

К-14038

290124

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 134

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 41



56 коп.



Математика и механика, 1976, № 134, вып. 41, с. 1—125,3.

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 134

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 41

ИЗДАТЕЛЬСКОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ «ВИЩА ШКОЛА»
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
Харьков — 1976

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета (протокол № 2 от 28 февраля 1975 г.).

В вестнике рассматриваются некоторые вопросы прикладной математики и механики, а также алгебры.
Предназначен для научных работников и преподавателей.

Редакционная коллегия:

В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, А. П. Маринич
(отв. секр.), *В. А. Марченко, И. Е. Тарапов* (отв. ред.).

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков, 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет. Тел. 40-14-40.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорокун*.



А. С. КАШУРКО, канд. техн. наук,
В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук,
Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук,
В. А. СИНЯКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОМАТА ВОЖДЕНИЯ САМОХОДНОЙ МАШИНЫ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО КРИВУЮ С ПОМОЩЬЮ КОПИРА

Пусть требуется, чтобы заданная точка K самоходной машины отслеживала некоторую кривую, которая заранее неизвестна, информация о ней вырабатывается устройством, называемым копиром.

В каждый момент времени t копир определяет положение находящейся впереди машины точки $P(t)$ отслеживаемой кривой.

Зная положение точки P относительно машины, автомат вождения должен обеспечивать такой угол поворота передних колес, при котором точка K машины возможно точнее повторяет траекторию точки P .

В дальнейшем для конкретности рассмотрим в качестве самоходной машины свеклоуборочный комбайн с механическим копиром (хотя все рассуждения не зависят от конкретного вида самоходной машины и конструкции копира).

У реального свеклоуборочного комбайна имеется шесть копателей, одновременно движущихся по шести соседним рядкам, а копир состоит из трех горизонтальных пластин, движущихся между четырьмя соседними рядками и жестко прикрепленных к одной штанге PC (рисунок), которая в точке C может поворачиваться относительно оси комбайна.

Копиром будем называть P — точку крепления среднего из трех реальных копиров к штанге PC . Траектория точки P получается некоторым усреднением траекторий четырех соседних рядков, между которыми движутся копиры (она игнорирует случайные колебания отдельных рядков, различную толщину корней, возможные пропуски корней на рядках и другие дефекты отдельных рядков).

Траекторию точки P в дальнейшем будем называть рядком. Точно так же назовем копателем точку K на оси комбайна AB , полученную пересечением этой оси с перпендикулярной к ней общей осью шести реальных копателей.

В этих терминах задача автомата вождения заключается в выработке такого управления — угла $\alpha(t)$ по наблюдаемому углу $\varphi(\cdot)$ (т. е. по $\varphi(t')$ при $0 \leq t' \leq t$), которое обеспечивает наименьшее (в некотором заданном смысле) отклонение траектории точки K от траектории точки P (см. рисунок).

1. Уравнения движения

Положение комбайна в некоторой фиксированной системе координат XU будем описывать тремя обобщенными координатами: $x_A(t)$, $y_A(t)$, $\gamma(t)$ (рисунок). Все углы измеряем по ходу часовой стрелки.

Сделаем два предположения о характере движения комбайна.

1) Колеса не имеют бокового скольжения, т. е. скорость точки A направлена по оси комбайна, а скорость точки B — под углом α к оси, т. е. по лучу BD . Отсюда следует, что мгновенный центр скоростей O находится на пересечении перпендикуляров к AB и BD , проведенных соответственно из точек A и B .

2) Точка A движется с заданной постоянной по модулю скоростью V . Поэтому первые два уравнения движения записываются так:

$$\dot{x}_A(t) = v \cos \gamma(t), \quad (1)$$

$$\dot{y}_A(t) = v \sin \gamma(t). \quad (2)$$

Для вывода уравнения относительно $\dot{\gamma}(t)$ рассмотрим треугольники AOA' и AOB .

Получим

$$-d\gamma = \frac{v dt}{AO} = \frac{v dt}{-AB \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Обозначим $AK=L_1$, $KB=L_2$, $BC=L_3$, $PC=l$. Тогда требуемое уравнение примет вид

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{v \operatorname{tg} \alpha(t)}{L_1 + L_2}. \quad (3)$$

Координаты нужных нам в дальнейшем точек K и P определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_K &= x_A + L_1 \cos \gamma, & x_P &= x_A + (L_1 + L_2 + L_3) \cos \gamma - l \cos(\varphi + \gamma), \\ y_K &= y_A + L_1 \sin \gamma, & y_P &= y_A + (L_1 + L_2 + L_3) \sin \gamma - l \sin(\varphi + \gamma). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Постановка задачи

Сделаем некоторые предположения о характере траектории рядка и движении комбайна.

1) Рядок — достаточно плавная и гладкая кривая $y=f(x)$.

2) Наклон к оси x -ов и кривизна рядка не настолько велики, чтобы нарушилась монотонность функций $x_A(t)$, $x_K(t)$, $x_P(t)$.

Будем считать, что при любых движениях комбайна выполнены неравенства

$$\dot{x}_A(t), \dot{x}_K(t), \dot{x}_P(t) > 0. \quad (5)$$

Отсюда из (1) вытекает, что

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma(t) < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Введем $\tau(t)$ следующим образом:

$$x_K(t + \tau(t)) = x_P(t). \quad (7)$$

Иными словами, $\tau(t)$ — время, за которое точка K с прямой $x = x_K(t)$ достигает прямой $x = x_P(t)$, на которой в момент t находился копир (и мы гарантируем, что точка $(x_P(t), y_P(t))$ находится точно на рядке). Условия (5) обеспечивают существование и непрерывность $\tau(t)$.

За меру отклонения точки K от рядка (в момент времени $t + \tau(t)$) примем

$$\omega(t) = y_K(t + \tau(t)) - y_P(t). \quad (8)$$

Задача формулируется так: выбрать управление $\alpha(t)$ как функцию наблюдаемой величины $\varphi(\cdot)$ (т. е. $\varphi(t')$ на интервале $[0, t]$) при заданных ограничениях на α (например, на характер зависимости α от $\varphi(\cdot)$, на величину α и т. п.), чтобы отклонение $\omega(t)$, определяемое из (7), (8), было в некотором заданном смысле минимальным.

3. Идеальный выбор управления

Очевидно, наилучшим будет выбор управления $\alpha(t)$, при котором отклонение $\omega(t)$ — тождественный нуль при всех $t \geq 0$ (т. е. точка K следует точно по рядку при всех $t \geq \tau(0)$).

Таким образом, идеальный выбор управления обеспечивается выполнением уравнения

$$y_K(t + \tau(t)) - y_P(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

где $\tau(t)$ исключается с помощью (7).

Покажем существование идеального режима.

Доказательство разобьем на два этапа.

Сначала докажем существование функции $\alpha(t)$ на $[0, \infty)$, которая, начиная с некоторого момента $\tau(0)$, обеспечивает движение точки K по рядку, т. е. равенство

$$y_K(t) = f(x_K(t)). \quad (10)$$

При этом получим $\alpha(t)$ как функцию времени и траектории рядка $y = f(x)$.

На втором этапе покажем, что $\alpha(t)$ может быть получена как функция наблюдаемой величины $\varphi(\cdot)$, т. е. как идеальное управление по нашему определению.

Перейдем к первому этапу доказательства.

Пусть в момент $t=0$ заданы параметры комбайна $x_A(0)$, $y_A(0)$, $\dot{\gamma}(0)$, $x_P(0)$, $y_P(0)$. Задача первого этапа состоит в отыскании управления $\alpha(t)$ сначала на интервале $[0, \tau(0)]$ для некоторого $\tau(0)$, удовлетворяющего неравенству

$$\tau(0) > \frac{1}{v} \sqrt{(x_K(0) - x_P(0))^2 + (y_K(0) - y_P(0))^2},$$

которое обеспечивает вывод точки K из положения $K(0)$ в положение $K(\tau(0)) = P(0)$ (см. рисунок), а затем в нахождении управления $\alpha(t)$ на $[\tau(0), \infty)$, обеспечивающего дальнейшее движение точки K по рядку, т. е. по кривой $y=f(x)$.

Таким образом, на интервале $[0, \tau]$ ($\tau=\tau(0)$) функция $\alpha(t)$ должна удовлетворять двум соотношениям:

$$x_K(\tau) = x_P(0), \quad (11)$$

$$y_K(\tau) = y_P(0). \quad (12)$$

К этим соотношениям можно добавить равенства, из которых будет следовать, что в момент времени $\tau=\tau(0)$ ось комбайна совпадает с касательной к рядку (что обеспечит более плавное движение комбайна):

$$\alpha(\tau) = 0, \quad \dot{y}_A(\tau) = f'(x_P(0)) \dot{x}_A(\tau). \quad (13)$$

В силу уравнений (1)–(3) равенства (11)–(13) представляют собой три интегральных соотношения относительно $\alpha(t)$ на $[0, \tau]$, из которых (разумеется, неоднозначно) можно определить $\alpha(t)$ на этом интервале.

Чтобы найти $\alpha(t)$ на $[\tau, \infty)$, выведем дифференциальное уравнение для величины $y_A(t)$. После нахождения $y_A(t)$ из дифференциальных уравнений (1)–(3) получим

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{L_1 + L_2}{v} \dot{\gamma}(t) = \frac{(L_1 + L_2) \ddot{y}_A(t)}{v \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(t)}}. \quad (14)$$

Таким образом, вопрос сводится к нахождению $y_A(t)$ и исследованию гладкости этой функции.

Легко видеть, что

$$y_K(t) = y_A(t) + \frac{L_1}{v} \dot{y}_A(t); \quad \dot{x}_A(t) = \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(t)},$$

$$x_K(t) = x_A(\tau) + \int_{\tau}^t \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(\theta)} d\theta + \frac{L_1}{v} \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(t)}.$$

Поэтому равенство (10) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно $y_A(t)$:

$$y_A(t) + \frac{L_1}{v} \dot{y}_A(t) = f(x_A(\tau)) + \int_{\tau}^t \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(\theta)} d\theta +$$

$$+ \frac{L_1}{v} \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(t)}. \quad (15)$$

Продифференцируем полученное уравнение и для сохранения эквивалентности преобразований добавим соотношение в точке τ :

$$y_A(\tau) + \frac{L_1}{v} \dot{y}_A(\tau) = f(x_P(0)), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_A + \frac{L_1}{v} \ddot{y}_A = f' \left(x_A(\tau) + \int_{\tau}^t \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2(\theta)} d\theta + \frac{L_1}{v} \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2} \right) \times \\ \times \left(\sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2} - \frac{L_1 \dot{y}_A \ddot{y}_A}{v \sqrt{v^2 - \dot{y}_A^2}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Исключая величину $x_K(t)$, стоящую под знаком f' , с помощью (15) получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно $y_A(t)$ (начальные условия находим из равенств (11) и (16)).

Так как для реального рядка $f'(x)$ достаточно мало, то уравнение (17) разрешимо относительно $\ddot{y}_A(t)$, и при обычных предположениях это уравнение с начальными условиями (11), (16) имеет решение. При этом, если $f(x)$ имеет m ограниченных производных на $[0, \infty)$, $y_A(t)$ будет иметь $m+1$ ограниченную производную на $[\tau, \infty)$. Тогда $\alpha(t)$, определяемое формулой (14), имеет $m-1$ ограниченную производную при $t \geq \tau$.

