ЗАМѢТКА

О ВВЕДЕНІИ Θ-ФУНКЦІЙ ВЪ ТЕОРІЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Извѣстно, что Θ-функціи вошли въ теорію эллиптическихъ функцій чрезъ разложеніе послѣднихъ въ *безконечныя* произведенія, и что потомъ Якоби на своихъ лекціяхъ показывалъ какимъ образомъ, на-оборотъ, эти разложенія и вообще вся теорія эллиптическихъ функцій можетъ быть выведена изъ свойствъ Θ-функцій. Такое фундаментальнаго свойства значеніе Θ-функцій для теоріи эллиптическихъ функцій побудило Эрмита въ его «Note sur la théorie des fonctions elliptiques», приложенной къ 6-му изданію «Traité élémentaire de calcul differential et de calcul intégral» Лакроа, избрать для введенія въ анализъ этихъ функцій путь обобщеній. Но если даже этотъ путь и не считать до нѣкоторой степени искусственнымъ, то все-таки нужно замѣтить, что онъ не отвѣчаетъ историческому ходу развитія науки, такъ-какъ на самомъ дѣлѣ только интегральное исчисленіе привело науку къ этимъ новымъ трансцендентнымъ; а потому очень желательно было имѣть способъ для непосредственнаго перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, въ особенности послѣ того какъ Клебшъ и Горданъ показали въ своей «Theorie der Abelschen Functionen», что такой переходъ возможенъ и для болѣе высшихъ трансцендентныхъ — Абелевыхъ. Въ предисловіи къ этому сочиненію они прямо говорятъ, что на такой переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціямъ многихъ перемѣнныхъ они были наведены формулою Якоби $e^{\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}$, которую онъ вывелъ, какъ извѣстно, чрезъ интегрированіе разложенія въ тригонометрическій рядъ интеграла второго рода $Z(u)$ и замѣну получающагося во второй части послѣ перехода отъ логариѳма къ числу разложенія Θ-функціи въ безконечное произведеніе знакомъ этой функціи. Этимъ замѣчаніемъ своимъ они намѣтили путь для перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ-функціямъ; но никто, сколько мнѣ извѣстно, не указалъ самаго способа перехода по этому пути отъ одной трансцендентной къ другой. Касательно этого предмета я встрѣтилъ только одну замѣтку мюнхенскаго профессора Бриля въ Mathematischen Annalen. Bd. 17, S. 87 подъ заглавіемъ «Ueber das Additions-theorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen», въ которой онъ занимается больше выводомъ теоремы сложенія для эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ и нормировкою интеграла 2-го рода, и только подъ конецъ указываетъ, что такъ какъ интегралъ третьяго рода выражается линейнымъ образомъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода, то этотъ послѣдній, т. е. $\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u$ слѣдуетъ ввести какъ новый элементъ въ теорію эллиптическихъ функцій, и такъ какъ эта функція имѣетъ безконечности логариѳмическаго характера, то слѣдуетъ положить

$$\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u = \log \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}.$$

Но такое положеніе кажется мнѣ недостаточно мотивированнымъ и не представляетъ естественнаго перехода отъ интеграла къ Θ-функціи, такъ какъ эта функція появляется здѣсь не какъ результатъ аналитическихъ дѣйствій надъ интегралами 2-го рода. Пересматривая по этому поводу сочиненія Якоби и Сомова по теоріи эллиптическихъ функцій, мнѣ удалось замѣтить, что остается очень немногое прибавить къ тому, что находимъ у Якоби и Сомова, чтобы имѣть естественный переходъ отъ эллиптическихъ интеграловъ второго рода къ Θ-функціямъ, а также и къ Вейерштрассовскимъ Al (u), причемъ само собою выступаетъ наружу то обстоятельство, что какъ тѣ, такъ и другія функціи суть только частные случаи цѣлаго безчисленнаго ряда функцій, которыя нѣмцы называютъ doppeltmultiplicatorisch-periodische, а Эрмитъ fonctions intermédiaires (см. *Briot et Bouquet* Théorie des fonctions elliptiques, 2 éd. P. 236); обѣ функціи, означенныя въ этомъ сочиненіи Бріо и Буке чрезъ θ и ϑ, суть въ нѣкоторомъ смыслѣ предѣльныя всѣхъ этихъ fonctions intermédiaires.

