ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIX. Серия 4 1963

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫХ СВОИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ФУРЬЕ

Н. С. Ландкоф

Всюду в дальнейшем будем обозначать через $\widetilde{f(x)}$ преобразование Фурье (вообще говоря, обобщенное) функции $f(x)$. Аналогично через $\widetilde{E}$ обозначим совокупность преобразований Фурье функций, входящих в класс E.

Относительно редко удается дать внутреннюю характеристику класса $\widetilde{E}$. Классическим результатом является теорема Планшереля, которую можно записать в форме

$$\widetilde{L}^2(-\infty, \infty) \equiv L^2(-\infty, \infty).$$

Винеру и Пэли [1] принадлежат известные теоремы, характеризующие преобразования Фурье некоторых подклассов класса $L^2(-\infty, \infty)$. Если обозначить $L^2(0, \infty)$ множество функций из $L^2(-\infty, \infty)$, равных нулю при $x < 0$, а через U^-L^2 — класс функций $f(w)$, $w = \sigma + it$, регулярных в нижней полуплоскости $t < 0$ и принадлежащих там равномерно $L^2(-\infty, \infty)$ по σ, то есть таких, что

$$\sup_{t \leqslant 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + it)|^2 \, d\sigma < \infty,$$

то одна из теорем Винера и Пэли утверждает, что

$$\widetilde{L}^2(0, \infty) \equiv U^-L^2. *$$

Далее Винер [2] рассматривал класс функций M^2, более общий, чем $L^2(-\infty, \infty)$, а именно состоящий из всех измеримых на оси функций $f(x)$, для которых

$$\sup_T \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Он обнаружил одно свойство преобразования Бохнера-Планшереля, которое, как это будет следовать из результатов настоящей статьи, является характеристическим для класса M^2.

Мы рассмотрим также более общие классы функций и дадим полную характеристику их преобразований Фурье. Будут получены аналоги упомянутой выше теоремы Винера-Пэли и другой теоремы этих авторов, дающей характеристику модуля функции из $\widetilde{L}^2(0, \infty)$.

---

* Преобразование Фурье функции из $L^2(0, \infty)$ является функцией $f(\sigma)$ вещественной переменной, определенной почти всюду. Ее принадлежность классу U^-L^2 следует понимать в том смысле, что существует функция $f(w) \in U^-L^2$ такая, что $\underset{t \to -0}{\text{l. i. m.}}\, f(\sigma + it) = f(\sigma)$. Функция $f(w)$ определяется однозначно функцией $f(\sigma)$ и, наоборот, определяет ее однозначно (с точностью до значений на множестве меры нуль).

Интересно отметить, что некоторые из этих классов функций могут быть естественно введены в общую теорию линейных стационарных фильтров, и это, как нам представляется, существенно упрощает последнюю. На этом вопросе мы остановимся в другом месте.

Автор выражает признательность В. А. Марченко за плодотворное обсуждение результатов этой работы.

§ 1. Будем обозначать W_n^2 класс локально квадратично интегрируемых функций $F(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$, для которых

$$\frac{F(\omega)}{1+|\omega|^n} \in L^2(-\infty, \infty)$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(\omega)|^2}{1+\omega^{2n}}\, d\omega < \infty.$$

Для такой функции можно образовать n-ое преобразование Бохнера-Планшереля

$$B_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} F(\omega)\frac{e^{-2\pi i\omega x} - Q_{n-1}(-2\pi i\omega x)}{(-2\pi i\omega)^n}\, d\omega + \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int\limits_{1<|\omega|<N} F(\omega)\frac{e^{-2\pi i\omega x}}{(-2\pi i\omega)^n}\, d\omega, \tag{1}$$

где

$$Q_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}.$$

Если воспользоваться терминами теории обобщенных функций (см., напр., [3] или [4]) и обозначить через $D^n f(x)$ производную n-го порядка в смысле этой теории, то соотношение (1) равносильно такому:

$$D^n B_n(x) = \widetilde{F(\omega)}. \tag{2}$$

Введем теперь так называемые *центральные разности* $\delta_\varepsilon^{(n)}$ $(\varepsilon > 0)$, определяя их индуктивно:

$$\delta_\varepsilon^{(1)} f(x) = f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon); \quad \delta_\varepsilon^{(k)} f(x) = \delta_\varepsilon^{(k-1)} f(x+\varepsilon) - \delta_\varepsilon^{(k-1)} f(x-\varepsilon).$$

Тогда элементарный подсчет показывает, что

$$\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int\limits_{-N}^{N} F(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n e^{-2\pi i\omega x}\, d\omega \in L^2(-\infty, \infty), \tag{3}$$

так как

$$F(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n \in L^2(-\infty, \infty).$$

Менее элементарен обратный факт, который мы сформулируем в виде леммы, имеющей основное значение для дальнейшего.

Лемма. Пусть $f(x)$ локально интегрируема, и при любом $\varepsilon > 0$ $\delta_\varepsilon^{(n)} f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда существует функция $F(\omega) \in W_n^2$ такая, что

$$f(x) = B_n(x) + a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \tag{4}$$

Соотношение (4), следуя Бохнеру, будем записывать в виде

$$f(x) \overset{n}{\simeq} B_n(x). \tag{4$_1$}$$

Используя (2), его можно также записать как равенство

$$D^n f(x) = \widetilde{F(\omega)}.$$

Доказательство. Положим

$$\sigma_\eta(x) = \begin{cases} (2\eta)^{-1} & \text{при } |x| < \eta \\ 0 & \text{при } |x| > \eta \end{cases} \quad (\eta > 0)$$

и образуем усредненную функцию

$$f_\eta(x) = f(x) * \sigma_\eta(x) * \ldots * \sigma_\eta(x) = f(x) * \sigma_\eta^{*n}.$$

Эта функция n раз дифференцируема, и нетрудно видеть, что

$$f_\eta^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\eta)^n} \delta_\eta^{(n)} f(x) \in L^2(-\infty, \infty). \tag{5}$$

Замечая, что операции усреднения и образования разности перестановочны, то есть

$$\delta_\varepsilon^{(n)} f_\eta(x) = [\delta_\varepsilon^{(n)} f(x)]_\eta,$$

убеждаемся в том, что

$$\underset{\eta \to 0}{\text{l.i.m}}\, \delta_\varepsilon^{(n)} f_\eta(x) = \delta_\varepsilon^{(n)} f(x). \tag{6}$$

Действительно, $\delta_\varepsilon^{(n)} f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, а операция усреднения непрерывно (в метрике $L^2(-\infty, \infty)$) зависит от параметра η.

Положив теперь

$$F_\eta(\omega) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} f_\eta^{(n)}(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx \in L^2(-\infty, \infty),$$

будем иметь

$$f_\eta^{(n)}(x) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} F_\eta(\omega)\, e^{-2\pi i \omega x}\, d\omega,$$

откуда, в силу (5),

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^{(n)} f_\eta(x) &= (2\varepsilon)^n [f_\eta(x) * \sigma_\varepsilon^{*n}] = (2\varepsilon)^n f_\eta^{(n)}(x) * \sigma_\varepsilon^{*n} = \\ &= \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} F_\eta(\omega) \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n e^{-2\pi i \omega x}\, d\omega \end{aligned} \tag{7}$$

или

$$F_\eta(\omega) \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m}} \int_{-N}^{N} \delta_\varepsilon^{(n)} f_\eta(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx.$$

В силу (6) и изометричности оператора Фурье-Планшереля при всяком фиксированном $\varepsilon > 0$ существует

$$F(\omega; \varepsilon) = \underset{\eta \to 0}{\text{l.i.m}}\, F_\eta(\omega) \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n \in L^2(-\infty, \infty).$$

Взяв, например, $\varepsilon = 1$, мы сможем в силу известной теоремы теории функций найти последовательность $\eta_k \to 0$, для которой почти всюду будет существовать предел

$$F(\omega) = \lim_{k \to \infty} F_{\eta_k}(\omega).$$

В таком случае для всякого фиксированного $\varepsilon \to 0$ имеем почти всюду*

$$F(\omega; \varepsilon) = F(\omega) \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n.$$

---

* То обстоятельство, что исключительное множество нулевой меры может зависеть от ε, не существенно для дальнейших рассуждений.