Легко проверить, что из условия (13) следует непрерывность $\alpha(t)$ в точке $\tau(0)$: $\alpha(\tau-0) = \alpha(\tau+0) = 0$.

Если необходимо, можно, добавив к (11) — (13) несколько аналогичных равенств, добиться равенства левых производных $\alpha(t)$ в точке τ правым производным, получаемым с помощью дифференциального уравнения (17) и равенства (14).

Таким образом, получим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$ на $[0, \infty)$, обеспечивающую идеальное отслеживание при $t \geq \tau(0)$ точкой K рядка.

Переходим ко второму этапу доказательства: возможности выразить $\alpha(t)$ через $\varphi(\cdot)$.

Прежде всего из равенства (7) ввиду монотонности $x_K(t)$ и $x_P(t)$ следует существование достаточно гладкой функции $\tau(t)$. Условия (5) обеспечивают также выполнение неравенства $1 + \tau'(t) > 0$.

Выразим в уравнениях (7), (9) все величины через $\alpha(\cdot)$ и $\tau(t)$ с помощью (1) — (3).

Имеем

$$\begin{aligned} x_A(t + \tau) = x_A(t) + v \int_t^{t+\tau} \cos \gamma(t') dt', \quad y_A(t + \tau) = y_A(t) + \\ + v \int_t^{t+\tau} \sin \gamma(t') dt', \end{aligned}$$

$$\mu(t', t) = \frac{v}{L_1 + L_2} \int_t^{t'} \operatorname{tg} \alpha(\theta) d\theta, \quad (18)$$

$$\gamma(t') = \gamma(t) + \mu(t', t).$$

Уравнение (7) примет вид

$$L_1 \cos[\gamma(t) + \mu(t + \tau, t)] + v \int_t^{t+\tau} \cos[\gamma(t) + \mu(t', t)] dt' - \\ - (L_1 + L_2 + L_3) \cos \gamma(t) + l \cos(\gamma(t) + \varphi(t)) = 0,$$

а уравнение (9) —

$$L_1 \sin[\gamma(t) + \mu(t + \tau, t)] + v \int_t^{t+\tau} \sin[\gamma(t) + \mu(t', t)] dt' - \\ - (L_1 + L_2 + L_3) \sin \gamma(t) + l \sin(\gamma(t) + \varphi(t)) = 0.$$

Эти уравнения можно несколько упростить, исключив $\gamma(t)$. Запишем их

$$a \cos \gamma(t) - b \sin \gamma(t) = 0, \quad a \sin \gamma(t) + b \cos \gamma(t) = 0,$$

откуда $a = b = 0$.

Таким образом,

$$a = L_1 \cos \mu(t + \tau, t) + v \int_t^{t+\tau} \cos \mu(t', t) dt' - \\ - L_1 - L_2 - L_3 + l \cos \varphi(t) = 0, \quad (19)$$

$$b = L_1 \sin \mu(t + \tau, t) + v \int_t^{t+\tau} \sin \mu(t', t) dt' + l \sin \varphi(t) = 0. \quad (20)$$

Покажем, что эти функциональные уравнения относительно $\alpha(t)$ и $\tau(t)$ приводят к своеобразной системе уравнений с отклоняющимся аргументом.

Продифференцируем уравнения (19), (20) и, снова используя (19), (20), исключим интегралы

$$-CW \sin \mu(t + \tau(t), t) + W \cos \mu(t + \tau(t), t) = B, \quad (21)$$

$$CW \cos \mu(t + \tau(t), t) + W \sin \mu(t + \tau(t), t) = A,$$

где введены следующие обозначения:

$$A = v\beta(t)(L_1 + L_2 + L_3 - l \cos \varphi(t)) - l \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t),$$

$$B = v + l \sin \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) + v\beta(t) l \sin \varphi(t), \quad (22)$$

$$C = L_1 \beta(t + \tau(t)); \quad W = v(1 + \dot{\tau}(t)); \quad \beta(t) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(t)}{L_1 + L_2}.$$

К (21) необходимо добавить два соотношения при $t=0$:

$$L_1 \cos \mu(\tau(0), 0) + v \int_0^{\tau(0)} \cos \mu(t', 0) dt' - L_1 - L_2 - L_3 + l \cos \varphi(0) = 0,$$

$$L_1 \sin \mu(\tau(0), 0) + v \int_0^{\tau(0)} \sin \mu(t', 0) dt' + l \sin \varphi(0) = 0. \quad (23)$$

Возводя уравнения (21) в квадрат и складывая, получаем

$$(C^2 + 1)W^2 = A^2 + B^2,$$

откуда

$$\dot{\tau}(t) = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{1 + C^2}}. \quad (24)$$

Поделив уравнения (21) одно на другое, имеем

$$\frac{-C \operatorname{tg} \mu(t + \tau, t) + 1}{C + \operatorname{tg} \mu(t + \tau, t)} = \frac{B}{A}.$$

Отсюда, используя (18) и (22), получим

$$v \int_t^{t+\tau} \beta(\theta) d\theta = \operatorname{arctg} \frac{A - BC}{B + AC}. \quad (25)$$

Продифференцируем это уравнение, добавив соотношение при $t=0$:

$$v \int_0^{\tau} \beta(\theta) d\theta = \operatorname{arctg} \frac{A(0) - B(0)C(0)}{B(0) + A(0)C(0)}, \quad (26)$$

$$v\beta(t + \tau(t))(1 + \dot{\tau}(t)) - v\beta(t) = \frac{\dot{A}B - A\dot{B}}{A^2 + B^2} - \frac{\dot{C}}{1 + C^2}. \quad (27)$$

Подставляя выражение для $1 + \dot{\tau}(t)$ из (24), получим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом нейтрального типа [1] для $\beta(t)$:

$$L_1 \frac{d}{dt} \beta(t + \tau(t)) = (1 + C^2) \left[\frac{\dot{A}B - A\dot{B}}{A^2 + B^2} + v\beta(t) - \beta(t + \tau(t)) \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{1 + C^2}} \right]. \quad (28)$$

Здесь отклонение $\tau(t)$ само удовлетворяет дифференциальному уравнению (24), и уравнения (28) и (24) необходимо рассматривать совместно. Решение уравнения $\beta(t) = (L_1 + L_2)^{-1} \operatorname{tg} \alpha(t)$ существует, и требуется лишь выразить его через $\varphi(\cdot)$.

Задано $\tau(0)$ и $\beta(t')$ на интервале $[0, \tau(0)]$, поэтому на интервале $0 \leq t \leq t_1$ ($t_1 = \tau(0)$) (28) является обычным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $z(t) = \beta(t + \tau(t))$ (остальные функции $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $\Phi(t)$, $\varphi(t)$, входящие в A , B , C и их производные, известны на $[0, t_1]$).

Найдя $z(t)$ на $[0, t_1]$, из уравнения (24) находим $\tau(t)$ на $[0, t_1]$. Зная $\tau(t)$ и $z(t)$ на интервале $[0, t_1]$, можно найти $\beta(t')$ на следующем интервале $[t_1, t_2]$ ($t_2 = t_1 + \tau(t_1)$).

Действительно, решим уравнение $t' = t + \tau(t)$ ($t_1 \leq t' \leq t_2$) относительно t (условие $1 + \tau(t) > 0$ обеспечивает разрешимость этого уравнения):

$$t = \Psi(t')$$

и получим

$$\beta(t') = z(\Psi(t')), \quad t_1 \leq t' \leq t_2.$$

Таким образом, на $[t_1, t_2]$ $\beta(t)$ выражается через $\varphi(\cdot)$ и «начальные значения» $\beta(t)$ на $[0, t_1]$.

На интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ в уравнении (28) снова известны $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$, и оно превращается в дифференциальное уравнение относительно $z(t)$ с начальным условием

$$z(t_1) = \beta(t_1 + \tau(t_1)) = \beta(t_2).$$

Найдя $z(t)$, определим $\tau(t)$ на том же интервале $[t_1, t_2]$ и, решив уравнение $t' = t + \tau(t)$, $t_2 \leq t' \leq t_3 = t_2 + \tau(t_2)$, получим $\beta(t') = z(\Psi_i(t'))$, $t_2 \leq t' \leq t_3$. И так далее.

Имея в виду, что для любого t

$$\tau(t) \geq \frac{1}{v} \sqrt{(x_K(t) - x_P(t))^2 + (y_K(t) - y_P(t))^2} =$$

$$= \frac{1}{v} \sqrt{(L_2 + L_3 - l \cos \varphi(t))^2 + (l \sin \varphi(t))^2} \geq \frac{1}{v} (L_2 + L_3 - l)$$

(см. рисунок и определение $\tau(t)$), получим

$$t_{n+1} - t_n = \tau(t_n) \geq \frac{L_2 + L_3 - l}{v},$$

т. е. $t_n \rightarrow \infty$. И решение может быть продолжено как угодно далеко.

Следовательно, для любого t $\beta(t)$ выражается через $\varphi(\cdot)$ (в частности, через производные до второго порядка от $\varphi(\cdot)$).

Алгоритм нахождения идеального управления достаточно сложен. Совсем простое решение можно получить, если τ мало по сравнению с минимальным радиусом кривизны рядка.

4. Приближенное решение функциональных уравнений (9), (10) при малых τ

Примем, что τ настолько мало, что $\operatorname{tg} \alpha(t)$ на интервале $[t, t + \tau(t)]$ можно заменить постоянным значением $\operatorname{tg} \alpha(t)$.

При этом предположении уравнения (9), (10) (с учетом линейности функции $\mu(t', t)$ по t') легко разрешимы относительно $\alpha(t)$.

Однако вместо этого (довольно громоздкого) решения воспользуемся простыми геометрическими соображениями. Так как угол поворота передних колес на интервале $[t, t + \tau]$ является постоянным, то движение комбайна является поворотом жесткого тела

вокруг закрепленной точки — центра скоростей O (рисунок). При этом точка $K(t)$ перемещается по дуге окружности в положение $K(t+\tau)=P(t)$. Приравнявая OK^2 и OP^2 , получаем

$$[(L_1 + L_2) \operatorname{ctg} \alpha(t)]^2 + L_1^2 = [L_1 + L_2 + L_3 - l \cos \varphi(t)]^2 + \\ + [(L_1 + L_2) \operatorname{ctg} \alpha(t) - l \sin \varphi(t)]^2.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{-2l(L_1 + L_2) \sin \varphi(t)}{l^2 + (L_1 + L_2 + L_3)^2 - L_1^2 - 2l(L_1 + L_2 + L_3) \cos \varphi(t)}.$$

В этом приближении $\alpha(t)$ является функцией только от $\varphi(t)$ и не зависит от предыдущего положения копира. Такой алгоритм является наиболее простым и удобным для практического применения. В то же время он является приближением идеального режима с точностью $O(\tau)$ и вполне оправдывает себя на практике (так как при малой кривизне рядка $\operatorname{tg} \alpha(t)$ действительно медленно меняется).

Такой алгоритм выбора управления [2] принят в существующем корнеуборочном комбайне КС-6 [3], автомат вождения для которого разработан в лаборатории автоматизации УкрНИИСХОМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., «Наука», 1974. 296 с.
2. Кашурко А. С. Определение передаточного отношения обратной связи системы автовождения самоходной корнеуборочной машины. — «Совместные труды УкрНИИСХОМ и ВИСХОМ», 1969, вып. VI, с. 91—95.
3. Татьяна Н. В., Кашурко А. С. Машина корнеуборочная самоходная КС-6. Харьков, 1974. 120 с.