Коротенькая замѣтка объ этомъ предметѣ, подъ заглавіемъ— «Ueber das Umkehr-problem der elliptischen Integrale», была послана мною въ іюнѣ мѣсяцѣ въ редакцію «Mathematischen Annalen», и нынѣ уже появилась въ XXII томѣ Math. Ann., стр. 450. Предлагаемая нынѣ вниманію общества замѣтка посвящена тому-же предмету, но представляетъ дальнѣйшія развитія.

Въ § 53 «Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum» Якоби находимъ такую формулу

$$\frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \,.\, \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u} =$$

$$= Z(a) + \frac{1}{2} Z(u-a) - \frac{1}{2} Z(u+a); \qquad (1)$$

Это равенство *Сомовъ* (Основанія теоріи эллиптическихъ функцій. Спб. 1852, стр. 175), а за нимъ и *Хандриковъ* (Элементарная теорія эллиптическихъ функцій и интеграловъ съ приложеніемъ къ рѣшенію основного вопроса геодезіи. М. 1867, стр. 97) интегрируютъ по a отъ $a=0$ и получаютъ слѣдующее:

$$-\frac{1}{2}\log(1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u)=$$

$$=\int_0^a Z(a)\,\mathrm{d}a+\frac{1}{2}\int_0^a Z(u-a)\,\mathrm{d}a-\frac{1}{2}\int_0^a Z(u+a)\,\mathrm{d}a, \quad (2)$$

изъ котораго, подражая Якоби (см. «De functionibus ellipticis commentatio prima et altera»; стр. 304 «*Jacobis* Gesammelte Werke». Bd. I, новое изданіе, или Crelle Journ. Bd. 4, стр. 371—390), съ помощію выведеннаго ими по способу Якоби равенства

$$\int_0^u Z(u)\,\mathrm{d}u=\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)}, \quad (3)$$

выводятъ такое

$$\frac{\Theta(u+a)\Theta(u-a)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}a}=\left[\frac{\Theta(u)\Theta(a)}{\Theta(o)}\right]^2 \quad (4)$$

Но можно, на-оборотъ, изъ (2) получить (4) и изъ него уже (3), чрезъ что выигрываемъ натуральный переходъ къ Θ-функціи; и для этого стоитъ только перемѣнить въ интегралахъ перемѣнную a на другую. Положимъ, во второмъ членѣ второй части равенства (2) $u-a=w$, тогда будетъ

$$\int_0^u Z(u-a)\,\mathrm{d}a=-\int_u^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_{u-a}^u Z(w)\,\mathrm{d}w=$$

$$=\int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w-\int_0^{u-a} Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

а въ третьемъ членѣ $u+a=w$; тогда

$$\int_0^a Z(u+a)\,\mathrm{d}a = \int_a^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{u+a} Z(w)\,\mathrm{d}w - \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

послѣ подстановки этихъ выраженій во (2) и умноженія его на -2 равенство это принимаетъ такой видъ:

$$\log(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u) =$$

$$= \int_0^{u+a} Z(w)\mathrm{d}w + \int_0^{u-a} Z(w)\mathrm{d}w - 2\int_0^u Z(w)\mathrm{d}w - 2\int_0^a Z(w)\,\mathrm{d}w,$$

откуда чрезъ переходъ отъ логариѳма къ числу получаемъ

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{e^{\int_0^{u+a} Z(w)\mathrm{d}w} \cdot e^{\int_0^{u-a} Z(w)\mathrm{d}w}}{\left[e^{\int_0^u Z(w)\mathrm{d}w}\right]^2 \cdot \left[e^{\int_0^a Z(w)\mathrm{d}w}\right]^2}. \quad (5)$$

Здѣсь вторая часть составлена изъ значеній функціи

$$e^{\int_0^w Z(w)\,\mathrm{d}w}$$

для различныхъ значеній аргумента w. Если ввести особый знакъ для этой функціи, положивъ:

$$e^{\int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} \quad (6)$$

(чтобы значеніе функціи $\Theta(u)$ для $u=0$ оставить произвольнымъ, а не $=1$), то полученный результатъ (5) такъ можемъ написать:

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u = \frac{[\Theta(o)]^2\Theta(u+a)\Theta(u-a)}{[\Theta(u)]^2.[\Theta(a)]^2} \quad (7)$$

что представляетъ, только въ другой формѣ, соотношенiе (4), тогда какъ равенство (6) служитъ *опредѣленiемъ* (definition) функцiи Θ, и изъ этого равенства можетъ быть выведена вся теорiя этихъ функцiй.