Действительно, так как почти всюду

$$\lim_{k\to\infty} F_{\eta_k}(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n = F(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n,$$

то предел в среднем $F(\omega;\varepsilon)$ должен почти всюду совпадать с пределом подпоследовательности.

Из того, что

$$F(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n \in L^2(-\infty, \infty)$$

следует, что $F(\omega) \in \overset{2}{W}_n$.

Сделав в формуле (7) предельный переход $\eta \to 0$, получим

$$\delta_\varepsilon^{(n)} f(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} F(\omega)\left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^n e^{-2\pi i\omega x}\, d\omega.$$

Сравнивая это с (3), получим, что при любом $\varepsilon > 0$ почти всюду

$$\delta_\varepsilon^{(n)} f(x) = \delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x),$$

или, приняв $r(x) = f(x) - B_n(x)$, почти всюду имеем

$$\delta_\varepsilon^{(n)} r(x) = 0.$$

Осталось показать, что $r(x)$ почти всюду равно полиному степени не выше $n-1$. Из формулы (5) заключаем, что

$$r_\varepsilon^{(n)}(x) = 0;$$

а так как $r_\varepsilon^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, то

$$r_\varepsilon(x) = a_0(\varepsilon)\, x^{n-1} + a_1(\varepsilon)\, x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(\varepsilon).$$

При $\varepsilon \to 0$ для почти всех x $r_\varepsilon(x) \to r(x)$ и, следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} a_k(\varepsilon) = a_k$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и

$$r(x) = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Лемма доказана.

В следующем параграфе рассмотрим некоторые подклассы $\overset{2}{W}_n$ и дадим характеристику их обобщенных преобразований Фурье.

§ 2. Положим

$$T^{\alpha,\beta} = \begin{cases} |T|^\alpha & \text{при } 0 \leqslant |T| \leqslant 1, \\ |T|^\beta & \text{при } 1 \leqslant |T| < \infty, \end{cases} \quad (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0)$$

и введем класс $M^2(\alpha, \beta)$, образованный из функций $F(\omega)$, для которых

$$\int_0^T |F(\omega)|^2\, d\omega < C_F T^{\alpha,\beta}. \tag{8}$$

Это требование будем записывать также в форме

$$\int_0^T |F(\omega)|^2\, d\omega = 0\,(T^{\alpha,\beta}).$$

Очевидно, $M^2(\alpha, 0) \subset L^2(-\infty, \infty)$ при $\alpha > 0$ и $M^2(0, 0) \equiv L^2(-\infty, \infty)$. Класс $M^2(1,1)$ рассматривался Н. Винером в упомянутой выше книге [2].

Нетрудно показать, что при $n > \frac{1}{2}\beta$ $\quad M^2(\alpha, \beta) \subset \overset{2}{W}_n$. В самом деле, интегрирование по частям дает

$$\int_1^N \frac{|F(\omega)|^2}{\omega^{2n}} d\omega = \frac{1}{N^{2n}} \int_1^N |F(\omega)|^2 d\omega + 2n \int_1^N \frac{d\omega}{\omega^{2n+1}} \int_1^N |F(t)|^2 dt =$$

$$= 0(N^{\beta-2n}) + \int_1^N 0(\omega^{\beta-2n-1}) d\omega = 0(1),$$

и аналогично проверяется интеграл от $-N$ до -1.

Полезно также ввести обозначение для множества всех функций из $\overset{2}{W}_n$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^T |F(\omega)|^2 d\omega = 0(T^\alpha) \text{ при } T \to 0, \ (\alpha \geqslant 0).$$

Этот класс обозначим $\overset{2}{W}_n(\alpha)$.

Для характеристики обобщенных преобразований Фурье введенных классов будут полезны следующие определения.

Обозначим через $\overset{2}{\Delta}_n(\alpha, \beta)$, $(\alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0)$ класс локально интегрируемых функций $f(x)$ таких, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\delta_\varepsilon^{(n)} f(x) \in L^2(-\infty, \infty) \tag{9_1}$$

и

$$\| \delta_\varepsilon^{(n)} f(x) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \delta_\varepsilon^{(n)} f(x) |^2 dx = 0(\varepsilon^{\alpha, \beta}). \tag{9_2}$$

Легко видеть, что при любом натуральном n

$$L^2(-\infty, \infty) \subset \overset{2}{\Delta}_n(0,0).$$

Далее условимся обозначать $D^k E$ класс обобщенных производных порядка k от элементов класса E обобщенных функций.

Из результата Винера вытекает, что

$$\widetilde{M}^2(1,1) \subset D^1 \overset{2}{\Delta}_1(1,1).$$

Используя лемму § 1, докажем более общую теорему, из которой, в частности, будет следовать, что

$$\widetilde{M}^2(1,1) \equiv D^1 \overset{2}{\Delta}_1(1,1). \tag{10}$$

Теорема 1. Пусть $F(\omega) \in M^2(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta \geqslant 0)$. Тогда при любом натуральном $n > \frac{1}{2}\beta$ n-ое преобразоваие Бохнера-Планшереля

$$B_n(x) = \int_{-1}^{1} F(\omega) \frac{e^{-2\pi i\omega x} - Q_{n-1}(-2\pi i\omega x)}{(-2\pi i\omega)^n} d\omega + \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}} \int_{1<|\omega|<N} F(\omega) \frac{e^{-2\pi i\omega x}}{(-2\pi i\omega)^n} d\omega$$

принадлежит классу $\overset{2}{\Delta}_n(2n-\beta, [2n-\alpha]^+)$, если $\alpha \neq 2n$. Если же $\alpha = 2n$, то при $\varepsilon \to \infty$ будем иметь

$$\| \delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x) \|^2 = 0(\ln \varepsilon). \tag{11}$$

Наоборот, если $f(x) \in \overset{2}{\Delta}_n(\alpha, \beta)$, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2n, \ 0 \leqslant \beta)$, то

$$f(x) \overset{n}{\asymp} B_n(x),$$

где $B_n(x)$ n-ое преобразование Бохнера-Планшереля функции

$$F(\omega) \in M^2([2n-\beta]^+,\ 2n-\alpha).$$

В частности, если $0 \leqslant \alpha < 2n$, $0 \leqslant \beta < 2n$, то

$$\widetilde{M}^2(\alpha,\beta) \equiv D^n \Delta_n^2(2n-\beta,\ 2n-\alpha). \tag{12}$$

Доказательство. Так как $M^2(\alpha,\beta) \subset W_n^2$ при $n > \frac{1}{2}\beta$, то для $F(\omega) \in M^2(\alpha,\beta)$ при этих n $B_n(x)$ существует. Используя (3) и равенство Парсеваля, можем написать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x)\,|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,F(\omega)\,|^2 \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^{2n} d\omega =$$

$$= \varepsilon^{2n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|F\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right|^2 \left(\frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}\right)^{2n} d\omega. \tag{13}$$

В силу неравенства $\left(\frac{\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}\right)^2 \leqslant \frac{4}{1+\omega^2}$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x)\,|^2\,dx \leqslant 4\varepsilon^{2n-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|F\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\right|^2 \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^n}.$$