Поступила 16 января 1975 г.

УДК 518.825

Л. П. ТАТАРЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
В. П. ПЕРЬКОВА,
А. И. ЛИТВИНЕНКО, канд. сельхоз. наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЗВРАТНОГО СКРЕЩИВАНИЯ ПРИ ОТБОРЕ КОНСТАНТНЫХ ФОРМ В ГИБРИДНОМ ПОТОМСТВЕ САМООПЫЛИТЕЛЕЙ

Возьмем организмы с k нецепленными генами: $AABB...DD$ и $aabb...dd$ и рассмотрим задачу получения (после скрещивания и расщепления) организма с генотипом $aabb...dd$ при условии, что дальнейшее развитие идет путем самоопыления.

Очевидно, что вероятность в процентах появления организма нужного нам генотипа во втором поколении будет $\frac{100}{4^k} \%$, а в пределе — $\frac{100}{2^k} \%$.

Если в каждом поколении мы будем проводить отбор организмов, у которых первая пара генов находится в состоянии aa , то указанные выше вероятности увеличатся и будет соответственно $\frac{100}{4^{k-1}}$

и $\frac{100}{2^{k-1}} \%$.

Попытаемся улучшить процесс получения организмов нужного генотипа следующим образом: отберем из второго поколения организмы, у которых первая пара хромосом находится в состоянии aa , а затем скрестим их с организмами генотипа $AABB...DD$. Из дальнейших поколений будем отбирать только гибриды с первой парой хромосом в состоянии aa .

Разобьем все гибриды второго поколения на классы согласно использовавшейся в работе¹ классификации: к классу p ($p=0, 1, \dots, k$) отнесем те организмы, у которых ровно p пар хромосом в гетерозиготном состоянии. В классе выделим подклассы. К подклассу q ($q=0, 1, \dots, k-p$) отнесем те организмы, у которых q пар рецессивных гомозиготных хромосом.

Подсчитаем, сколько различных по генотипу организмов будет принадлежать подклассу q класса p после отбора из второго поколения тех, у которых первая пара хромосом находится в состоянии aa ($q \geq 1$). Тогда p гетерозиготных пар хромосом на $k-1$ местах размещаются C_{k-1}^p способами, а $q-1$ рецессивная гомозиготная пара хромосом на оставшихся $k-p-1$ местах — C_{k-p-1}^{q-1} способами и всего различных по генотипу организмов остается $C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{q-1}$ с повторностью каждого 2^p (так как гетерозиготы Ll и lL мы считаем идентичными).

Рассмотрим процесс скрещивания отобранных организмов второго поколения подкласса q с организмами генотипа $AABB...DD$ и классифицируем их потомков.

При скрещивании рецессивных гомозиготных пар с доминантными получим гетерозиготы, а при скрещивании гетерозиготных пар с доминантными — гетерозиготы и доминантные гомозиготы. Это означает, что среди потомков будут организмы с $q, q+1, \dots, q+p$ гетерозиготными парами хромосом в соответствии с формулой

$$2^p C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{q-1} = \sum_{i=0}^p C_p^i C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{q-1}. \quad (1)$$

Каждое слагаемое в (1) представляет собой после скрещивания число потомков подкласса q , принадлежащих классу $q+i$. Обозначим этот класс через $t+1=q+i$, и тогда слагаемое запишется в виде

$$C_p^i C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{t-1}. \quad (2)$$

¹ В. В. Гришина, А. И. Литвиненко, Л. П. Татарченко. Некоторые задачи развития популяций при самоопылении. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», вып. 36. Харьков, 1971, с. 23—26.

Так как у потомков на первом месте обязательно гетерозигота Aa , то в рассматриваемом классе $t+1$ будет C_{k-1}^t различных по генотипу организмов.

Выделим в формуле (2) их повторность. Нетрудно проверить, что

$$C_p^i C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{t-i} = C_{k-1}^t (C_i^t C_{k-(t+1)}^{p-i}),$$

где $C_i^t C_{k-(t+1)}^{p-i}$ и есть искомая величина.

Суммирование ее по i даст общее число повторности потомков класса $t+1$ за счет возвратного скрещивания организмов всех подклассов класса p :

$$\sum_{i=0}^p C_i^t C_{k-(t+1)}^{p-i} = C_{k-1}^p. \quad (3)$$

Суммирование (3) по p даст полную повторность каждого из организмов класса $t+1$:

$$\sum_{p=0}^k C_{k-1}^p = 2^{k-1}.$$

Таким образом, после возвратного скрещивания число равновероятных потомков не зависит от класса (от t). Эти организмы в дальнейшем развиваются путем самоопыления и в каждом поколении мы теперь будем оставлять только те, у которых первая пара хромосом содержит рецессивную гомозиготную пару генов.

Рассмотрим 3^k -мерный вектор U_n , элементы которого есть количества организмов различных генотипов в поколении n . Разобьем его компоненты на группы и подгруппы в соответствии с введенной выше классификацией.

Количество организмов некоторого определенного генотипа j подгруппы q группы p в поколении n обозначим через $S_{p,q}^{(n)}(j)$. Мы установили, что начальный вектор U_0 характеризуется тем, что отличные от нулей его элементы равны между собой (так как после возвратного скрещивания число равновероятных потомков не зависит от класса). Для удобства положим их равными единицам.

Все организмы начального поколения имеют генотипы, у которых первая пара хромосом находится в гетерозиготном состоянии и на остальных местах стоят только гетерозиготы или доминантные гомозиготы. Отсюда следует, что в p -й группе начального вектора C_{k-1}^{p-1} отличных от нулей элементов и все они принадлежат одной подгруппе ($q=0$), а в первой группе ($p=0$) вообще нет отличных от нулей элементов.

Рассмотрим теперь элементы вектора U_1 . Любой организм этого поколения имеет первую пару хромосом в состоянии aa (в силу отбора), а все другие могут находиться в произвольных состояниях.

Отсюда следует, что p -я группа элементов U_1 будет содержать $C_{k-1}^p 2^{k-1-p}$ отличных от нулей элементов, а ее подгруппа q — $C_{k-1}^p C_{k-1-p}^{q-1}$ элементов ($q = 1, 2, \dots, k-p$).

Подсчитаем $S_{p,q}^{(1)}(j)$ ($j = 1, 2, \dots, C_{k-1}^p C_{k-1-p}^{q-1}$).

Так как это организмы с p гетерозиготами и с q рецессивными гомозиготами, то они могут появиться только при расщеплении организмов с не менее, чем $p+q$ гетерозиготами. Рассмотрим группу $p+q+t$ вектора U_0 ($t=0, 1, \dots, k-p-q$).

Поскольку нам нужен организм с p гетерозиготами и q рецессивными гомозиготами, то t остающихся гетерозиготных пар (переходящих в доминантные гомозиготы) могут быть размещены на остающихся $k-p-q$ местах C_{k-p-q}^t способами. Это означает, что C_{k-p-q}^t организмов различных генотипов класса $p+q+t$ (начального поколения) дадут потомков, принадлежащих подклассу q класса p первого поколения. Используя итерационную матрицу, введенную в работе [1], получим, что вклад рассматриваемой группы в нужный нам организм первого поколения будет $4^{k-(p+q+t)} 2^p C_{k-p-q}^t$. Общее же количество $S_{p,q}^{(1)}(j)$ получим суммированием по t :

$$S_{p,q}^{(1)}(j) = \sum_{t=0}^{k-p-q} 2^p 4^{k-(p+q+t)} C_{k-p-q}^t = 2^p 5^{k-p-q}$$

$$(p = 0, 1, \dots, k-1; q = 1, 2, \dots, k-p; j = 1, 2, \dots, C_{k-1}^p C_{k-p-1}^{q-1}).$$

Отметим, что $S_{p,q}^{(1)}(j)$ не зависит от j .

Повторные использования итерационной матрицы дадут представление $S_{p,q}^{(n)}(j)$ через $S_{p,q}^{(n-1)}(j)$ в виде

$$S_{p,q}^{(n)}(j) = \sum_{t=0}^{k-p-1} 2^p \cdot 4^{k-p-t} \left(\sum_{q_1, j_1} S_{p+t, q_1}^{(n-1)}(j_1) \right), \quad (4)$$

где суммирование по q_1 и j_1 распространяется только на те генотипы, которые при расщеплении дают организмы генотипа с характеристиками p, q, j . Таких организмов в классе $p+t$ будет C_{k-p-1}^t . Используя метод полной математической индукции, можем выразить $S_{p,q}^{(n)}(j)$ через $S_{p,q}^{(1)}(j)$ в виде

$$S_{p,q}^{(n)}(j) = 2^{(n-1)(2k-p)} \sum_{t=0}^{k-p-1} \left(\frac{1-2^{-(n-1)}}{2} \right)^t \left(\sum_{q_1, j_1} S_{p+t, q_1}^{(1)}(j_1) \right).$$

Нас интересует вероятность в процентах появления организма нужного нам генотипа в каждом поколении, т. е. величина

$$\frac{S_{0,1}^{(n)}(1)}{\sum_p \sum_q \sum_j S_{p,q}^{(n)}(j)} 100\% = \frac{S_{0,1}^{(n)}(1)}{B_n} \cdot 100\%.$$

Суммирование $S_{p,q}^{(n)}(j)$ по j , q и p (т. е. подсчет знаменателя) дает

$$B_n = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=1}^{k-p} \sum_{j=1}^{C_{k-p-1}^{q-1}} S_{p,q}^{(n)}(j) = 2^{2k(n-1)} \left(\sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=1}^{k-p} \sum_{j=1}^{C_{k-p-1}^{q-1}} S_{p,q}^{(1)}(j) \right).$$

Величины $S_{p,q}^{(1)}(j)$ нам известны. Так как они не зависят от j , то суммирование по j сводится к умножению одной из величин на их количество, т. е. на C_{k-p-1}^{q-1} .

Тогда нетрудно проверить, что значение знаменателя будет:

$$B_n = 2^{2k(n-1)} \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=1}^{k-p} C_{k-p-1}^p C_{k-p-1}^{q-1} 2^{p5^{k-p-q}} = 2^{2k(n-1)} \cdot 8^{k-1}.$$

Числитель имеет вид

$$S_{0,1}^{(n)}(1) = 2^{2k(n-1)} \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{1 - 2^{-(n-1)}}{2} \right)^t \sum_{q_1, j_1}^{C_{k-1}^t} S_{t,q_1}^{(1)}(j_1).$$

Так как нужный нам организм содержит только одну рецессивную гомозиготную пару хромосом, то при суммировании по q_1 нужно брать только $q_1 = 1$. Суммирование по j_1 тогда будет проходить в пределах $1 \leq j_1 \leq C_{k-1}^p$ и снова суммирование по j_1 заменится умножением:

$$S_{0,1}^{(n)}(1) = 2^{2k(n-1)} \sum_{t=0}^{k-1} \left(\frac{1 - 2^{-(n-1)}}{2} \right)^t 2^{t5^{k-t-1}} C_{k-1}^t = 2^{2k(n-1)} (6 - 2^{-(n-1)})^{k-1}.$$

Окончательное выражение для нужной нам вероятности:

$$\frac{S_{0,1}^{(n)}(1)}{B_n} 100\% = \frac{(6 - 2)^{-(n-1)k-1}}{8^{k-1}} 100\% = \left(\frac{3 - 2^{-n}}{4} \right)^{k-1} 100\%$$

($n=1, 2, 3, \dots$).