Замѣтимъ при этомъ еще, что хотя въ формулѣ (1) у Якоби $Z(u)$ означаетъ совершенно опредѣленный интегралъ 2-го рода, именно такой

$$Z(u) = \frac{F^1 \mathrm{E}(\mathrm{am}\,u) - \mathrm{E}^1 . u}{F^1} = \frac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1} u - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u\,du,$$

но мы можемъ разумѣть подъ $Z(u)$ въ (1) самый общiй интегралъ 2-го рода, т. е. вида

$$Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u\,du,$$

гдѣ C какая угодно постоянная; потому что равенство (1) не нарушится отъ придачи къ нему тождества:

$$0 = \left(C - \frac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1}\right)\left(a + \frac{1}{2}(u - a) - \frac{1}{2}(u + a)\right),$$

а тогда и можно будетъ принять въ немъ

$$Z(u) = Cu - \int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u\,du. \tag{8}$$

Но тогда и наша Θ-функцiя будетъ общнѣе Якобiевой, заключая въ себѣ какъ частный случай и Якобiеву — когда $C = \frac{F^1 - \mathrm{E}^1}{F^1}$, и Вейерштрассовскую $\mathrm{Al}(u)$, когда $C = 0$ и $\Theta(o) = 1$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}\int_0^K k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u = J_0\\ \int_K^{K+K'i} k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u = J_0' i\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

далѣе пусть

$$\left.\begin{aligned}Z(K) = CK - J_0 = J\\ Z(K+K'i) - Z(K) = CK'i - \int_K^{K+K'i} k^2\sin^2 \mathrm{am}\, u\, \mathrm{d}u =\\ = (CK' - J'_0)i = J'i;\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

тогда изъ (1) легко получаются, какъ извѣстно, такія равенства:

$$\left.\begin{aligned}Z(u+2K) = Z(u) + 2J\\ Z(u+2K'i) = Z(u) + 2J'i.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Съ помощію этихъ равенствъ найдемъ интегралъ $\int_0^{u+2K} Z(w)\,\mathrm{d}w$ такимъ образомъ:

$$\int_0^{u+2K} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{2K} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{2K}^{2K+u} Z(w)\,\mathrm{d}w; \tag{12}$$

первый членъ второй части

$$\begin{aligned}\int_0^{2K} Z(w)\,\mathrm{d}w &= \int_0^K Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_K^{2K} Z(w)\,\mathrm{d}w =\\ &= \int_0^K Z(w)\,\mathrm{d}w - \int_K^0 Z(2K-w)\,\mathrm{d}w =\\ &= \int_0^K \Big(Z(2K-w) - Z(-w)\Big)\,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

или на основаніи перваго изъ (11) равенствъ:

$$\int_0^{2K} Z(w)\,\mathrm{d}w = 2J.K. \tag{13}$$

Второй членъ въ (12)

$$\int_{2K}^{2K+u} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w+2K)\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2Ju;$$

подставляя отсюда и изъ (13) въ (12), получимъ:

$$\int_0^{u+2K} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2J(u+K). \qquad (14)$$

Точно также

$$\int_0^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w; \quad (15)$$

но

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^K Z(w)\,\mathrm{d}w + \int_K^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w =$$

$$= J + \int_0^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w,$$

а

$$\int_0^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w = \int_0^{K'i} J(w+K)\,\mathrm{d}w + \int_{K'i}^{2K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w =$$

$$= \int_0^{K'i} Z(w+K)\,\mathrm{d}w - \int_{K'i}^{0} Z(2K'i-w-K)\,\mathrm{d}w -$$

$$= \int_0^{K'i} \Big(Z(2K'i-w-K) - Z(-w-K) \Big)\mathrm{d}w = 2J'i.K'i,$$

такъ что

$$\int_0^{K+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = J + 2J'i.K'i; \qquad (16)$$