Интегрируя по частям и полагая для краткости

$$I(T) = \operatorname{sign} T \cdot \int\limits_0^T |\,F(\omega)\,|^2\,d\omega = 0\,(T^{\alpha,\beta}),$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\,\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x)\,|^2\,dx \leqslant 4n\varepsilon^{2n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} I\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \frac{|\,\omega\,|\,d\omega}{(1+\omega^2)^{n+1}} = \varepsilon^{2n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} 0\left(\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{\alpha,\beta}\right) \frac{|\,\omega\,|\,d\omega}{(1+\omega^2)^{n+1}} =$$

$$= \varepsilon^{2n-\alpha} \int\limits_{|\omega|<\varepsilon} \frac{0\,(\omega^{\alpha+1})}{(1+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega + \varepsilon^{2n-\beta} \int\limits_{|\omega|>\varepsilon} \frac{0\,(\omega^{\beta+1})}{(1+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega.$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon \to 0$

$$\|\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x)\,\|^2 = 0\,(\varepsilon^{2n+2}) + 0\,(\varepsilon^{2n-\beta}) = 0\,(\varepsilon^{2n-\beta}).$$

Если же $\varepsilon \to \infty$, то

$$\int\limits_{|\omega|<\varepsilon} \frac{0\,(\omega^{\alpha+1})}{(1+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega = \begin{cases} 0\,(1) & \text{при } \alpha < 2n, \\ 0\,(\ln\varepsilon) & \text{при } \alpha = 2n, \\ 0\,(\varepsilon^{\alpha-2n} & \text{при } \alpha > 2n, \end{cases}$$

между тем, как

$$\int\limits_{|\omega|>\varepsilon} \frac{0\,(\omega^{\beta+1})}{(I+\omega^2)^{n+1}}\,d\omega = 0\,(\varepsilon^{\beta-2n}),$$

ибо $\beta < 2n$.

Итак, при $\varepsilon \to \infty$

$$\|\,\delta_\varepsilon^{(n)} B_n(x)\,\|^2 = \begin{cases} 0\,(\varepsilon^{2n-\alpha}), & \text{если } \alpha < 2n, \\ 0\,(\ln\varepsilon), & \text{если } \alpha = 2n, \\ 0\,(1), & \text{если } \alpha > 2n, \end{cases}$$

и этим доказано включение

$$B_n(x) \in \Delta_n^2(2n-\beta,\ [2n-\alpha]^+)$$

при $\alpha \neq 2n$ и соотношение (11) при $\alpha = 2n$.

Пусть теперь $f(x) \in \Delta_n^2(\alpha, \beta)$, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2n,\ 0 \leqslant \beta)$. В силу леммы § 1 $f(x) \overset{n}{\asymp} B_n(x)$, где $B_n(x)$ — преобразование Бохнера — Планшереля некоторой функции $F(\omega) \in W_n^2$. В соответствии с (13) имеем

$$\| \underset{\varepsilon}{\delta}^{(n)} f(x) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \left(\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega}\right)^{2n} d\omega.$$

В силу неравенства

$$\frac{\sin 2\pi\omega\varepsilon}{\pi\omega} \geqslant \frac{4\varepsilon}{\pi},$$

которое имеет место при $|\omega| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}$, получаем, что

$$0(\varepsilon^{\alpha,\,\beta}) = \| \underset{\varepsilon}{\delta}^{(n)} f(x) \|^2 \geqslant \left(\frac{4\varepsilon}{\pi}\right)^{2n} \int\limits_{-\frac{1}{4\varepsilon}}^{\frac{1}{4\varepsilon}} |F(\omega)|^2 d\omega. \tag{14}$$

Полагая $T = \frac{1}{4\varepsilon}$, мы можем переписать это в виде

$$\int\limits_0^T |F(\omega)|^2 d\omega = 0(T^{2n-\beta,\ 2n-\alpha}).$$

Так как при $\beta > 2n$ и $T \to 0$ условие

$$\int\limits_0^T |F(\omega)|^2 d\omega = 0(T^{2n-\beta})$$

не является ограничением, то

$$\int\limits_0^T |F(\omega)|^2 d\omega = 0(T^{[2n-\beta]^+,\ 2n-\alpha})$$

и теорема доказана.

Замечания.

1) Из неравенства (14) вытекает, что в классе $\Delta_n^2(\alpha, \beta)$ неравенство $\alpha \leqslant 2n$ всегда выполнено.

2) Нетрудно было бы так же рассмотреть классы функций $F(\omega)$ и $f(x)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\int\limits_0^T |F(\omega)|^2 d\omega = 0(T^{\alpha,\,\beta} |\ln T|^{\gamma}),$$

$$\| \underset{\varepsilon}{\delta}^{(n)} f(x) \|^2 = 0(\varepsilon^{\alpha,\,\beta} |\ln \varepsilon|^{\gamma}),$$

и установить связь между ними.

Следствие I. При любом целом $k > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 2n$, $0 < \beta \leqslant 2n$

$$\Delta_n^2(\alpha, \beta) \overset{n}{\asymp} \Delta_{n+k}^2(\alpha + 2k, \beta + 2k), \tag{15}$$

то есть всякая функция $f_1(x) \in \Delta_n^2(\alpha, \beta)$ отличается от k-ой производной некоторой функции $f(x) \in \Delta_{n+k}^2(\alpha + 2k, \beta + 2k)$ на полином степени не выше $n - 1$ и обратно для всякой $f(x) \in \Delta_{n+k}^2(\alpha + 2k, \beta + 2k)$ $f^{(k)}(x) \overset{n}{\asymp} f_1(x) \in \Delta_n^2(\alpha, \beta)$.

В самом деле, если $f(x) \in \Delta_{n+k}^2(\alpha + 2k, \beta + 2k)$, то в силу теоремы 1

$$\widetilde{f^{(n+k)}}(x) = F(\omega) \in M^2(2n - \beta,\ 2n - \alpha).$$

По той же теореме существует $f_1(x) \in \Delta_n^2(\alpha, \beta)$ такая, что $\widetilde{f_1^{(n)}(x)} = F(\omega)$.

Следовательно,

$$f_1^{(n)}(x) = f^{(n+k)}(x),$$

то есть

$$f_1(x) \overset{n}{\asymp} f^{(k)}(x).$$

Аналогично проверяется, что если $f_1(x) \in \Delta_n^2(\alpha, \beta)$, то существует $f(x) \in \Delta_{n+k}^2(\alpha + 2k, \beta + 2k)$ такая, что

$$f^{(k)}(x) \overset{n}{\asymp} f_1(x).$$

Формулу (15) можно также записать в виде

$$D^k \Delta_n^2(\alpha, \beta) \overset{n-k}{\asymp} \Delta_{n-k}^2(\alpha - 2k, \beta - 2k), \tag{15_1}$$

где $k < \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \leqslant n$.

Отсюда вытекает, что функции из $\Delta_n^2(\alpha, \beta)$ имеют k производных в обычном смысле. Например, функции класса $\Delta_n^2(2n-1, 2n-1)$ имеют $(n-1)$-ую производную, принадлежащую $\Delta_1^2(1, 1)$. Равенство (15) можно использовать для определения классов $\Delta_n^2(\alpha, \beta)$ при $\alpha < 0$, $\beta < 0$, но мы здесь не будем на этом останавливаться.

Следствие 2. При $0 < \alpha \leqslant 2n$, $0 < \beta < 2n$ и любом целом $k > 0$

$$\Delta_n^2(\alpha, \beta) \overset{n+k}{\asymp} \Delta_{n+k}^2(\alpha, \beta). \tag{16}$$

Это же можно записать в виде

$$\Delta_n^2(\alpha, \beta) \overset{n}{\asymp} \Delta_{n-k}^2(\alpha, \beta) \tag{16_1}$$

при условии $n - \frac{\beta}{2} \neq k \leqslant \min\left(n - \frac{\alpha}{2}, n - \frac{\beta}{2}\right)$.