Предельное значение вычислений вероятности (при $n \rightarrow \infty$)

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} 100\%.$$

Таким образом, отмечается существенное возрастание вероятности появления организма нужного нам генотипа при возвратном скрещивании с отбором по сравнению с простым развитием расщепления гибридов без отбора и с отбором.

Приведенную модель можно распространить на случай замены в исходном организме $AABB...DD$ двух, трех и большего числа пар хромосом.

Поступила 5 февраля 1975 г.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО
УЛУЧШЕНИЯ СТРАТЕГИИ

Систему, эволюция которой может быть описана некоторым случайным процессом, назовем стохастической. Стохастическую систему будем называть управляемой марковской, если она может быть описана набором объектов $\{E, Y, Q, \Pi, R\}$, где E — множество состояний; Y — множество управлений; $Q = Q(E|E \times Y)$ — множество условных вероятностных мер, определяющих переходы на множестве E под воздействием управлений $y \in Y$; Π — множество правил выбора управлений; $R = R(E \times Y \times E)$ — множество последствий выбора управлений, выраженных в виде штрафов, доходов или выигрышей.

Задача состоит в том, чтобы указать правило $\pi^* \in \Pi$ выбора управлений (в дальнейшем будем называть стратегией), имеющее наиболее благоприятные последствия. Ограничимся классом нерандомизированных стационарных марковских стратегий. Обозначим

$$g(x, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} M_x^\pi \sum_{k=0}^n w(x_k, y_k, x_{k+1}) \quad (1)$$

средний ожидаемый выигрыш при стратегии π и начальном состоянии $x \in E$, где $w(x_k, y_k, x_{k+1})$ — непосредственный выигрыш за переход из состояния $x_k \in E$ в $x_{k+1} \in E$ под воздействием управления $y_k \in Y$.

В принципе оптимальная стратегия может быть найдена с помощью алгоритма Ховарда [1] или путем сведения к задаче линейного программирования [2]. Однако в каждом из этих методов возникает необходимость решения систем линейных уравнений, что значительно затрудняет задачу, а при больших размерностях практически исключает возможность ее решения.

В данной работе предлагается алгоритм поиска оптимальной стратегии, связанный с последовательным улучшением исходной стратегии. В этом алгоритме отсутствует необходимость решения систем линейных уравнений, что позволяет решать задачи практически любой размерности.

В дальнейшем будем предполагать, что множества состояний E и управлений Y конечны. Нам потребуются некоторые сведения из теории конечных цепей Маркова [3].

Лемма. Пусть $T = T(\pi)$ — N -мерная регулярная переходная матрица.

Тогда:

а) Матрица T суммируема по Чезаро к матрице T^* , т. е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k = T^*$. Кроме того, степени $T^k \rightarrow T^*$ при $k \rightarrow \infty$.

б) Матрица T^* обладает свойством

$$TT^* = T^*T = T^*T^* = T^* \quad (2)$$

и является матрицей финальных вероятностей состояний, по строкам которой стоит один и тот же вектор $t = \{t_x, x \in E\}$, т. е. $T^* = et$, где e — N -мерный вектор-столбец, все элементы которого равны 1. Вектор t не зависит от начального распределения вероятностей состояний и является единственным решением системы

$$t = tT, \quad t_x \geq 0, \quad x \in E, \quad te = 1.$$

в) Матрица $A = I - (T - T^*)$ не вырождена, т. е. существует

$$\text{матрица } Z = A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T - T^*)^k.$$

г) Обозначим $H = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^*)$. Тогда $H = Z - T^*$ и

$$(I - T)H = H(I - T) = I - T^*. \quad (3)$$

Пусть теперь задан вектор-столбец непосредственных выигрышей $w = w(x, y, z)$ и переходная матрица $T = T(\pi)$. Обозначим x -ю строку матрицы $T(\pi)$ через $T_x(\pi)$ и $w(\pi)$ — вектор выигрышей с компонентами $w(x, \pi(x)) = T_x(\pi)w = \sum_{xz} (\pi(x))w(x, \pi(x), z)$, где α_{xz} — элементы строки $T_x(\pi)$.

Обозначим далее $G(\pi)$ — вектор с компонентами $g(x, \pi)$. Очевидно, что

$$G(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(\pi)w(\pi).$$

Компоненты вектора $G(\pi)$ имеют вид $g(x, \pi) = t(\pi)w(\pi)$, где $t(\pi)$ — вектор финальных вероятностей состояний. Этот вектор не зависит от начального состояния. Поэтому $g(x, \pi) = g(\pi)$ для всех $x \in E$. Тогда вектор $G(\pi)$ может быть записан $G(\pi) = g(\pi)e$, где e — вектор-столбец с компонентами, равными 1.

Теорема 1. Пусть заданы вектор выигрышей $w = w(\pi)$, переходная матрица $T = T(\pi)$ и финальная матрица $T^* = T^*(\pi)$. Тогда средний выигрыш $g = g(\pi)$ удовлетворяет следующему соотношению, записанному в векторном виде

$$ge + r = w + Tr, \quad (4)$$

где

$$ge = T^*w, \quad r = Hw. \quad (5)$$

Доказательство. В силу соотношения (3) имеем

$$(I - T)Hw = (I - T^*)w,$$

откуда

$$T^*w + Hw = w + THw.$$

Используя обозначения (5), получаем требуемое соотношение.

Замечание. Вектор r является относительным, т. е. вектор $r + se$, где s — произвольная постоянная, также удовлетворяет соотношению (4). Это нетрудно проверить подстановкой.

Теорема 2. Пусть даны стратегии f и π , которым соответствуют регулярные матрицы $T(f)$ и $T(\pi)$. Если имеет место векторное неравенство

$$(T(f) - T(\pi))r(\pi) \geq w(\pi) - w(f), \quad (6)$$

то

$$g(f) \geq g(\pi). \quad (7)$$

Доказательство. Используя неравенство (6), получим N -мерный вектор-столбец $\gamma(f)$:

$$\gamma(f) = w(f) + T(f)r(\pi) - w(\pi) - T(\pi)r(\pi) \geq 0. \quad (8)$$

Запишем равенство (4) для стратегий f и π :

$$\begin{aligned} g(f)e + r(f) &= w(f) + T(f)r(f), \\ g(\pi)e + r(\pi) &= w(\pi) + T(\pi)r(\pi). \end{aligned}$$

Вычитая последнее равенство из первого и учитывая неравенства (7) и (8), получаем

$$\begin{aligned} g(f)e - g(\pi)e + r(f) - r(\pi) &= w(f) + T(f)r(f) - w(\pi) - \\ &- T(\pi)r(\pi) = \gamma + T(f)[r(f) - r(\pi)]. \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta g = g(f) - g(\pi)$ и $\Delta r = r(f) - r(\pi)$, тогда последнее равенство запишется в виде

$$\Delta g e + \Delta r = \gamma + T(f)\Delta r.$$

Умножим обе части этого равенства слева на финальный вектор $t(f)$:

$$t(f)\Delta g e + t(f)\Delta r = t(f)\gamma + t(f)T(f)\Delta r,$$

но $t(f)T(f) = t(f)$, поэтому $t(f)\Delta g e + t(f)\Delta r = t(f)\gamma + t(f)\Delta r$.

Отсюда следует равенство $t(f)\Delta g e = t(f)\gamma$.

Поскольку компоненты вектора γ неотрицательны, а компоненты $t(f)$ положительны, то $t(f)\gamma \geq 0$. Отсюда $t(f)\Delta g e = \Delta g \geq 0$, что

и доказывает теорему.

Замечание. Нетрудно видеть, что если в (6) имеется хотя бы одна компонента, для которой выполнено строгое неравенство, то $g(f) > g(\pi)$.

Из доказанной теоремы вытекает, что для отыскания стратегии f , удовлетворяющей условию $g(f) > g(\pi)$, необходимо знать вектор $r(\pi)$,

$$r(\pi) = Hw = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k w - T^* w).$$

Покажем, что вектор $r(\pi)$ может быть представлен в виде

$$r(\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k w - T_2^k w),$$

где $T_z^k w$ — z -я компонента вектора $T^k w$. Действительно, пусть постоянная c такова, что $T^*(w + ce) = 0$. Так как матрицы T^* и T^k для любого $k = 0, 1, \dots$ стохастические, то

$$\begin{aligned} r(\pi) &= \sum_{k=0}^{\infty} (T^k w - T^* w) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k(w + ce) - T^*(w + ce)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T^k(w + ce). \end{aligned}$$

Известно, что для регулярной матрицы T каждая компонента вектора r представима абсолютно сходящимся рядом [3]. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_z^k(w + ce) = a < \infty.$$

Рассмотрим вектор

$$\begin{aligned} r - ae &= \sum_{k=0}^{\infty} (T^k(w + ce) - \sum_{k=0}^{\infty} T_z^k(w + ce)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (T^k w + T^k ce - T_z^k w - T_z^k ce) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k_w - T_z^k w). \end{aligned}$$

Вектор $r - ae$ так же, как и вектор r , удовлетворяет соотношению

$$(4). \text{ Поэтому будем полагать } r = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k w - T_z^k w),$$

что и требовалось доказать.

Обозначим

$$r_n(\pi) = \sum_{k=0}^n (T^k(\pi) w - T_z^k(\pi) w). \quad (9)$$

Отсюда $r(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\pi)$. Тогда x -я компонента неравенства (8) может быть записана так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(x, y) = \gamma(x, y) \geq 0, \quad (10)$$

где

$$\gamma_n(x, y) = (T_x(y) - T_x(\pi)) r_n(\pi) - w(x, \pi) + w(x, y), \quad y = f(x). \quad (11)$$

Теорема 2 служит основой для построения алгоритма синтеза оптимальной стратегии.

Пусть $Y_x \subseteq Y$ — множество допустимых управлений в состоянии $x \in E$. Из неравенства (8) следует, что для отыскания управления $y \in Y_x$, улучшающего стратегию в состоянии $x \in E$, необходимо установить знак величины $\gamma(x, y)$. Будем пользоваться представлением (10) и оценивать знак величины γ по конечному числу членов последовательности $\{\gamma_k\}$. Количество членов последовательности, обеспечивающих достаточно хорошее приближение γ_k к пределу γ , можно оценить по величине разности между соседними членами $\gamma_k - \gamma_{k-1}$. Очевидно, если эта разность остается, начиная с некоторого номера m , достаточно мала по модулю, то члены последовательности γ_k , $k > m$, близки к своему пределу. Хотя последовательность $\{\gamma_k\}$ — сходящаяся, но сходится она, вообще говоря, немонотонно. Поэтому для оценки близости членов последовательности γ_k к своему пределу, с целью уменьшения возможности ошибочных решений из-за немонотонности последовательности $\{\gamma_k\}$, целесообразно вместо разностей $\gamma_k - \gamma_{k-1}$ использовать разности соответствующих средних арифметических $\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k-1}$, где $\bar{\gamma}_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \gamma_i$. Тогда для выбора числа членов последовательности k^* , при которых достигается достаточная близость к пределу, естественно воспользоваться условием

$$k^* = \min \{k: |\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k-1}| \leq \varepsilon\}, \quad (12)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая фиксированная константа.

Теперь для выбора управления, улучшающего стратегию, достаточно воспользоваться знаком члена γ_{k^*} : если $\gamma_{k^*}(y) > 0$, то управление y принимается в качестве улучшающего стратегию, если $\gamma_{k^*}(y) \leq 0$, то данное управление y отвергается.