второй же членъ въ (15)

$$\int_{K+2K'i}^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_K^u Z(w+2K'i)\,\mathrm{d}w =$$

$$= \int_K^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2J'i(u-K) =$$

$$= -\int_u^K Z(w)\,\mathrm{d}w + 2J'i(u-K).$$

Подставляя отсюда и изъ (16) въ (15), получимъ

$$\int_0^{u+2K'i} Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w + 2J'i(u-K+K'i), \quad (17)$$

такъ какъ $J - \int_u^K Z(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w.$

Интегралы (14) и (17) получены нами при опредѣленномъ пути интегрированія; если измѣнить путь интегрированія, то значенія интеграловъ измѣнятся на кратное $2\pi i$, что слѣдуетъ изъ того, что функція $\int_0^u Z(w)\,\mathrm{d}w$ въ точкахъ $u = 2mK + (2n+1)K'i$ обращается въ безконечность какъ $\log u$, но легко можетъ быть и прямо провѣрено вычисленіемъ интеграла вокругъ такой точки; при этомъ, такъ какъ по (11)

$$Z(w + 2mK + (2n+1)K'i) = Z(w + K'i) +$$
$$+ 2mJ + 2nJ'i,$$

достаточно сдѣлать это для точки $w = K'i$. Интегрированіе вокругъ этой точки $K'i$ можетъ быть сдѣлано по параллелограму, котораго эта точка есть центръ и котораго основаніе есть часть вещественной оси отъ $w = -K$ до $w = +K$, а высота, часть мнимой длиною $2K'$. Этотъ интегралъ разобьется на сумму четырехъ такимъ образомъ:

$$\int_{-K}^{+K} Z(w)\,dw + \int_{+K}^{+K+2K'i} Z(w)\,dw + \int_{+K+2K'i}^{-K+2K'i} Z(w)\,dw +$$

$$+ \int_{-K+2K'i}^{-K} Z(w)\,dw = \int_{-K}^{+K} \Big(Z(w) - Z(w+2K'i) \Big)\,dw +$$

$$+ \int_{0}^{2K'i} \Big(Z(w+K) - Z(w-K) \Big)\,dw = -2J'i.2K +$$

$$+ 2J\,.\,2K'i = 4(JK' - J'K)i;$$

но по теоремѣ Лежандра:

$$KJ'_0 - K'J_0 = \frac{\pi}{2}; \qquad (18)$$

слѣдовательно интегралъ вокругъ точки $w = K'i$ есть $2\pi i$, что и требовалось доказать.

На функцію $\Theta(u)$ этотъ придаточный членъ, кратный $2\pi i$, не будетъ имѣть вліянія, какъ то видно изъ (6), потому что $e^{2m\pi i} = 1$; слѣд. въ этой формулѣ (6) путь интегрированія отъ 0 до u остается произвольнымъ, ничѣмъ неограниченнымъ какъ только тѣмъ, чтобы не проходилъ чрезъ безконечности, а функція $\Theta(u)$ для каждаго u получаетъ одно опредѣленное значеніе, слѣд. есть однозначная функція отъ u.

Съ помощію (15) и (17) получаются слѣдующія функціональныя уравненія для Θ-функціи:

$$\left.\begin{aligned} \Theta(u+2K) &= e^{2J(u+K)}\,\Theta(u), \\ \Theta(u+2K'i) &= e^{2J'i(u-K+K'i)}\,\Theta(u), \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

откуда и видно, что вообще это суть функціи intermédiaires Эрмита.