Чтобы показать (16), мы будем исходить из соотношения (12), переписав его в виде

$$\widetilde{D^n \Delta_n^2}(\alpha, \beta) \equiv M^2(2n - \beta, 2n - \alpha).$$

Если принять во внимание, что равенство

$$\widetilde{f^{(k)}(x)} = (-2\pi i \omega)^k \widetilde{f(x)}$$

справедливо и для обобщенных преобразований Фурье, то отсюда вытекает, что

$$\widetilde{D^{n+k} \Delta_n^2}(\alpha, \beta) \subset M^2(2n + 2k - \beta, 2n + 2k - \alpha).$$

Но на самом деле

$$\widetilde{D^{n+k} \Delta_n^2}(\alpha, \beta) \equiv M^2(2n + 2k - \beta, 2n + 2k - \alpha). \tag{17}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что если

$$F(\omega) \in M^2(2n + 2k - \beta, 2n + 2k - \alpha),$$

то

$$\frac{F(\omega)}{\omega^k} \in M^2(2n - \beta, 2n - \alpha).$$

В проверке нуждается лишь суммируемость $|F(\omega)|^2 \omega^{-2k}$ и оценка

$$\int_0^T \frac{|F(\omega)|^2}{\omega^{2k}} d\omega = 0(T^{2n-\beta}) \quad \text{при } T \to 0. \tag{18}$$

Пусть $0 < a < T$, тогда, полагая, как раньше $I(T) = \int_0^T |F(\omega)|^2 d\omega$, получим

$$\int_a^T \frac{|F(\omega)|^2}{\omega^{2k}}\, d\omega = \frac{I(\omega)}{\omega^{2k}}\Bigg|_a^T + 2k \int_a^T \frac{I(\omega)}{\omega^{2k+1}}\, d\omega.$$

Так как по условию $I(\omega) = 0(\omega^{2n+2k-\beta})$ при $\omega \to 0$, то отсюда вытекает (18) и, следовательно, (17).

Пользуясь (12), получаем

$$D^{n+k}\Delta^2_{n+k}(\alpha, \beta) \equiv M^2(2n + 2k - \beta,\ 2n + 2k - \alpha)$$

и, сопоставляя это с (17), убеждаемся в том, что

$$D^{n+k}\Delta^2_{n+k}(\alpha, \beta) \equiv D^{n+k}\Delta^2_n(\alpha, \beta),$$

то есть в справедливости (16) и, значит, (16_1).

Теорема 2. Пусть $F(\omega) \in W^2_n(\alpha)$. Тогда при $\alpha \neq 2n$ n-ое преобразование Бохнера — Планшереля $B_n(x)$ принадлежит классу $\Delta^2_n(0, [2n-\alpha]^+)$. Если же $\alpha = 2n$, то при $\varepsilon \to 0$

$$\|\delta^{(n)}_\varepsilon B_n(x)\|^2 = 0(\ln \varepsilon).$$

Наоборот, если $f(x) \in \Delta^2_n(0, \beta)$, $\beta \geqslant 0$, то $f(x) \overset{n}{\simeq} B_n(x)$, где $B_n(x)$ — n-ое преобразование функции $F(\omega) \in W^2_n([2n-\beta]^+)$.

Доказательство. Будем, как и в доказательстве теоремы 1, исходить из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{(n)}_\varepsilon B_n(x)|^2 dx \leqslant 4n\varepsilon^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} I\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \frac{|\omega|\, d\omega}{(1+\omega^2)^{n+2}},$$

где

$$I(T) = \operatorname{sign} T \cdot \int_0^T |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Покажем, что $W^2_n(\alpha) \subset M^2(\alpha, 2n)$. Пусть $F(\omega) \in W^2_n(\alpha)$ и $T > 0$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_1^T \frac{|F(\omega)|^2}{\omega^{2n}}\, d\omega = \frac{I(T)}{T^{2n}} - I(1) + 2n \int_1^T \frac{I(\omega)}{\omega^{2n+1}}\, d\omega.$$

Так как левая часть конечна при $T \to \infty$, то

$$I(T) = 0(T^{2n}), \quad \int_1^\infty \frac{I(\omega)}{\omega^{2n+1}}\, d\omega < \infty.$$

Так же проверяется случай $T < 0$.

Далее

$$\|\delta^{(n)}_\varepsilon B_n(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^{2n-\alpha} \int_{|\omega|<\varepsilon} \frac{0(\omega^{\alpha+1})}{(1+\omega^2)^{n+1}}\, d\omega + 4n\varepsilon^{2n} \int_{|\omega|>\varepsilon} I\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \frac{d\omega}{|\omega|^{2n+1}}\cdot$$

и т. к.

$$\varepsilon^{2n} \int_{|\omega|>\varepsilon} \left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right) \frac{d\omega}{|\omega|^{2n+1}} = \int_{|\omega|>1} I(\omega) \frac{d\omega}{|\omega|^{2n+1}} < \infty,$$

то

$$\|\delta^{(n)}_\varepsilon B_n(x)\|^2 = 0(\varepsilon^{0,\ [2n-\alpha]^+}), \quad (\alpha \neq 2n),$$

в то время, как при $\alpha = 2n$ и $\varepsilon \to \infty$

$$\| \delta_{\varepsilon}^{(n)} B_n(\dot{x}) \|^2 = 0 (\ln \varepsilon).$$

Вторая часть доказывается аналогично второй части теоремы 1.

§ 3. Равенство функции нулю на полуоси приводит, как известно, к аналитичности ее преобразования Фурье в полуплоскости. Это обстоятельство имеет место также для различных классов обобщенных функций.

Мы рассмотрим сначала классы $M^2(1, 1)$ и $\Delta_1^2(1, 1)$, которые мы для краткости будем обозначать M^2 и Δ^2.

Обозначим $\overset{+}{\Delta}{}^2$ подкласс Δ^2, образованный функциями, равными константе на отрицательной полуоси. Пусть далее $U^- M^2$ обозначает класс функций $F(w)$, $w = \sigma + it$, регулярных в нижней полуплоскости $t < 0$ и принадлежащих там равномерно M^2 (по σ), то есть таких, что

$$\sup \frac{1}{T} \int_0^T | F(\sigma + it) |^2 d\sigma = A_F < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем T и по отрицательным t,

В § 2 было доказано, что (ср. (10))

$$M^2 \equiv \widetilde{D\Delta^2}. \tag{10_1}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.

$$U^- M^2 \equiv \widetilde{D\overset{+}{\Delta}{}^2}. \tag{19}$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в силу (10_1) обобщенное преобразование Фурье элемента из $D\overset{+}{\Delta}_2$ есть функция $F(\sigma)$ вещественного переменного σ. Ее принадлежность классу $U^- M^2$ следует понимать в том смысле, что существует $F(w) \in U^- M^2$ такая, что при любом $N > 0$

$$\lim_{t \to -0} \int_N^N | F(\sigma + it) - F(\sigma) |^2 \, d\sigma = 0. \tag{20}$$

Ясно, что такая функция $F(w) \in U^- M^2$, если вообще она существует, определяется однозначно. Из приводимого ниже доказательства будет следовать, что всякой функции $F(w) \in U^- M^2$ отвечает функция $F(\sigma) \in M^2$, связанная с ней соотношением (20) и, следовательно, однозначно определяемая (с точностью до эквивалентности).