Описанное правило выбора управления, улучшающего стратегию, выполняется для заданной фиксированной стратегии π и соответствующего ей вектора $r(\pi)$.

Заметим, что одновременно с оценкой вектора γ производится вычисление вектора $r_k(\pi)$ и тем самым оценка вектора $r(\pi)$.

Чтобы избежать новых вычислений векторов $r_k(\pi)$, $k=1, \dots, k^*$ при проверке очередного управления в состоянии $x \in E$, очевидно, целесообразно воспользоваться вычисленным значением $r_{k^*}(\pi)$ и выбрать согласно описанному правилу все управления, удовлетворяющие неравенству (6), т. е. улучшающие стратегию.

Пусть

$$\gamma_{k^*}^*(x) = \max_{y \in Y_x} \gamma_{k^*}(x, y). \quad (13)$$

Тогда одна итерация в описываемой процедуре состоит из выполнения следующих операций: для заданной стратегии π и заданного $\varepsilon > 0$ для всех $x \in E$ вычисляется $\gamma_{k^*}^*(x)$; в качестве управлений,

улучшающих стратегию, выбираем те управления, для которых $\gamma_{k^*}^*(x) > 0$; из выбранных управлений в каждом $x \in E$, составляется новая стратегия π' , которая и является улучшенной. Этим завершается одна итерация, и процедура повторяется.

Для предотвращения заикливания в условии (12) целесообразно на каждой итерации уменьшать величину ε , положив ее, например, равной $\varepsilon(h) = \varepsilon^h$, где h — номер итерации.

Нетрудно видеть, что описанный алгоритм за конечное число итераций сходится к оптимальной стратегии. Это следует из того, что множество стратегий конечно и на каждой итерации погрешность выбора улучшенной стратегии уменьшается.

Поиск оптимальной стратегии прекращается как только на двух последовательных итерациях будет получена одна и та же стратегия.

Таким образом, алгоритм последовательного улучшения стратегии состоит в следующем.

1. Выбрать некоторую стратегию π в качестве начального приближения.

2. Для каждого $x \in E$ вычислить величины $\gamma_k(x, y)$, $y \in Y_x$, $k = 0, 1, \dots, k^*$, где $k^* = \min \{k: |\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_{k-1}| \leq \varepsilon^h\}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\bar{\gamma}_k =$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \gamma_i, \quad h - \text{номер итерации.}$$

3. Для каждого $x \in E$ вычислить $\gamma_{k^*}^*(x) = \max_{y \in Y_x} \gamma_{k^*}(x, y)$.

4. Составить стратегию из управлений $y: \gamma_{k^*}^*(x) > 0$.

5. Если стратегия $f(h) = f(h-1)$, то останов, если $f(h) \neq f(h-1)$, то переход к п. 1.

Пример. Пусть имеется система, которая может находиться в одном из трех состояний. Множества Y_x , $x=1, 2, 3$ содержат следующие управления: $Y_1 = \{y_{11}\}$, $Y_2 = \{y_{21}, y_{22}, y_{23}\}$, $Y_3 = \{y_{31}\}$.

Применение управления $y \in Y_x$ в состоянии x приводит к переходу системы в состояние j с вероятностью $\alpha_{xj}(y)$. При этом получаем доход $w(x, y)$. Пусть заданы следующие векторы переходных вероятностей и доходы:

$$\alpha_{1j}(y_{11}) = \{0,2 \ 0,5 \ 0,3\}, \quad w(1, y_{11}) = 0,$$

$$\alpha_{2j}(y_{21}) = \{0,4 \ 0,2 \ 0,4\}, \quad w(2, y_{21}) = 1,$$

$$\alpha_{2j}(y_{22}) = \{0,2 \ 0,3 \ 0,5\}, \quad w(2, y_{22}) = 0,8,$$

$$\alpha_{2j}(y_{23}) = \{0,5 \ 0,2 \ 0,3\}, \quad w(2, y_{23}) = 1,3,$$

$$\alpha_{3j}(y_{31}) = \{0,4 \ 0,4 \ 0,2\}, \quad w(3, y_{31}) = 2.$$

1. Зададим начальную стратегию π , выбрав y_{11}, y_{21}, y_{31} . Тогда

$$T(\pi) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad w(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Положим $z=1, \varepsilon=0,1$. Вычислим векторы $r_0(\pi)$ и $r_1(\pi)$. Затем по формуле (11) для каждого из управлений $y \in Y_2$ (исключая y_{21} , так как оно входит в π), вычисляя γ_0 и γ_1 , получим $\gamma_0(2, y_{22}) = 0,1; \gamma_1(2, y_{22}) = 0,06; \gamma_0(2, y_{23}) = 0,1; \gamma_1(2, y_{23}) = 0,13$. Проверим условие (12) для y_{22} :

$$\left| \frac{1}{2} 0,16 - 0,1 \right| = 0,02 < \varepsilon = 0,1,$$

и для y_{23}

$$\left| \frac{1}{2} 0,23 - 0,1 \right| = 0,015 < \varepsilon.$$

Отсюда $k^*=1$.

3. $\gamma_1^*(2) = 0,13 > 0$.

4. Составим стратегию f из управлений y_{11}, y_{23}, y_{31} .

5. Переходим ко второй итерации, положив в качестве начальной стратегию f .

2. Аналогично предыдущему получаем $\gamma_0(2, y_{21}) = -0,1; \gamma_1(2, y_{21}) = -0,143$. Условие (12) при $k=1$ не выполняется. Вычисляем $\gamma_2(2, y_{21}) = -0,1258$. Условие (12) при $k=2$

$$\left| -\frac{1}{3} 0,3688 + \frac{1}{2} 0,243 \right| = 0,0014 < \varepsilon^2 = 0,01$$

выполнено. Находим далее $\gamma_0(2, y_{22}) = 0,03; \gamma_1(2, y_{22}) = -0,075; \gamma_2(2, y_{22}) = -0,0489$. Условие (12) для $k=2$

$$\left| -\frac{1}{3} 0,0939 + \frac{1}{2} 0,045 \right| = 0,0088 < \varepsilon^2$$

выполнено, $k^*=2$.

3. $\gamma_2^*(2) = -0,0489 < 0$.

4. Так как $\gamma_2^* < 0$, стратегия на второй итерации не улучшена.

5. Стратегия $f(2)$ совпадает с $f(1)$ и оптимальна.

Описанный алгоритм имеет важное практическое значение, поскольку позволяет эффективно решать многие задачи исследования операций, например профилактики сложных систем, управления запасами и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. М., «Сов. радио», 1964. 189 с.

2. Manne A. S. Linear programming and sequential decisions. — «Management Science», 1960, vol. 6, p. 259—267.
3. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М., «Наука», 1970, 271 с.

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 681.3 : 519.21

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук

ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

В работах [1—3] введены и рассмотрены обобщенные управляемые процессы, в которых решения принимаются в случайные моменты времени σ_k , $k=0, 1, 2, \dots$, $\sigma_k = \sigma_{k-1} + \zeta$, $\zeta = \min(\xi, \tau)$, где ξ — случайная величина, соответствующая длительности времени до обрыва наблюдаемого процесса; τ — неслучайный параметр, имеющий смысл периода наблюдения.

Положим, что решения принимаются через равные промежутки времени $\tau = 2^{-n}$ в моменты $\sigma_k + k2^{-n}$, где k и n — целые неотрицательные числа.

Пусть $I=[0, \infty)$, Ω — множество элементарных событий, порожденных траекториями управляемого процесса, E — фазовое пространство процесса; Y — множество управлений; $\mathcal{E}$ и $U\sigma$ — алгебры борелевских подмножеств E и Y соответственно.

Будем считать, что стратегия есть измеримая функция на $I \times \Omega \times E$ со значениями в Y такая, что управления, выбираемые ею, определены на I , постоянны на интервалах $k2^{-n} < t < (k+1)2^{-n}$ и принимают значения вида

$$y(t, \pi) = \begin{cases} y = \pi(x_k(\omega)), & \text{если } t = k2^{-n}, \\ y_0, & \text{если } k2^{-n} < t < (k+1)2^{-n}, \end{cases}$$

где π — стратегия; $x_k(\omega) = x_k^{\pi}(\omega)$ — траектория управляемого процесса.

Наша задача состоит в исследовании свойств и построении алгоритма синтеза оптимальной стратегии в случае, если $\tau \rightarrow 0$, т. е. для управляемых процессов с непрерывным управлением.

Опуская конструктивное описание процесса и построение меры на множестве его траекторий, перейдем непосредственно к исследованию свойств стратегии в процессах с непрерывным управлением.

Предположим, что задано отображение F — многозначная функция, сопоставляющая каждому $x \in E$ некоторое непустое замкнутое множество $Y_x \subseteq Y$ таким образом, что множество $A = \{(x, y) : x \in E, y \in Y_x\}$ измеримо в произведении пространств $E \times Y$.

Определение 1 [4]. Отображение F , сопоставляющее каждому $x \in E$ некоторое непустое замкнутое множество $F(x) \subseteq Y$, называется открыто-, замкнуто-, борелевски-измеримым, если $\{x :$

$F(x) \cap B \neq \emptyset\} \in E$, где B — соответственно произвольное открытие, замкнутое или борелевское множество в Y .

Определение 2. [4]. Функция $f: E \rightarrow Y$ называется селектором отображения F , если $f(x) \in F(x)$, $x \in E$.

Теорема выбора [4]. Измеримое в смысле определения 1 отображение имеет измеримый по Борелю селектор.

Таким образом, для того чтобы класс нерандомизированных марковских стратегий Π_D был непуст, достаточно потребовать измеримость отображения $F: x \rightarrow Y_x$, $x \in E$ в смысле определения 1.

В дальнейшем будем предполагать отображение $F: x \rightarrow Y_x$, $x \in E$, измеримым. В частности, если $Y_x \equiv Y$, отображение F , очевидно, измеримо и класс Π_D совпадает с множеством всех борелевских функций, отображающих E в Y .

Лемма 1. Пусть $\pi \in \Pi_D$ множество Y конечно, а E счетно либо компакт. Тогда на множестве E стратегия π задает разбиение $\{E_y, y \in Y\}$, такое, что $\pi(x) = y$ для всех $x \in E_y$.

Доказательство. Пусть $\pi = \{f_t\}$. Поскольку $\pi \in \Pi_D$, то f является селектором, т. е. измеримым отображением E в Y . Так как Y конечно, а E счетно либо компакт, то в E найдутся x и x' ($x \neq x'$) такие, что $f(x) = f(x') = y$.

Рассмотрим полный прообраз E_y элемента $y \in Y$ при отображении f . Очевидно, что $E_y = \bigcup \{x: f(x) = y\}$ и этот прообраз измерим. Кроме того, полные прообразы различных элементов y и y' ($y \neq y'$) не пересекаются.

Действительно, предположим противное, т. е. что $E_y \cap E_{y'} \neq \emptyset$. Тогда каждый элемент $x \in E_y \cap E_{y'}$ может иметь различные образы y и y' , что невозможно, поскольку $f(x)$ — селектор. Таким образом, получаем $\bigcup_{y \in Y} E_y = E$, $E_y \cap E_{y'} = \emptyset$, что и доказывает лемму.

Будем теперь предполагать, что наблюдаемый процесс стохастически непрерывен.