Если C опредѣлить такъ, чтобы было

$$J = CK - J_0 = 0,$$

что даетъ: $C = \frac{J_0}{K}$ и слѣдовательно

$$J' = CK' - J'_0 = \frac{J_0 K' - KJ'_0}{K} = -\frac{\pi}{2K},$$

на основаніи (18); то формулы (19) примутъ такой видъ

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(u+2K) = \Theta(u) \\ &\Theta(u+2K'i) = -e^{-\frac{\pi i}{K}(u+K'i)}\,\Theta(u) \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

или полагая вмѣстѣ съ Якоби $e^{-\pi\frac{K'}{K}} = q$;

$$\left.\begin{aligned} &\Theta(u+2K) = \Theta(u) \\ &\Theta(u+2K'i) = -\frac{1}{q}\,e^{-\frac{K\pi i}{K}}\,\Theta(u) \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

что представляетъ функціональныя уравненія Якобіевой Θ-функціи. Изъ этихъ уравненій онъ вывелъ въ своихъ лекціяхъ и разложеніе этихъ функцій въ тригонометрическіе ряды и безконечныя произведенія, а также теоремы сложенія и дифференціальныя уравненія эллиптическихъ функцій[1].

Если опредѣлить C подъ условіемъ, чтобы было:

$$J' = CK' - J'_0 = 0,$$

что даетъ $C = \frac{J'_0}{K'}$, и слѣдовательно:

---

[1] Въ изданныхъ нынѣ его лекціяхъ нѣтъ разложеній въ ряды, но въ имѣющихся у меня рукописныхъ лекціяхъ эта статья разработана очень подробно, равно какъ и другіе отдѣлы этой теоріи, а также и начала ультра-эллиптическихъ интеграловъ.

$$J = CK - J_0 = \frac{KJ'_0 - K'J_0}{K} = \frac{\pi}{2K},$$

то уравненія (19) примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned}\Theta_{(0)}(u+2K) &= e^{\frac{\pi}{K'}(u+K)}\,\Theta_{(0)}(u)\\ \Theta_{(0)}(u+2K'i) &= \Theta_{(0)}(u),\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

или, полагая $q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$

$$\left.\begin{aligned}\Theta_{(0)}(u+2K) &= \frac{1}{q'}\,e^{\frac{\pi u}{K'}}\,\Theta_{(0)}(u)\\ \Theta_{(0)}(u+2K'i) &= \Theta_{(0)}(u).\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

Функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (21), и функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (23), соотвѣтствующія обращенію перваго или втораго періоднаго множителя въ единицу, суть какъ бы крайнія въ ряду безчисленнаго множества функцій съ двумя періодными множителями. Послѣднія, т. е. опредѣляемыя системою уравненій (23), выведены были Якоби въ его лекціяхъ изъ первыхъ чрезъ преобразованіе ряда, въ который разлагаются первыя; способъ этотъ изложенъ у Эннепера (*Enneper* Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle. 1876. § 17 стр. 86).

Покажемъ теперь, какъ можно изъ (6) вывести выраженія эллиптическихъ функцій чрезъ Θ-функцію. Для этого воспользуемся извѣстнымъ преобразованіемъ дифференціальнаго уравненія эллиптическихъ функцій:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u},$$

которое можно и такъ представить:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = k^2 \sin^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u + K'i). \quad (24)$$

Изъ (6) посредствомъ двукратнаго дифференцированія по взятіи сначала логариѳма находимъ:

$$Z(u) = \frac{d \log \Theta(u)}{du}, \quad (25)$$

и

$$C - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u = \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2}; \quad (26)$$

съ помощію послѣдняго изъ (24) получаемъ сперва:

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = C - \frac{d^2 \log \Theta(u)}{du^2} - \left(C - \frac{d^2 \log \Theta(u + K'i)}{du^2}\right)$$

или

$$\frac{d^2 \log \sin \operatorname{am} u}{du^2} = \frac{d^2 \log \dfrac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}}{d^2 u},$$

откуда чрезъ интегрированіе находимъ

$$\sin \operatorname{am} u = e^{cu + c'} \frac{\Theta(u + K'i)}{\Theta(u)}, \quad (27)$$

гдѣ c и c' постоянныя интегрированія, которыя опредѣлятся слѣдующимъ образомъ.