Доказательство. Будем доказывать сначала включение

$$U^- M^2 \subset \widetilde{D\overset{+}{\Delta}{}^2}. \tag{19_1}$$

Рассмотрим произвольную $F(w) \in U^- M^2$ и, зафиксировав $\eta > 0$, образуем вспомогательную функцию

$$\Phi(w; \eta) = F(w) \frac{1 - e^{-4\pi i w \eta}}{4\pi i w \eta},$$

также регулярную в нижней полуплоскости. Покажем, что

$$\Phi(w; \eta) \in U^- L^2. \tag{21}$$

Для этого заметим, что при $t < 0$ имеет место легко проверяемое неравенство

$$| 1 - e^{-4\pi i w \eta} |^2 < C_1(\eta) \left(\frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2} + \frac{t^2}{1 + t^2} \right).$$

В таком случае

$$\left|\frac{1-e^{-4\pi i w\eta}}{4\pi i w\eta}\right|^2 < \frac{C_2(\eta)}{1+\sigma^2}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\sigma+it;\eta)|^2 d\sigma < C_2(\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(\sigma+it)|^2}{1+\sigma^2}d\sigma.$$

Но так как $F(w)\in U^-M^2$, то последний интеграл равномерно ограничен относительно t. В самом деле, при любом $N>0$

$$\int_{-N}^{N}\frac{|F(\sigma+it)|^2}{1+\sigma^2}d\sigma = \int_{-N}^{N}\frac{1}{1+\sigma^2}d\int_0^{\sigma}|F(x+it)|^2dx =$$

$$= \frac{2N}{1+N^2}\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N}|F(x+it)|^2dx + \int_0^N\frac{2\sigma^2 d\sigma}{(1+\sigma^2)^2}\frac{1}{\sigma}\int_0^{\sigma}|F(x+it)|^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2N}{1+N^2}A_F + A_F\int_0^N\frac{2\sigma^2}{(1+\sigma^2)^2}d\sigma < C_3.$$

Таким образом, (21) доказано.

В таком случае, согласно результатам Винера и Пэли, существует

$$\Phi(\sigma;\eta) = \underset{t\to-0}{\mathrm{l.i.m}}\,\Phi(w;\eta).$$

Отсюда вытекает, что при любом $N>0$

$$\lim_{t\to-0}\int_{-N}^{N}|F(\sigma+it)(1-e^{-4\pi i(\sigma+it)\eta})-\Phi(\sigma;\eta)4\pi i\sigma\eta|^2 d\sigma = 0.$$

Так как $\eta>0$ произвольно, то действительно существует функция $F(\sigma)$, удовлетворяющая соотношению (20). При этом, как легко видеть, $F(\sigma)\in M^2$ и

$$\Phi(\sigma;\eta) = F(\sigma)\frac{1-e^{-4\pi i\sigma}}{4\pi i\sigma} = F(\sigma)\frac{\sin 2\pi\sigma}{2\pi\sigma}e^{-2\pi i\sigma}.$$

Теперь включение (19_1) легко проверяется. В самом деле, оно эквивалентно тому, что преобразование Бохнера — Планшереля от $F(\sigma)$ является функцией $f(x)\in\Delta^2$, которая при $x<0$ эквивалентна константе. Первое вытекает из (10_1) и того, что $F(\sigma)\in M^2$. Далее, $\Phi(\sigma;\eta)$ является, как легко видеть, преобразованием Фурье функции $\frac{1}{2\eta}[f(x)-f(x-2\eta)]$. Но $\Phi(w;\eta)\in U^-L^2$, и в силу теоремы Винера и Пэли $\frac{1}{2\eta}[f(x)-f(x-2\eta)]=0$ для почти всех $x<0$. В силу произвольности $\eta>0$ мы получаем, что при $x<0$ $f(x)$ эквивалентна константе.

Перейдем к доказательству обратного включения

$$\widetilde{D\overset{+}{\Delta}{}^2}\subset U^-M^2. \tag{19_2}$$

Для этого нужно установить, что всякая функция $f(x)\in\overset{+}{\Delta}{}^2$ является преобразованием Бохнера—Планшереля некоторой функции $F(w)\in U^-M^2$. Так как $\overset{+}{\Delta}{}^2\subset\Delta^2$, то в силу ($10_1$) существует $F(\sigma)\in M^2$, для которой преобразование Бохнера—Планшереля равно (с точностью до константы) $f(x)$. Следует убедиться в том, что $F(\sigma)\in U^-M^2$.

Образуем, как и выше, функцию $\frac{1}{2\eta}[f(x) - f(x-2\eta)] \in L^2(0, \infty)$, у которой преобразование Бохнера—Ираншереля есть

$$\Phi(\sigma; \eta) = F(\sigma)\frac{1-e^{-4\pi i\sigma\eta}}{4\pi i\sigma\eta}.$$

По теореме Винера—Пэли

$$\Phi(w; \eta) = \int_0^\infty \frac{1}{2\eta}[f(x) - f(x-2\eta)]\, e^{-2\pi i w x} dx \in U^- L^2,$$

причем

$$\Phi(\sigma; \eta) = \operatorname*{l.i.m}_{t\to -0} \Phi(w; \eta).$$

Следовательно, функция

$$F(w) = \Phi(w; \eta)\frac{4\pi i w\eta}{1-e^{-4\pi i w\eta}}$$

регулярна в нижней полу плоскости и является аналитическим продолжением $F(\sigma)$ в том смысле, что при любом $N > 0$

$$\lim_{t\to -0}\int_{-N}^{N} |F(w) - F(\sigma)|^2 d\sigma = 0.$$

Для того, чтобы убедиться в том, что $F(w) \in U^- M^2$, мы докажем, что она представляется интегралом Пуассона

$$F(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx, \quad (t<0). \tag{22}$$

Прежде всего, этот интеграл абсолютно сходится, ибо $|F(x)|^{\frac{1}{2}} \in M^2 \subset W_1^2$ (первое включение легко проверяется с помощью неравенства Шварца) и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|F(x)|}{1+x^2}dx < \infty.$$

Далее

$$\Phi(w; \eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x; \eta)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx. \tag{29}$$

В самом деле,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x; \eta)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|\,dx}{(\sigma-x)^2+t^2}\operatorname*{l.i.m}_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{2\eta}[f(\xi) - f(\xi-2\eta)]e^{-2\pi i x\xi}d\xi,$$

и поскольку $\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2} \in L^2(-\infty, \infty)$, как функция переменного x, то

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x, \eta)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|\,dx}{(\sigma-x)^2+t^2}\int_0^N \frac{1}{2\eta}[f(\xi) - f(\xi-2\eta)]\, e^{-2\pi i x\xi}d\xi =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1}{2\eta}[f(\xi) - f(\xi - 2\eta)] \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi} |t|}{(\sigma - x)^2 + t^2} dx.$$

Внутренний интеграл при $\xi > 0$ и $t < 0$ равен $e^{-2\pi i(\sigma + it)\xi} = e^{-2\pi i w\xi}$, так что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x;\ \eta) \frac{|t|\, dx}{(\sigma - x)^2 + t^2} = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1}{2\eta}[f(\xi) - f(\xi - 2\eta)]\, e^{-2\pi i w\xi} d\xi = \Phi(w;\ \eta),$$

и (23) доказано. Сделаем теперь предельный переход $\eta \to 0$. Так как $\Phi(w;\ \eta) \to F(w)$, и сходимость

$$\frac{1 - e^{-4\pi i x\eta}}{4\pi i x\eta} \to 1,\ (\eta \to 0)$$

ограниченная (при вещественных x), то равенство (23) в пределе дает (22).