Определение 3. Нерандомизированную марковскую стратегию $\pi(t)$, $0 \leq t < \infty$ будем называть кусочно-постоянной, если для любого $T \in [0, \infty)$ интервал $[0, T]$ может быть разбит на конечное число полуинтервалов $[0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, ..., $[t_{n-1}, T)$ таких, что $\pi(t)$ постоянна на них. Точки t_k , $k=0, 1, \dots, n-1$ будем называть точками переключения управлений.

Стратегию $\pi(t)$ будем полагать непрерывной справа.

Теорема 1. Пусть $\pi \in \Pi_D$, множество Y конечно, а E счетно либо компакт. Тогда стратегия $\pi = \pi(t)$ является кусочно-постоянной.

Доказательство. В условиях теоремы в силу леммы 1 на множестве E существует разбиение $\{E_y, y \in Y\}$ такое, что $\pi(x) = y$ для всех $x \in E_y$.

Рассмотрим окрестность $\Gamma_x \subseteq E_y$ некоторой точки $x \in E_y$. Обозначим $\Delta t = \inf \{t' - t: x_t' \in \bar{\Gamma}_x / x_t = x \in \Gamma_x\}$ первый момент выхода из окрестности Γ_x . Поскольку наблюдаемый процесс стохастически непрерывен, то переходная функция удовлетворяет условию

$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, \Gamma_x) = 1$. Отсюда следует, что $\Delta t > 0$ для любого $\Gamma_x \subseteq E_y$.

Тогда в течение времени $\Delta t > 0$ управление остается постоянным и равным y . Это справедливо для любых отрезков времени $\Delta t > 0$ пребывания наблюдаемого процесса в множестве E_y . Поскольку при этом стратегия π нерандомизирована, то это означает, что она кусочно-постоянна. Теорема доказана.

Нерандомизированную марковскую кусочно-постоянную стратегию будем представлять теперь как последовательность элементов $\{f_1, t_1, f_2, t_2, \dots\}$, где $f_k: E \rightarrow Y$, $0 < t_1 < t_2 < \dots \leq \infty$ и $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Эта последовательность конечна, если $t_k = \infty$ для некоторого конечного k .

Очевидно, что $\pi(t) = f_k$, где t и k удовлетворяют условию $t_{k-1} \leq t < t_k$.

Стратегию, определенную как последовательность $\{f, t_1, f, t_2, \dots\}$, будем называть стационарной и обозначать f .

Как и в работе [2], введем оператор T , который определим следующим образом:

$$T_t f(x) = \int_E f(y) P(t, x, dy). \quad (1)$$

Семейство операторов $\{T_t\}$, $t \in [0, \infty)$ образует полугруппу. Инфинитезимальный оператор Λ полугруппы $\{T_t\}$ определяется формулой

$$\Lambda f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}. \quad (2)$$

Известно, что инфинитезимальный оператор Λ однозначно определяет переходную функцию $P(x, t, \Gamma)$ [5]. Если множество состояний счетно либо конечно и процесс регулярен, то переходная функция удовлетворяет системе обратных уравнений Колмогорова [6]:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \Lambda P(t),$$

где переходная функция $P(t)$ и оператор Λ записаны в матричном виде.

Наша задача состоит в доказательстве существования и построении алгоритма выбора стратегии π^* , которая максимизирует средний выигрыш

$$\Phi(\pi) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} M_x^\pi \int_0^t w(x(s), y(s)) ds, \quad (3)$$

где w — интенсивность начисления выигрыша; $x(s)$ — траектория процесса, непрерывным образом управляемого стратегией π ; $y(s) = \pi(y(s))$ — траектория управлений, выбираемых стратегией π .

Предполагая, что $\sup_t |w(x(t), y(t))| \leq c < \infty$, получаем, что предел в (3) существует, поэтому знак $\inf$ можно опустить.

Допуская, что процесс x_t^π измерим, и используя теорему Фубини, критерий (3) можно переписать в виде

$$\Phi(\pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M_x^\pi w(x(s), y(s)) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T_s(\pi) w(\pi) ds.$$

Для доказательства существования оптимальной стратегии рассмотрим обобщенный процесс [1, 2], в котором зафиксируем некоторый период наблюдения $\tau = 2^{-n}$ где $n > 0$ — натуральное число. В качестве критерия оптимальности используем средний выигрыш

$$\varphi(\pi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} M_x^\pi \sum_{k=0}^m w(x_k, y_k, x_{k+1}), \quad (4)$$

где $w(x_k, y_k, x_{k+1})$ ($|w| \leq c < \infty$) — непосредственный выигрыш.

Заметим, что непосредственный выигрыш w зависит от τ , т. е. $w = w(\tau)$, поэтому и средний выигрыш φ также зависит от τ . Эту зависимость от периода $\tau = 2^{-n}$ обозначим $\varphi^{(n)}(\pi)$.

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Лемма 2. Предел $\varphi^{(n)}(\pi)$ при $(n) \rightarrow \infty$ существует и равен $\Phi(\pi)$, где $\Phi(\pi)$ определено в (3).

Если $\varphi(\pi') \geq \varphi(\pi'')$, то будем говорить, что стратегия π' «не хуже», чем π'' и писать $\pi' \geq \pi''$.

Будем говорить, что стратегия π^* оптимальна, если $\varphi(\pi^*) \geq \varphi(\pi)$ для всех π .

Используя лемму 2, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Для управляемых процессов с непрерывным управлением существует оптимальная нерандомизированная стационарная марковская стратегия.

Доказательство. Как показано в [3], для обобщенных процессов существует оптимальная стационарная марковская стратегия. Очевидно, что при фиксированном $\tau = 2^{-n}$ оптимальная стратегия зависит от выбранного $\tau = 2^{-n}$. Эту зависимость обозначим $\pi_{(n)}^*$.

В силу леммы 2 существует предел $\Phi(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\pi)$ при любой фиксированной стратегии π , а значит и при стратегии $\pi = \pi_{(n)}^*$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\pi_{(n)}^*) = \Phi(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{(n)}^*) = \Phi(\pi^*) = \Phi^*$. Отсюда следует существование стратегии $\pi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{(n)}^*$ такой, что $\Phi(\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{(n)}^*) = \Phi^*$.

Покажем, что она является оптимальной. Действительно, поскольку в силу определения оптимальной стратегии $\pi_{(n)}^*$ для любых $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство $\varphi^{(n)}(\pi_{(n)}^*) \geq \varphi^{(n)}(\pi_{(n)})$ для всех $\pi_{(n)}$, то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\Phi^* = \Phi(\pi^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\pi_{(n)}^*) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\pi_{(n)}) = \Phi(\pi)$$

для всех π , что и доказывает теорему.

Введем теперь ожидаемый выигрыш $v(x, \pi)$ на бесконечном промежутке времени при условии, что процесс начался из состояния x и используется стратегия π :

$$v(x, \pi) = \int_0^{\infty} T_t(\pi) w(\pi, x) dt. \quad (5)$$

Определим, наконец, оператор $F(t) = F(t, \pi)$:

$$F(t, \pi) v(x) = \int_0^t T_s(\pi) w(\pi, x) ds + T_t v(x). \quad (6)$$

Очевидно, что

$$v(x, \pi; f, t) = F(t, f) v(x, \pi). \quad (7)$$

Пусть множество состояний E счетно либо конечно. Тогда переходную функцию $P(x, t, \Gamma)$, определяющую полугруппу $\{T_t\}$, можно представить в виде матрицы $P(t)$.

Средний выигрыш $\Phi(\pi)$ в векторном виде теперь запишется

$$\Phi(\pi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(t, \pi) w(\pi) dt, \quad (8)$$

где $w(\pi)$ — вектор интенсивностей начисления выигрышей при стратегии π .

Потребуется некоторое вспомогательное утверждение, которое мы приводим в следующей лемме без доказательства.

Лемма 3. Пусть множество состояний E возвратно и f стационарная стратегия. Тогда:

1) существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, f) = P^*(f)$ такой, что строки матрицы $P^*(f)$ одинаковы и

$$P(t, f) P^*(f) = P^*(f) P(t, f) = P^*(f),$$

$$(P(t, f) - P^*(f))^n = P(t, f)^n - P^*(f)^n = P(nt, f) - P^*(f);$$

$$2) \quad \Lambda(f) P^*(f) = P^*(f) \Lambda(f) = 0;$$

$$3) \quad \int_0^{\infty} \|P(t, f) - P^*(f)\| dt \leq \infty,$$

$$\|P\| = \sum_{i,l} |p_{il}|.$$

Лемма 4.

$$\bar{\Phi}(\pi) = P^*(\pi) w(\pi).$$

Доказательство. Используя свойства переходной функции, имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(\pi) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(s, \pi) w(\pi) ds = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)t} \sum_{k=0}^n \int_0^t P(kt, \pi) P(s, \pi) w(\pi) ds = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)t} \sum_{k=0}^n P(kt, \pi) \int_0^t P(s, \pi) w(\pi) ds = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n [P(t, \pi)]^k \frac{1}{t} \int_0^t P(s, \pi) w(\pi) ds = \\
 &= P^*(\pi) \frac{1}{t} \int_0^t P(s, \pi) w(\pi) ds = \frac{1}{t} \int_0^t P^*(\pi) P(s, \pi) w(\pi) ds = \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t P^*(\pi) w(\pi) ds = P^*(\pi) w(\pi).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что компоненты вектора $\bar{\Phi}(\pi)$ все одинаковы. Поэтому будем обозначать $\bar{\Phi}(\pi) = \Phi(\pi)e$, где e — вектор, все компоненты которого равны 1.

Теорема 3. Средний выигрыш $\Phi(\pi)$ для процессов с непрерывным управлением удовлетворяет соотношению

$$\Phi(\pi)e = w(\pi) + \Lambda(\pi)r(\pi), \quad (8)$$

где $r(\pi)$ — некоторый относительный вектор.

Доказательство. Рассмотрим вектор выигрышей $v(T, \pi)$ за время T ,

$$\begin{aligned}
 v(T, \pi) &= \int_0^T P(t, \pi) w(\pi) dt = \int_0^T [P^*(\pi) + P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt = \\
 &= \int_0^T P^*(\pi) w(\pi) dt + \int_0^T [P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt = \\
 &= P^*(\pi) w(\pi) T + \int_0^\infty [P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt -
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$-\int_T^\infty [P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt = \\ = \Phi(\pi) eT + r(\pi) + \varepsilon(T, \pi),$$

где

$$\Phi(\pi) e = P^*(\pi) r(\pi), \quad r(\pi) = \int_0^\infty [P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt, \quad \varepsilon(T, \pi) = \\ = -\int_T^\infty [P(t, \pi) - P^*(\pi)] w(\pi) dt.$$

Очевидно, что $\varepsilon(T, \pi) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Рассматривая выигрыш за время $T + \Delta T$ и используя оператор F , имеем

$$v(T + \Delta T, \pi) = F(\Delta T, \pi) v(T, \pi) = \\ = \int_0^{\Delta T} P(t, \pi) w(\pi) dt + P(\Delta T, \pi) v(T, \pi). \quad (10)$$

Подставляя равенство (9) в (10), получаем

$$(T + \Delta T) \Phi(\pi) e + r(\pi) + \varepsilon(T + \Delta T, \pi) = \\ = \int_0^{\Delta T} P(t, \pi) w(\pi) dt + P(\Delta T, \pi) \{T \Phi(\pi) e + r(\pi) + \varepsilon(T, \pi)\} = \\ = \int_0^{\Delta T} P(t, \pi) w(\pi) dt + T \Phi(\pi) e + P(\Delta T, \pi) r(\pi) + \varepsilon(T, \pi).$$

Отсюда следует равенство

$$\Delta T \Phi(\pi) e + r(\pi) + \varepsilon(T + \Delta T, \pi) = \\ = \int_0^{\Delta T} P(t, \pi) w(\pi) dt + P(\Delta T, \pi) w(\pi) + \varepsilon(T, \pi).$$

Устремляя $T \rightarrow \infty$, имеем

$$\Delta T \Phi(\pi) e + r(\pi) = \int_0^{\Delta T} P(t, \pi) w(\pi) dt + P(\Delta T, \pi) w(\pi).$$

Поделив обе части равенства на ΔT и перейдя к пределу при $\Delta T \rightarrow 0$, получим $\Phi(\pi) e = w(\pi) + \Lambda(\pi) r(\pi)$.