Перемѣняя въ (27) u на $u+K'i$ и сличая результатъ съ первоначальнымъ видомъ этого равенства, получимъ такое:

$$\frac{1}{k\,\mathrm{sinam}\,u} = e^{c(u+K'i)+c'}\frac{\Theta(u+2K'i)}{\Theta(u+K'i)} = \frac{1}{k}\,e^{-cu-c'}\frac{\Theta(u)}{\Theta(u+K'i)},$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\Theta(u+2K'i) = \frac{1}{k}\,e^{-c(2u+K'i)-2c'}\,\Theta(u);$$

сличая это со вторымъ изъ (19), находимъ:

$$-\log k - c(2u+K'i) - 2c' = 2J'i(u-K+K'i) + 2m\pi i,$$

гдѣ m какое угодно цѣлое число; это уравненіе распадается на два слѣдующія:

$$-2c = 2J'i;$$

$$-\log k - cK'i - 2c' = -2J'iK - 2J'K' + 2m\pi i.$$

Изъ перваго получаемъ $c = -J'i$; изъ второго:

$$c' = -\log\sqrt{k} + \frac{1}{2}J'K' + (J'K - m\pi)i.$$

Внося это въ (27) будемъ имѣть:

$$\mathrm{sinam}\,u = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\,e^{-J'i(u-K+\frac{1}{2}K'i)}\,\frac{\Theta(u+K'i)}{\Theta(u)},$$

или

$$\mathrm{sinam}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}, \qquad (28)$$

если положить

$$\mathrm{H}(u) = \pm\,e^{-J'i(u-K+\frac{1}{2}K'i)}\,\Theta(u+K'i), \qquad (29)$$

Для *Якобіевыхъ* Θ-функцій $J=0$, и слѣд. $J'K=-\frac{\pi}{2}$; потому эта формула принимаетъ такой видъ:

$$\mathrm{H}(u)=\mp ie^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2ui)}\Theta(u+K'i)$$

или

$$\mathrm{H}(u)=\mp i\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{u\pi i}{2K}}\Theta(u+K'i). \qquad (30)$$

На-счетъ двойнаго знака въ этой послѣдней формулѣ вопросъ рѣшится такимъ образомъ.

Полагая въ (28) $u=K$, находимъ

$$\sqrt{k}=\frac{\mathrm{H}(K)}{\Theta(K)}, \qquad (31)$$

откуда выводимъ, что знаки $\mathrm{H}(K)$ и $\Theta(K)$ должны быть одинакіе, если $\sqrt{k}>0$, что мы принимаемъ обыкновенно. Далѣе, изъ (6) слѣдуетъ, что:

$$e^{\int_0^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w}=e^{\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w}\,e^{\int_0^{K}Z(w)\,\mathrm{d}w}=\frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(o)},$$

откуда

$$\frac{\Theta(K+K'i)}{\Theta(K)}=e^{\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w} \qquad (32)$$

Но вторая часть этого равенства есть вещественное положительное количество. Дѣйствительно:

$$\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_0^{K'i}Z(w+K)\,\mathrm{d}w=i\int_0^{K'}Z(K+vi)\,\mathrm{d}v; \qquad (33)$$

но

$$Z(K+vi)=C(K+vi)-\int_0^{K+vi}k^2\sin^2\mathrm{am}w\,\mathrm{d}w=$$

$$=CK+Cvi-\int_0^K k^2\sin^2\mathrm{am}w\,\mathrm{d}w-\int_K^{K+vi}k^2\sin^2\mathrm{am}w\,\mathrm{d}w=$$

$$=Cvi-\int_K^{K+vi}k^2\sin^2\mathrm{am}w\,\mathrm{d}w=Cvi-\int_0^{vi}k^2\sin^2\mathrm{am}(w+K)\,\mathrm{d}w;$$

такъ какъ $\sin\mathrm{am}(w+K)=\dfrac{\cos\mathrm{am}\,w}{\Delta\mathrm{am}\,w}$,