Теперь, используя неравенство Шварца и тот факт, что $F(x) \in M^2$, мы можем написать, что

$$|F(w)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 \frac{|t|\, dx}{(\sigma - x)^2 + t^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|\, dx}{(\sigma - x)^2 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 \frac{|t|\, dx}{(\sigma - x)^2 + t^2} = \frac{2|t|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \sigma}{[(\sigma - x)^2 + t^2]^2} dx \int_0^x |F(\xi)|^2 d\xi.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\sigma + it)|^2 d\sigma \leqslant \frac{|t|}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{(x - T)^2 + t^2} - \frac{1}{(x + T)^2 + t^2}\right\} dx \int_0^x |F(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \frac{4|t|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{[(x - T)^2 + t^2][(x + T)^2 + t^2]} \int_0^x |F(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4A_F|t|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{[(x - T)^2 + t^2][(x + T)^2 + t^2]} <$$

$$< \frac{4A_F|t|}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x - T)^2 + t^2} = \frac{4A_F}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - T}{|t|} \Big|_0^{\infty} < 4A_F,$$

где $A_F = \sup_T \int_0^T |F(\xi)|^2 d\xi < \infty$. Следовательно, $F(w) \in U^- M^2$. Этим доказано (19_2) и вместе с тем теорема.

З а м е ч а н и е. Нетрудно проверить, что

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{[(x - T)^2 + t^2][(x + T)^2 + t^2]} = \frac{\pi}{4|t|},$$

и, следовательно,

$$\sup_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\sigma + it)|^2 d\sigma \leqslant \sup_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\sigma)|^2 d\sigma,\ (t < 0).$$

Этим, между прочим, показано, что для функции $F(w) \in U^-M^2$ величина

$$S(t) = \sup_T \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(\sigma + it)|^2 d\sigma$$

является невозрастающей функцией от $|t|$.

Рассмотрим теперь класс $\Delta^{+2}(\alpha, \beta)$, $(0 < \alpha \leqslant 2n,\ 0 < \beta < 2n)$, состоящий из тех функций из $\Delta_n^2(\alpha, \beta)$, которые на отрицательной полуоси сводятся к полиному степени не выше $n - 1$.

В силу следствия 2 из теоремы 1 § 2

$$D^n\Delta_n^{+2}(\alpha, \beta) \equiv D^n\Delta_{n-k}^{+2}(\alpha, \beta),$$

где $n - \frac{\beta}{2} \neq k \leqslant \min\left(n - \frac{\alpha}{2},\ n - \frac{\beta}{2}\right)$. Поэтому

$$\widetilde{D^n\Delta_n^{+2}}(\alpha, \beta) \equiv \widetilde{D^n\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha, \beta) \equiv \widetilde{D^kD^{n-k}\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha, \beta) \equiv$$

$$\equiv \omega^k\widetilde{D^{n-k}\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha, \beta) \subset \omega^k M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha),$$

где $\omega^k M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha)$ обозначает класс функций вида $\omega^k F(\omega)$, $F(\omega) \in M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha)$. Предположим теперь, что k можно взять так, чтобы $n - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \leqslant k < \min\left(n - \frac{\alpha}{2},\ n - \frac{\beta}{2}\right)$. При этом условии мы утверждаем, что

$$\widetilde{D^{n-k}\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha, \beta) \equiv U^-M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha), \tag{24}$$

где класс $U^-M^2(\alpha_1, \beta_1)$ состоит из функций $F(w)$, регулярных в нижней полуплоскости $Im w = t < 0$ и таких, что

$$\int_0^T |F(\sigma + it)|^2 d\sigma < CT^{\alpha_1, \beta_1},$$

причем C не зависит от T и $t < 0$.

Мы наметим доказательство (24), которое только техническими деталями отличается от доказательства теоремы 3. Прежде всего

$$U^-M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha) \subset U^-M^2(0, 1),$$

и поэтому при любом $\eta > 0$

$$\Phi(w; \eta) = F(w)\frac{1 - e^{-4\pi i w\eta}}{4\pi i w\eta} \in U^-L^2.$$

Это дает возможность заключить, что

$$U^-M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha) \subset \widetilde{D^{n-k}\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha, \beta) \tag{24_1}$$

Для доказательства обратного включения мы должны отправляться от функции $f(x) \in \Delta_{n-k}^{+2}(\alpha, \beta)$ и доказать, что $F(\sigma) = \widetilde{f^{(n-k)}}(x) \in U^-M^2(2n - 2k - \beta,\ 2n - 2k - \alpha)$. Для этого образуем функцию

$$\Phi_{n-k}(\sigma; \eta) = F(\sigma)\left[\frac{1 - e^{-4\pi i\sigma\eta}}{4\pi i\sigma\eta}\right]^{n-k},$$

которая, как легко видеть, $\in U^{-}L^2$ и поэтому представляется интегралом Пуассона. Но тогда, делая предельный переход $\eta \to 0$ и принимая во внимание, что $F(\sigma) \in M^2(0, 1)$, мы убедимся в том, что и

$$F(\omega) = \Phi_{n-k}(\omega; \eta)\left[\frac{4\pi i\omega\eta}{1-e^{-4\pi i\omega\eta}}\right]^{n-k}$$

также представляется интегралом Пуассона. Как и в доказательстве теоремы 3, мы можем написать

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|F(\sigma+it)|^2\,d\sigma \leqslant \frac{4|t|}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{xI(x)\,dx}{[(x-T)^2+t^2]\,[(x+T)^2+t^2]},$$

где

$$I(x) = \int_0^x |F(\xi)|^2\,d\xi = 0\,(x^{2n-2k-\beta,\ 2n-2k-\alpha}).$$

Положив для краткости $2n-2k-\beta=\alpha_1$, $2n-2k-\alpha=\beta_1$, запишем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|F(\sigma+it)|^2\,d\sigma \leqslant C_1|t|\int_0^1\frac{x^{\alpha_1+1}dx}{[(x-T)^2+t^2]\,[(x+T)^2+t^2]}+$$

$$+C_2|t|\int_1^{\infty}\frac{x^{\beta_1+1}dx}{[(x-T)^2+t^2]\,[(x+T)^2+t^2]}.$$

Подсчет показывает, что при $T\to 0$ первый член в правой части $< CT^{\alpha_1-1}$, а второй ограничен, в то время, как при $T\to\infty$ первый член ограничен, а второй $< CT^{\beta_1-1}$. Таким образом,

$$\int_{-T}^{T}|F(\sigma+it)|^2\,d\sigma < CT^{\alpha_1,\ \beta_1},$$

то есть

$$F(\omega)\in U^{-}M^2(2n-2k-\beta,\ 2n-2k-\alpha).$$

Итак,

$$U^{-}M^2(2n-2k-\beta,\ 2n-2k-\alpha) \equiv \widetilde{D^{n-k}\Delta_{n-k}^{+2}}(\alpha_1\beta).$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 4. Пусть $0<\alpha\leqslant 2n$, $0<\beta<2n$ и целое число k может быть выбрано так, чтобы $n-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\leqslant k<\min\left(n-\frac{\alpha}{2},\ n-\frac{\beta}{2}\right)$. Тогда для принадлежности $f(x)$ классу $\Delta_n^{+2}(\alpha,\beta)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{F(\omega)}{\omega^k}\in U^{-}M^2(2n-2k-\beta,\ 2n-2k-\alpha),$$

где $F(\omega)$ — обобщенное преобразование Фурье производной $f^{(n)}(x)$.

Заметим, что для важного в теории линейных фильтров класса $\Delta_n^{+2}(1, 1)$ можно взять $k=n-1$, и мы получим следующее предложение:

Для того, чтобы $f(x)\in\Delta_n^{+2}(1, 1)$, необходимо и достаточно условие

$$\frac{F(\omega)}{\omega^{n-1}}\in U^{-}M^2(1, 1),$$

где $F(\omega)=\widetilde{f^{(n)}}(x)$.

§ 4. Напомним классическую теорему Винера — Пэли ([1], теорема 12), характеризующую поведение на вещественной оси модуля функции класса U^-L^2.