Покажем теперь, что вектор $r(\pi)$ является относительным, т. е. вектор $r(\pi) + ce$, где c константа, также удовлетворяет доказанному равенству. Действительно,

$$\Phi(\pi)e = w(\pi) + \Lambda(\pi)(r(\pi) + ce) = w(\pi) + \Lambda(\pi)r(\pi) + \Lambda(\pi)ce = \\ = w(\pi) + \Lambda(\pi)r(\pi),$$

поскольку в силу утверждения 2) леммы 3 $\Lambda(\pi)ce = 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть имеются некоторые две стратегии f и π . Достаточным условием того, чтобы $f \geq \pi$ (т. е. $\Phi(f) \geq \Phi(\pi)$) является выполнение неравенства

$$(\Lambda(f) - \Lambda(\pi))r(\pi) \geq w(\pi) - w(f). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (11). Запишем равенства

$$\Phi(f)e = w(f) + \Lambda(f)r(f), \quad \Phi(\pi)e = w(\pi) + \Lambda(\pi)r(\pi).$$

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$\Phi(f)e - \Phi(\pi)e = w(f) + \Lambda(f)r(f) - w(\pi) - \Lambda(\pi)r(\pi) = w(f) + \\ + \Lambda(f)r(f) + \Lambda(f)r(\pi) - \Lambda(f)r(\pi) - w(\pi) - \Lambda(\pi)r(\pi) = [w(f) + \\ + \Lambda(f)r(\pi) - w(\pi) - \Lambda(\pi)r(\pi)] + \Lambda(f)(r(f) - r(\pi)).$$

Вектор в квадратных скобках обозначим $\gamma(f, \pi)$ и положим $\Phi(f)e - \Phi(\pi)e = \Delta\Phi e$, $r(f) - r(\pi) = \Delta r$. Тогда $\gamma(f, \pi) + \Lambda(f)\Delta r = \Delta\Phi e$.

Умножая обе части этого равенства слева на $P^*(f)$, получаем $P^*(f)\gamma(f, \pi) + P^*(f)\Lambda(f)\Delta r = P^*(f)\Delta\Phi e$.

Так как $P^*(f)\Lambda = 0$, $P^*(f)\Delta\Phi e = \Delta\Phi e$, то

$$P^*(f)\gamma(f, \pi) = \Delta\Phi e. \quad (12)$$

Но по условию $\gamma(f, \pi) \geq 0$. Тогда, поскольку строки матрицы неотрицательны, $\Delta\Phi e \geq 0$, $\gamma(f, \pi) \geq 0$, что и доказывает необходимость.

Теорема доказана.

Теорема 4 является основой для построения алгоритмов синтеза оптимальной стратегии. В частности, решая систему (8) и выбирая управления, удовлетворяющие неравенству (11), получаем алгоритм Ховарда улучшения стратегий. Однако, как указывалось в [7], алгоритм Ховарда имеет существенный недостаток, состоящий в том, что на каждой итерации улучшения стратегии возникает необходимость решения систем линейных уравнений. Это затрудняет вычислительную процедуру, а при больших размерностях делает ее практически невозможной. Поэтому наша задача состоит в построении алгоритма, лишённого этого недостатка.

Нетрудно видеть, что с вычислительной точки зрения алгоритмы синтеза оптимальной стратегии для управляемых процессов с диск-

ретным и непрерывным временем должны отличаться незначительно. Действительно, система (8) в дискретном случае имеет вид [7],

$$\Phi(\pi)e + r(\pi) = w(\pi) + T(\pi)r(\pi), \quad (13)$$

где $T(\pi)$ — переходная матрица.

Эту систему можно переписать в виде $\Phi(\pi)e = w(\pi) + (T(\pi) - I)r(\pi)$. Если теперь обозначить $(T(\pi) - I) = \Lambda(\pi)$, то полученная система совпадает с (8). Обратно, если задана система (8), то пронормировав матрицу $\Lambda(\pi)$ так, чтобы сумма модулей компонент каждой строки равнялась 1, и получив матрицу $\Lambda^n(\pi)$, можем использовать в качестве переходной матрицу «псевдовероятностей» $\hat{T}(\pi) = -\Lambda^n(\pi) + I$. Тогда получим систему (13).

Для улучшения стратегии в процессах с непрерывным управлением достаточно пользоваться алгоритмом синтеза оптимальной стратегии для процессов с дискретным временем, например, как в [7].

Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Процессы с непрерывным и дискретным управлением эквивалентны с точки зрения вычислительной процедуры синтеза оптимальной стратегии.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов В. В. Обобщенные управляемые процессы. — Тезисы докл. III Всесоюз. совещ. по статистическим методам в процессах управления. Вильнюс, 1973, с. 141—143.
2. Баранов В. В. О свойствах выигрыша в обобщенных управляемых процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1975, № 119. Математика и механика, вып. 40, с. 105—123.
3. Баранов В. В. К проблеме синтеза оптимальной стратегии в управляемых процессах. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1975, № 119. Математика и механика, вып. 40, 1975, с. 75—88.
4. Куратовский К. Топология. Т. 2. М., «Мир», 1969. 624 с.
5. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., «Физматгиз», 1963. 859 с.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 2, М., «Наука», 1973. 640 с.
7. Баранов В. В., Подцыкин Н. С. Об одном алгоритме последовательного улучшения стратегии. (См. статью в настоящем сборнике).

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 517.91

В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук,
А. П. МАРИНИЧ

ИДЕАЛЬНО НАБЛЮДАЕМЫЕ СИСТЕМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ВЫХОДОМ

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где A — постоянная $(n \times n)$ -матрица; B — постоянная $(n \times r)$ -матрица; управление $u = u(t)$ является суммируемой функцией на отрезке $[0, T]$.

Предположим, что вектор

$$y = Hx, \quad (2)$$

называемый выходом системы (1), наблюдаем на отрезке $[0, T]$. Здесь H — ненулевая постоянная $(m \times n)$ -матрица.

Определение 1. Система (1), (2) называется *идеально наблюдаемой*, если можно однозначно восстановить для любого $t \in [0, T]$ вектор $x(t)$ по функции $y(\cdot)$ ¹ при заданных матрицах A , B , H .

Заметим, что в задачах идеальной наблюдаемости управление $u = u(t)$ считается неизвестной функцией, в отличие от наблюдаемости по Калману [1].

Пусть в системе (1), (2) матрицы A и B фиксированы, а матрицу H можно выбирать. Требуется указать минимальное число вектор-строк матрицы H , при которых система (1), (2) является идеально наблюдаемой.

Определение 2. Система (1), (2) называется *идеально наблюдаемой с минимальным выходом*, если:

1) существуют такие векторы $h_i \in E_n$ ($i = 1, \dots, k_1$), что система (1), (2) с матрицей $H = (h_1, \dots, h_{k_1})^*$ является *идеально наблюдаемой*;

2) для любых векторов $g_i \in E_n$ ($i = 1, \dots, k_1 - 1$) система (1), (2) с матрицей $H = (g_1, \dots, g_{k_1-1})^*$ не является *идеально наблюдаемой*.

Идеально наблюдаемые системы рассматривались в [2—4]. В работе [4] приводится каноническая форма идеально наблюдаемых систем с одним выходом. В [5] рассматриваются наблюдаемые по Калману системы с минимальным выходом.

В данной работе указывается минимальное количество вектор-строк матрицы H , при которых система (1), (2) является идеально наблюдаемой, а также приводится каноническая форма идеально наблюдаемых систем с минимальным выходом.

Не ограничивая общности, всюду в дальнейшем будем считать, что $\text{rank } B = r$, где $0 < r \leq n$.

Пусть ранг матрицы управляемости $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ системы (1) равен $p \leq n$. Обозначим через L подпространство, порожденное столбцами матрицы управляемости, а через $L^\perp$ — подпространство, ортогональное L .

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы A^* , отвечающих одному и тому же собственному значению λ_i и ортогональных всем столбцам матрицы B , равно s_i , $i = 1, \dots, k$.

¹ Точка в скобках здесь и далее означает, что функция рассматривается не в точке, а на всем отрезке наблюдения $[0, T]$.

Тогда минимальное число вектор-строк матрицы H , при которых система (1), (2) является идеально наблюдаемой, равно $s+r$, где $s = \max_{1 \leq i \leq k} s_i$.

Доказательство. Пусть P_1 и P_2 — матрицы, строки которых состоят из базисных векторов подпространств $L^\perp$ и L соответственно.

Заметим, что так как подпространство L инвариантно относительно оператора A , то

$$P_1 A = Q P_1, \quad (3)$$

где Q — матрица размера $(n-p) \times (n-p)$.

Сделаем следующую замену переменных:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} x = Fx. \quad (4)$$

Тогда, используя (3), после замены переменных (4) система (1), (2) переходит в систему вида

$$\dot{z}_1 = Q z_1,$$

$$\dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u, \quad (5)$$

$$y = H_1 z_1 + H_2 z_2. \quad (6)$$

Заметим, что если система (1), (2) является идеально наблюдаемой, то система (5), (6), линейно эквивалентная (1), (2), также является идеально наблюдаемой. Имеет место и обратное.

Таким образом, идеально наблюдаемые системы инвариантны по отношению к линейной эквивалентности.

Рассмотрим произвольный собственный вектор y матрицы A^* , ортогональный всем столбцам матрицы B ; т. е. $A^* y = \lambda y$ и $y^* B = 0$. Легко показать, что $y \in L^\perp$. Следовательно, в новом базисе вектор y имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор y_0 является собственным вектором матрицы Q^* .

Имеет место и обратное утверждение: если вектор y_0 является собственным вектором матрицы Q^* , то

$$y = F^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы A^* , ортогональным всем столбцам матрицы B .

Очевидно, размерность собственного подпространства матрицы Q^* , т. е. подпространства, состоящего из собственных векторов матрицы Q^* , отвечающих данному собственному значению, совпадает с размерностью собственного подпространства матрицы A^* , ортогонального всем столбцам матрицы B , отвечающего тому же собственному значению.

Поэтому, в силу условия теоремы 1, максимальная размерность собственного подпространства матрицы Q^* равна s .

Отметим, что число нетривиальных инвариантных многочленов матрицы Q^* равно максимальной размерности собственного подпространства матрицы Q^* . Поэтому (см. [5, с. 138]) существуют такие векторы $l_1, \dots, l_s$, что система

$$z_1 = Qz_1, \quad y = H_1 z_1, \quad H_1 = (l_1, \dots, l_s)^*$$

является наблюдаемой по Колману.