и: $$\cos\mathrm{am}(vi)=\frac{1}{\cos\mathrm{am}(v,k')}$$

$$\Delta\mathrm{am}(vi)=\frac{\Delta\mathrm{am}(v,k')}{\cos\mathrm{am}(v,k')},$$

слѣд. $$\sin\mathrm{am}(K+vi)=\frac{1}{\Delta\mathrm{am}(v,k')},$$

то

$$\int_0^{vi}k^2\sin^2\mathrm{am}(w+K)\,\mathrm{d}w=i\int_0^v k^2\sin^2\mathrm{am}(K+vi)\,\mathrm{d}w=$$

$$=i\int_0^v\frac{k^2\,\mathrm{d}v}{\Delta^2\mathrm{am}(v,k')};$$

а потому

$$Z(K+vi)=\left(Cv-\int_0^v\frac{k^2\,\mathrm{d}v}{\Delta^2\mathrm{am}(v,k')}\right)i$$

и на основаніи (33)

$$\int_K^{K+K'i}Z(w)\,\mathrm{d}w=-\int_0^{K'}\left(Cv-\int_0^v\frac{k^2\,\mathrm{d}v}{\Delta^2\mathrm{am}(v,k')}\right)\mathrm{d}v;$$

что очевидно вещественное, и слѣд. вторая часть (32) есть положительное количество, что и требовалось доказать.

Раздѣлимъ теперь уравненіе (30) для $u=K$ на $\Theta(K)$ и воспользуемся (31) и (32); будемъ имѣть:

$$\sqrt{k} = \mp\, i^2 \sqrt[4]{q} \,.\, e^{\int_K^{K+K'i} Z(w)\, dw}$$

здѣсь первая часть положительная, множитель $\sqrt[4]{q} \,.\, e^{\int_K^{K+K'i} Z(w)\, dw}$ также положительный по сейчасъ доказанному, если еще подъ $\sqrt[4]{q}$ разумѣть ариѳметическій корень; $i^2 = -1$. Отсюда слѣдуетъ, что нужно взять знакъ $(-)$ въ (30), такъ что окончательно:

$$\mathrm{H}(u) = -i \sqrt[4]{q}\, e^{\frac{u\pi i}{2K}}\, \Theta(u + K'i). \qquad (34)$$

Выраженія $\cos \mathrm{am}\, u$ и $\Delta \mathrm{am}\, u$ найдутся на основаніи формулы, которою мы сейчасъ пользовались:

$$\sin \mathrm{am}(u + K) = \frac{\sin \mathrm{am}\, u}{\Delta \mathrm{am}\, u};$$

подставляя сюда вмѣсто $\sin \mathrm{am}(u + K)$ его выраженіе изъ (28), будемъ имѣть:

$$\frac{\cos \mathrm{am}\, u}{\Delta \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u + K)}{\Theta(u + K)},$$

откуда, на основаніи извѣстнаго свойства пропорцій, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos \mathrm{am}\, u}{\frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{H}(u+K)} &= \frac{\Delta \mathrm{am}\, u}{\Theta(u+K)} = \frac{k' \sin \mathrm{am}\, u}{\sqrt{\Theta^2(u+K) - \frac{1}{k} \mathrm{H}^2(u+K)}} = \\ &= \frac{k'}{\sqrt{\Theta^2(u+K) - k\, \mathrm{H}^2(u+K)}}\,. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Отсюда слѣдуетъ, во-первыхъ, что

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{\Theta^2(u+K) - \frac{1}{k} \mathrm{H}^2(u+K)}}{\sqrt{\frac{1}{k}\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K)}};$$

сличая это съ (28) и принимая во вниманіе, что въ этой формулѣ числитель и знаменатель не могутъ обращаться въ нуль для одного и того же значенія u, мы заключаемъ, что должно быть

$$\left.\begin{aligned} \Theta^2(u+K) - \frac{1}{k}\mathrm{H}^2(u+K) &= \mathrm{H}^2(u) \,.\, C \\ \frac{1}{k}\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K) &= \Theta^2(u) \,.\, C \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