Теорема Винера—Пэли. Если $F(w) \in U^-L^2$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|F(\sigma)||}{1+\sigma^2} d\sigma < \infty.$$

Обратно, если на вещественной оси σ задана неотрицательная функция $G(\sigma) \in L^2(-\infty, \infty)$, для которой

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln G(\sigma)|}{1+\sigma^2} d\sigma < \infty, \tag{25}$$

то существует функция $F(w) \in U^-L^2$ такая, что $|F(\sigma)| = G(\sigma)$ почти всюду.

Имеет место аналог этой теоремы для классов $U^-M^2(\alpha, \beta)$ при условии, что существует целое k, удовлетворяющее неравенствам

$$\beta - 1 \leqslant 2k < \min(\alpha, \beta). \tag{26}$$

Это условие будет, например, выполнено в важном для приложений случае, когда $\alpha = \beta = 2n + 1$, где n целое.

Теорема 5. Если $F(w) \in U^-M^2(\alpha, \beta)$ и выполнено (26), то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|F(\sigma)||}{1+\sigma^2} d\sigma < \infty.$$

Обратно, если $G(\sigma) \in M^2(\alpha, \beta)$ и выполнено (25) и (26), то существует функция $F(w) \in U^-M^2(\alpha_1\beta)$, для которой почти всюду $|F(\sigma)| = G(\sigma)$.

Доказательство. Нетрудно видеть (ср. § 2, следствие 2), что при соблюдении неравенства (26)

$$U^-M^2(\alpha, \beta) \equiv w^k U^-M^2(\alpha - 2k, \beta - 2k),$$

причем $U^-M^2(\alpha - 2k, \beta - 2k) \subset U^-M^2(0, 1)$.

В таком случае, если $F(w) \in U^-M^2(\alpha, \beta)$, то (см. § 3)

$$\Psi(w) = \frac{F(w)}{w^k} \frac{1 - e^{-4\pi i w \eta}}{4\pi i w \eta} \in U^-L^2,$$

и по теореме Винера — Пэли

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|\Psi(\sigma)||}{1+\sigma^2} d\sigma < \infty.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|F(\sigma)||}{1+\sigma^2} d\sigma < \infty.$$

Вторая часть теоремы доказывается по существу тем же построением, что и теорема Винера — Пэли. Строится гармоническая при $t < 0$ функция

$$u(w) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{G(x)}{x^k} \frac{|t|}{(x-\sigma)^2 + t^2} dx,$$

затем сопряженная гармоническая функция $v(w)$ и

$$F_1(w) = e^{u+iv}.$$

Тогда почти для всех σ

$$\lim_{t\to-0}|F_1(w)|=\frac{G(\sigma)}{\sigma^k}\in M^2(\alpha-2k,\ \beta-2k),$$

то есть

$$\lim_{t\to-0}|w^kF_1(w)|=G(\sigma).$$

Нужно лишь проверить, что $F(w)=w^kF_1(w)\in U^-M^2(\alpha,\ \beta)$, то есть $F_1(w)\in U^-M^2(\alpha-2k,\ \beta-2k)$. Так как

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{G(x)}{x^k}\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx\leqslant\ln\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(x)}{x^{2k}}\frac{|t|\,dx}{(\sigma-x)^2+t^2},$$

то

$$|F_1(w)|^2=e^{2u(w)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G^2(x)}{x^{2k}}\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx,$$

и, как при доказательстве теоремы 4, мы убеждаемся, что из $\frac{G(x)}{x^k}\in$ $\in M^2(\alpha-2k,\ \beta-2k)$ вытекает, что

$$F_1(w)\in U^-M^2(\alpha-2k,\ \beta-2k).$$

Заметим, что построенная в доказательстве этой теоремы функция $F(w)$ не имеет нулей внутри нижней полуплоскости и для ее модуля имеет место представление

$$\ln|F(w)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln G(x)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx.$$

В заключение рассмотрим вопрос о факторизации произвольной функции $F(w)=U^-M^2(\alpha,\ \beta)$. В силу теоремы 5 существует функция $F_0(w)\in U^-M^2(\alpha,\ \beta)$, не имеющая нулей внутри нижней полуплоскости, такая, что

$$\ln|F_0(w)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|F(x)|\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx.$$

На вещественной оси σ почти всюду $|F_0(\sigma)|=|F(\sigma)|$. Пусть a_k нули $F(w)$, лежащие внутри нижней полуплоскости. Так как эти же точки образуют множество нулей функции

$$\Psi(w)=\frac{F(w)}{w^k}\frac{1-e^{-4\pi iw\eta}}{4\pi iw\eta},$$

принадлежащей U^-L^2, то произведение Бляшке

$$b(w)=\prod_k\left(1-\frac{w}{a_k}\right)\left(1-\frac{w}{\bar a_k}\right)^{-1}$$

будет сходящимся. Для равенства

$$F(w)=b(w)F_0(w)\tag{27}$$

необходимо и достаточно наличие представления

$$\ln|F(w)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|F(x)|\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}dx+\ln|b(w)|.$$

Заметим теперь, что $\Psi(w)$, а значит и $F(w)$, являются регулярными функциями конечной степени * в нижней полуплоскости. Если предположить еще аналитичность $F(w)$ на вещественной оси или же непрерывность $\ln|F(w)|$ на оси, то можно будет воспользоваться известной теоремой Р. Неванлинна [5] и написать

$$\ln|F(w)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|F(x)| \frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}\,dx + \ln|b(w)| + k|t|,$$

где

$$k = \overline{\lim_{|t|\to\infty}} \frac{\ln|F(it)|}{|t|} \leqslant 0.$$

Мы видим, таким образом, что для факторизации (27) необходимо и, при наличии дополнительных условий на вещественной оси, достаточно, чтобы $k=0$.

Упомянутые условия на вещественной оси представляются часто излишне обременительными. В связи с этим мы приведем один результат, который, быть может, известен специалистам, но не был обнаружен автором в литературе. Его можно рассматривать, как аналог теоремы Эванса-Брея (см., например, [6], стр. 64).

Теорема 6. Пусть функция $u(w)$, $w=\sigma+it$, гармоническая в нижней полуплоскости $t<0$ и измерима на оси σ. Допустим, что она конечной степени, то есть

$$\overline{\lim_{|w|\to\infty}} \frac{u(w)}{|w|} < \infty,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(\sigma)|}{1+\sigma^2}\,d\sigma < \infty. \tag{28}$$

Тогда для представимости ее в виде

$$u(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\frac{|t|}{(\sigma-x)^2+t^2}\,dx + k|t|, \tag{29}$$

где

$$k = \overline{\lim_{|t|\to\infty}} \frac{u(it)}{|t|}, **$$

необходимо и достаточно, чтобы функция

$$u_\eta(\sigma+it) = \frac{1}{2\eta}\int_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} u(x+it)\,dx, \quad (\eta>0)$$

была непрерывной в замкнутой полуплоскости $t\leqslant 0$.

Замечание. Для случая, когда $u(w)$ непрерывна в замкнутой полуплоскости $t\leqslant 0$, этот результат содержится в одной теореме Б. Я. Левина (см. [7], стр. 303). В доказательстве нашей теоремы это обстоятельство будет использовано.

* И даже минимального типа.

** Фактически из формулы (29) вытекает существование $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{u(it)}{|t|} = \lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{u(\sigma+it)}{|t|}$ при фиксированном σ.

