с.
12. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002. - 516 с.
13. Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков. Изд-во Харьковск. госун-та, 1967. - 163 с.
14. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М.; ИЛ, 1963.-292с.