гдѣ C не зависитъ отъ u. Полагая въ обоихъ равенствахъ $u=0$, и принимая во вниманіе, что $\mathrm{H}(0)=0$, какъ то слѣдуетъ изъ (28), мы получимъ:

$$\frac{\mathrm{H}^2(K)}{\Theta^2(K)} = k \qquad \text{(a)}$$

согласно съ тѣмъ, что мы уже имѣли, и

$$\frac{1}{k}\Theta^2(K) - \mathrm{H}^2(K) = \Theta^2(o)C,$$

откуда съ помощію (a) получаемъ

$$C = \frac{\Theta^2(K)}{\Theta^2(o)} \cdot \frac{k'^2}{k}.$$

Это равенство показываетъ, что C положительное количество, ибо таково

$$\frac{\Theta(K)}{\Theta(o)} = e^{\int_0^K Z(u)\,du},$$

какъ легко видѣть, и $\frac{k'^2}{k}$. Полагая за-тѣмъ въ первомъ (39) $u = -K$, получаемъ изъ него

$$C = \frac{\Theta^2(o)}{\mathrm{H}^2(K)}.$$

Перемножая оба выраженія C, при помощи опять (a) получимъ: $C^2 = \frac{k'^2}{k^2}$ и слѣд.

$$C = \frac{k'}{k}.$$

Подставляя это въ (36), мы имъ дадимъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} k\Theta^2(u+K) - \mathrm{H}^2(u+K) &= k'\mathrm{H}^2(u) \\ \Theta\ (u+K) - k\mathrm{H}^2(u+K) &= k'\Theta^2(u). \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

На основаніи послѣдняго изъ этихъ двухъ равенствъ пропорція (35) такъ можетъ быть написана:

$$\frac{\cos \operatorname{am} u}{\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}(u+K)} = \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\Theta(u+K)} = \frac{\sqrt{k'}}{\Theta(u)} \quad (38)$$

откуда и получаемъ искомыя выраженія:

$$\left.\begin{aligned} \cos \operatorname{am} u &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)} \\ \Delta \operatorname{am} u &= \sqrt{k}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Интегралъ втораго рода чрезъ Θ-функцію выражается формулою

$$Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

получаемою изъ (6) логариѳмическимъ дифференцированіемъ. Что же касается до интеграловъ третьяго рода, то легко получить сперва выраженіе ихъ чрезъ интегралы отъ интеграловъ 2-го рода. Для этого проинтегрируемъ равенство (1) по u отъ $u=0$; мы получимъ тогда:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a.\sin^2\operatorname{am}u\,\mathrm{d}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}u}=\\&=uZ(a)+\frac{1}{2}\int_0^u Z(u-a)\,\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_0^u Z(u+a)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Налѣво здѣсь мы имѣемъ интегралъ третьяго рода, для котораго Якоби употреблялъ такое знакоположеніе:

$$\Pi(u,a)=\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u\mathrm{d}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u};\qquad(42)$$

что касается до второй части, то замѣчаемъ, что

$$\int_0^u Z(u-a)\mathrm{d}u=\int_{-a}^{u-a}Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_0^{u-a}Z(w)\,\mathrm{d}w+\int_{-a}^0 Z(w)\mathrm{d}w=$$
$$=\int_0^{u-a}Z(w)\,\mathrm{d}w-\int_0^a Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

$$\int_0^u Z(u+a)\,\mathrm{d}u=\int_a^{u+a}Z(w)\,\mathrm{d}w=\int_0^{u+a}Z(w)\,\mathrm{d}w-\int_0^a Z(w)\,\mathrm{d}w;$$

слѣд. равенство (41) можемъ такъ представить:

$$\Pi(u,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\int_0^{u-a} Z(w)\,dw - \frac{1}{2}\int_0^{u+a} Z(w)\,dw. \qquad (43)$$

Изъ этого равенства между прочимъ прямо слѣдуетъ теорема о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ; потому что

$$\int_0^{a-u} Z(w)\,dw = \int_0^{u-a} Z(w)\,dw\,;$$

слѣдовательно, переставивъ въ (43) u съ a и вычитая изъ (43), получимъ

$$\Pi\,(u,a) - \Pi\,(a,u) = uZ\,(a) - aZ(u), \qquad (44)$$

что и выражаетъ упомянутую теорему.

Подставляя теперь выраженіе $\int_0^w Z(w)\,dw$ чрезъ Θ изъ (6) въ (43), получимъ искомое выраженіе интеграла третьяго рода чрезъ Θ-функцію, именно:

$$\Pi\,(u,\,a) = uZ(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta\,(u-a)}{\Theta\,(u+a)}\,. \qquad (45)$$