Доказательство. Если (29) имеет место то

$$u_\eta(\sigma + it) = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \left[\operatorname{arctg} \frac{\sigma - x + \eta}{|t|} - \operatorname{arctg} \frac{\sigma - x - \eta}{|t|}\right] dx + k|t| =$$

$$= \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) K_\eta(\sigma - x,\ t)\, dx + k|t|,$$

причем $K_\eta(\sigma - x,\ t)$ есть угол, под которым виден из точки x отрезок $(\sigma - \eta + it,\ \sigma + \eta + it)$, или, что то же самое, угол, под которым виден из точки $\sigma + it$ отрезок $(x - \eta,\ x + \eta)$. Следовательно,

$$\lim_{\sigma + it \to y} K_\eta(\sigma - x,\ t) = \begin{cases} 0 \text{ при } |x - y| > \eta, \\ \pi \text{ при } |x - y| < \eta. \end{cases}$$

Так как предельный переход под интегралом легко обосновывается с помощью условия (28), то

$$\lim_{\sigma + it \to y} u_\eta(\sigma + it) = \frac{1}{2\eta} \int_{y-\eta}^{y+\eta} u(x)\, dx = u_\eta(y),$$

что и доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность его также доказывается просто. На основании теоремы Б. Я. Левина.

$$u_\eta(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_\eta(x) \frac{|t|}{(\sigma - x)^2 + t^2} dx + \kappa_\eta |t|,$$

причем, как легко видеть (см. подстрочное примечание), $\kappa_\eta = \kappa$. Так как при $\eta \to 0$ $u_\eta(x)$ сильно сходится к $u(x)$ в пространстве L с весом $(1 + x^2)^{-1}$, то при любых σ, $t < 0$ можно в последней формуле сделать предельный переход, что дает (29).

В применении к задаче факторизации (27) эта теорема дает следующий результат, который мы для простоты сформулируем для функций класса $U^- M^2(1,\ 1) \equiv U^- M^2$.

Теорема 7. Пусть $F(w) \in U^- M^2$. Для возможности факторизации

$$F(w) = b(w) F_0(w), \qquad \textbf{(27)}$$

где

$$b(w) = \prod_k \left(1 - \frac{w}{a_k}\right)\left(1 - \frac{w}{\bar{a}_k}\right)^{-1},$$

а $F_0(w) \in U^- M^2$, причем

$$\ln |F_0(w)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |F(x)| \frac{|t|}{(\sigma - x)^2 + t^2} dx$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{|t| \to \infty}} \frac{\ln |F(it)|}{|t|} = 0$$

и чтобы функция

$$u_\eta(\sigma + it) = \frac{1}{2\eta} \int_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} \ln |F(x + it)|\, dx, \quad (\eta > 0)$$

была непрерывной в замкнутой полуплоскости $t \leqslant 0$.

Доказательство. Приняв во внимание теорему 6 и предшествовавшее ей замечание, мы видим, что дело сводится к доказательству непрерывности в замкнутой полуплоскости $t \leqslant 0$ функции

$$B_\eta(\sigma + it) = \frac{1}{2\eta} \int\limits_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} \ln |b(x+it)|\, dx.$$

Так как ее непрерывность во внутренних точках полуплоскости очевидна, то будем доказывать, что она непрерывна в точке σ_0 вещественной оси.

Положим

$$b(w) = b_1(w)\, b_2(w),$$

где

$$b_1(w) = \prod_{|a_k-\sigma_0|<1} \left(1-\frac{w}{a_k}\right)\left(1-\frac{w}{\bar a_k}\right)^{-1},$$

$$b_2(w) = \prod_{|a_k-\sigma_0|\geqslant 1} \left(1-\frac{w}{a_k}\right)\left(1-\frac{w}{\bar a_k}\right)^{-1}.$$

Так как $\ln|b_2(w)|$ очевидно непрерывна в точке σ_0, то нам достаточно установить непрерывность функции

$$B_\eta^{(1)}(\sigma + it) = \frac{1}{2\eta} \int\limits_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} \ln |b_1(x+it)|\, dx.$$

Заметим, прежде всего, что из условия сходимости произведения Блашке $b(w)$ следует сходимость ряда

$$\sum_{|a_k-\sigma_0|<1} \tau_k, \quad \tau_k = -\operatorname{Im} a_k > 0.$$

Далее

$$B_\eta^{(1)}(\sigma+it) = \sum_{|a_k-\sigma_0|<1} \left\{\frac{1}{2\eta}\int\limits_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} \ln|x+it-a_k|\,dx - \frac{1}{2\eta}\int\limits_{\sigma-\eta}^{\sigma+\eta} \ln|x+it-\bar a_k|\,dx\right\} =$$

$$= \sum_{|a_k-\sigma_0|<1} \left\{\frac{1}{2\eta}\int\limits_{a_k-\eta}^{a_k+\eta} \ln|\sigma+it-x|\,dx - \frac{1}{2\eta}\int\limits_{\bar a_k-\eta}^{\bar a_k+\eta} \ln|\sigma+it-x|\,dx\right\}.$$

Функция

$$p_k(\sigma+it) = \frac{1}{2\eta}\int\limits_{a_k-\eta}^{a_k+\eta} \ln|\sigma+it-x|\,dx - \frac{1}{2\eta}\int\limits_{\bar a_k-\eta}^{\bar a_k+\eta} \ln|\sigma+it-x|\,dx$$

является логарифмическим потенциалом массы $+1$, равномерно распределенной на отрезке $(\bar a_k-\eta,\ \bar a_k+\eta)$, и массы -1, равномерно распределенной на отрезке $(a_k-\eta,\ a_k+\eta)$. Так как на бесконечности $p_k \to 0$, то p_k достигает максимума на отрезке $(\bar a_k-\eta,\ \bar a_k+\eta)$, а минимума (имеющего ту же абсолютную величину) — на отрезке $(a_k-\eta,\ a_k+\eta)$. Поэтому

$$|p_k(\sigma+it)| \leqslant \max_{-\eta\leqslant\xi\leqslant\eta} \left\{\frac{1}{2\eta}\int\limits_{a_k-\eta}^{a_k+\eta} \ln|\bar a_k+\xi-x|\,dx - \frac{1}{2\eta}\int\limits_{\bar a_k-\eta}^{\bar a_k+\eta} \ln|\bar a_k+\xi-x|\,dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\eta} \max_{-\eta<\xi<\eta} \left\{ \int_{-\eta}^{\eta} \ln|\bar{a}_k - a_k + \xi - x|\,dx - \int_{-\eta}^{\eta} \ln|\xi - x|\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\eta} \max_{-\eta<\xi<\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \ln\left|1 + \frac{2i\tau_k}{\xi - x}\right| dx =$$

$$= \frac{1}{4\eta} \max_{-\eta<\xi<\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \ln\left(1 + \frac{4\tau_k^2}{(\xi-x)^2}\right) dx = \frac{\tau_k}{2\eta} \max_{-\eta<\xi<\eta} \int_{\frac{-\eta-\xi}{2\tau_k}}^{\frac{\eta-\xi}{2\tau_k}} \ln\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau_k}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy,$$

и сходимость ряда $\sum\limits_{|a_k-\sigma_0|<1} \tau_k$ показывает, что ряд

$$\sum_{|a_k-\sigma_0|<1} p_k(\sigma + it) = B_\eta^{(1)}(\sigma + it)$$

сходится равномерно во всей плоскости. Из непрерывности потенциалов p_k вытекает непрерывность $B_\eta^{(1)}(\sigma + it)$ и вместе с тем справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. A. C. Paley, N. Wiener. Fourier trausforms in the complex domain, New York, 1934.
2. N. Wiener. The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933
3. И, М, Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
4. L. Schwartz. Théorie des distributions, I, Paris, 1950.
5. R. Nevanlinna. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum. Acta Soc. Sci. Fenn., 50, № 12, 1925.
6. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
7. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.

Примечание при корректуре.

1) Как указали автору Е. Д. Соломенцев и А. А. Бонами, непрерывность B_η $(\sigma + it)$ была установлена впервые В. И. Крыловым в статье «О функциях, регулярных в полуплоскости» (Матем. Сб., 6 (48), № 1, 1939. Наше доказательство отличается от доказательства В. И. Крылова.

2. Основные результаты настоящей статьи изложены без доказательств в заметке автора в ДАН СССР, 1962, *147*, № 3.