Таким образом, система (5) является идеально наблюдаемой в подпространстве $L^\perp$, если выход имеет вид $y = H_1 z_1$, $H_1 = (l_1, \dots, l_s)^*$, т. е. можно восстановить для любого $t \in [0, T]$ вектор $z_1(t)$ по функции $y(\cdot) = H_1 z_1(\cdot)$.

Покажем теперь, что существуют такие векторы $h_i \in E_n$ ($i = 1, \dots, s+r$), для которых система (1), (2) с матрицей $H = (h_1, \dots, h_{s+r})^*$ является идеально наблюдаемой. Для этого рассмотрим цепочку линейно-независимых векторов

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{m_1-1}b_1, \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{m_r-1}b_r,$$

где b_i — i -й столбец матрицы B , $\sum_{i=1}^r m_i = p$, образованную следующим образом. Начиная с вектора Ab_1 , будем проверять, является ли он линейно зависим от векторов $b_1, \dots, b_r$. Если вектор Ab_1 линейно независим от векторов $b_1, \dots, b_r$, то вектор Ab_1 присоединяем к векторам $b_1, \dots, b_r$. В противном случае вектор Ab_1 и все последующие векторы $A^j b_1$, $j > 1$, не рассматриваем.

Пусть для определенности вектор Ab_1 является линейно независимым от векторов $b_1, \dots, b_r$. Далее рассматривается вектор Ab_2 . Аналогично проверяется, является ли он линейно зависимым от предыдущих векторов $b_1, \dots, b_r, Ab_1$. Как и ранее, если вектор Ab_2 линейно независим от векторов $b_1, \dots, b_r, Ab_1$, то вектор Ab_2 присоединяем к предыдущим векторам. В противном случае вектор Ab_2 и все последующие векторы $A^j b_2$ не рассматриваем и т. д.

Следовательно, меняя, если это необходимо, нумерацию столбцов матрицы B , получим цепочку векторов

$$b_1, Ab_1, \dots, A^{m_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{m_2-1}b_2, \\ \dots, b_r, Ab_r, \dots, A^{m_r-1}b_r \quad (7)$$

($m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$, $\sum_{i=1}^r m_i = p$), линейная оболочка которых дает L .

Выберем вектор c_k ($k = 1, \dots, r$) так, чтобы $c_k A^{m_k-1} b_k = 1$ и он был ортогонален всем остальным векторам цепочки (7).

Пусть $d_1, \dots, d_{n-p}$ — векторы-строки матрицы P_1 . Сделаем следующую замену переменных:

$$\omega = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_{n-p} \\ c_1 \\ c_1 A \\ \dots \dots \dots c_1 A^{m_1-1} \\ \dots \dots \dots c_r \\ c_r A \\ \dots \dots \dots c_r A^{m_r-1} \end{pmatrix} x = F_1 x. \quad (8)$$

Покажем, что матрица F_1 неособенная. Для этого рассмотрим выражение

$$\sum_{j=1}^{n-p} \beta_j d_j + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{m_i-1} \beta_{ij} c_i A^l = 0.$$

Умножая обе части этого выражения поочередно на векторы цепочки (7), получаем, что все коэффициенты β_{ij} равны нулю, а тогда, в силу линейной независимости векторов d_j равны нулю также коэффициенты β_j , $j=1, 2, \dots, n-p$. Таким образом, строки матрицы F_1 линейно независимы.

После этой замены переменных первые $n-p$ уравнений системы (1) имеют вид

$$\dot{\omega}_0 = d_i x = \sum_{j=1}^{n-p} q_{ij} \omega_{0j}, \quad i = 1, \dots, n-p. \quad (9)$$

Остальные уравнения принимают вид

$$\dot{\omega}_{11} = c_1 A x + c_1 B u = \omega_{12}, \dots, \dot{\omega}_{1m_1-1} = c_1 A^{m_1-1} x + c_1 A^{m_1-2} B u = \omega_{1m_1},$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{1m_1} &= c_1 A^{m_1} x + c_1 A^{m_1-1} B u = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j^{(1)} \omega_{0j} + \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}^{(1)} \omega_{ij} + u_1 + \sum_{j=2}^r \beta_j^{(1)} u_j, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{\omega}_{r-11} = \omega_{r-12},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dot{\omega}_{r-1m_{r-1}} = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j^{(r-1)} \omega_{0j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}^{(r-1)} \omega_{ij} + u_{r-1} + \beta_r^{(r-1)} u_r,$$

$$\dot{w}_{r1} = w_{r2},$$

.....

$$\dot{w}_{rm_r} = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j w_{0j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}^{(r)} w_{ij} + u_r.$$

Если ранг матрицы управляемости $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ равен n , т. е. система полностью управляема (в нашем случае $p=n$), система (1) приводится к виду (10). Эта форма называется [6] канонической формой полностью управляемой системы. В общем случае (при $p \leq n$) канонической формой системы (1) назовем систему (9), (10).

Рассмотрим систему (9), (10) в подпространстве L , т. е. при $w_1 = (w_{01}, \dots, w_{0p-n})^* = 0$. Легко показать, используя [4], что система (9), (10) является идеально наблюдаемой в подпространстве L , если выход имеет вид $y_1 = w_{11}, y_2 = w_{21}, \dots, y_r = w_{r1}$.

Поэтому система (9), (10), если выход имеет вид

$$y_1 = w_{11},$$

.....

$$y_r = w_{r1},$$

$$y_{r+1} = l_1^* w_1,$$

.....

$$y_{r+s} = l_s^* w_1,$$

также является идеально наблюдаемой, поскольку по функциям $y_1(\cdot), y_2(\cdot), \dots, y_r(\cdot)$ можно восстановить для любого $t \in [0, T]$ вектор $(w_{11}(t), w_{12}(t), \dots, w_{rm_r}(t))^*$, а, в силу выбора векторов $l_1, \dots, l_s$ по функциям $y_{r+1}(\cdot), \dots, y_{r+s}(\cdot)$ можно восстановить для любого $t \in [0, T]$ вектор $w_1(t)$. Тем самым существует $s+r$ линейно-независимых вектор-строк матрицы H таких, что система (1), (2) является идеально наблюдаемой.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что для любых векторов $g_i \in E_n (i = 1, \dots, s+r-1)$ система (1), (2) с матрицей $H = (g_1, g_2, \dots, g_{s+r-1})^*$ не является идеально наблюдаемой.

Прежде всего заметим, что система (5) при $z_1 = 0$ (аналогично система (9), (10) при $w_1 = 0$), т. е. в подпространстве L , является полностью управляемой [7]. Таким образом,

$$\text{rank}(B_2, A_{22}B_2, \dots, A_{22}^{p-1}B_2) = p. \quad (11)$$

Поэтому, если $s=0$, то существует управление вида $u=Mw$, для которого система (9), (10) имеет вид

$$\dot{w}_{11} = w_{12},$$

.....

$$\dot{w}_{1m_1} = 0, \quad (12)$$

.....

$$\dot{w}_{r1} = w_{r2},$$

.....

$$\dot{w}_{rm_r} = 0.$$

Следовательно [5], для любых векторов $g_i \in E_n$ ($i = 1, \dots, r-1$) система (12) с выходом $y = Hw$, $H = (g_1, \dots, g_{r-1})^*$ не является наблюдаемой по Калману. Таким образом, в случае $s = 0$ для любых векторов $g_i \in E_n$ ($i = 1, \dots, r-1$) система (9), (10) с выходом $y = Hw$, $H = (g_1, \dots, g_{r-1})^*$ не является идеально наблюдаемой.

Поэтому всюду в дальнейшем предполагается, что $s \geq 1$.

Пусть максимальная размерность собственного подпространства матрицы Q^* достигается на собственном значении λ_0 . Используя (7), очевидно, что возможны два случая: 1 — $m_{v+1} = \dots = m_r = 1$ ($m_v > 1$), 2 — $m_r > 1$.

Рассмотрим случай 1. Пусть выход системы (1) имеет вид $y = Hx$. Обозначим через v_1 вектор $(w_{01}, \dots, w_{0n-p}, w_{11}, \dots, w_{vm_v})^*$, а через v_2 — вектор $(w_{v+11}, w_{v+21}, \dots, w_{r1})^*$. Тогда выход системы (9), (10), линейно эквивалентной системе (1), можно записать в виде $y = H_1 v_1 + H_2 v_2$, где H_1, H_2 — матрицы размеров $(r+s-1) \times \times (n - (r-v))$ и $(r+s-1) \times (r-v)$ соответственно.

Заметим, что $r+s-1 \geq r-v$. Поэтому $\text{rank } H_2 < r-v$ либо $\text{rank } H_2 = r-v$.

Пусть $\text{rank } H_2 < r-v$. Тогда выберем управление $u = M_1 w$ таким образом, чтобы система (10) имела вид

$$\begin{aligned} \dot{w}_{11} &= w_{12}, \\ &\dots \dots \dots \\ &\quad m_1 \\ \dot{w}_{1m_1} &= \sum_{j=1} \beta_j^{(1)} w_{1j}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{v1} &= w_{v2}, \\ &\dots \dots \dots \\ &\quad m_v \\ \dot{w}_{vm_v} &= \sum_{j=1} \beta_j^{(v)} w_{vj}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{v+11} &= \sum_{j=1}^{n-p} \gamma_j^{(v+1)} w_{0j} + \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij}^{(v+1)} w_{ij}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{w}_{r1} = \sum_{j=1}^{n-p} \gamma_j^{(r)} w_{0j} + \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{m_i} \gamma_{ij}^{(r)} w_{ij},$$

причем коэффициенты $\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_1}^{(1)}, \dots, \beta_1^{(v)}, \dots, \beta_{m_v}^{(v)}$ выбраны так, что характеристические многочлены систем

$$\dot{w}_{i1} = w_{i2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dot{w}_{im_i-1} = w_{im_i}, \quad \dot{w}_{im_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)} w_{ij}$$

при $i = 1, 2, \dots, v$ имеют собственное значение λ_0 и $\bar{\lambda}_0$, а остальные коэффициенты $\gamma_1^{(v+1)}, \dots, \gamma_{v m_v}^{(v+1)}, \dots, \gamma_{v m_v}^{(r)}$ выбраны произвольно. Существование такого управления $u = M_1 w$, при котором система (10) переходит в систему (13), с коэффициентами, удовлетворяющими указанным выше условиям, следует из (11).

Таким образом, при данном управлении система (9), (10) имеет вид

$$\dot{v}_1 = Q_1 v_1, \quad \dot{v}_2 = N v_1 \quad (14)$$

с выходом

$$y = H_1 v_1 + H_2 v_2. \quad (15)$$

Легко показать, что матрица наблюдаемости системы (14), (15) имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ K & 0 \\ KQ_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ KQ_1^{n-(r-v)-1} & 0 \end{pmatrix}$$

и $\text{rank } R < n$, где через K обозначена матрица $H_1 Q_1 + H_2 N$.

Рассмотрим случай, когда $\text{rank } H_2 = r - v$. Разобьем матрицу H_2 на две матрицы $\tilde{H}_2$ и $\tilde{H}_2$ так, что

$$H_2 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_2 \\ \tilde{H}_2 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{H}_2$ — квадратная невырожденная матрица размеров $(r-v) \times (r-v)$. Аналогично разобьется и матрица H_1 :

$$H_1 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_1 \end{pmatrix}.$$

Выбирая элементы $\gamma_1^{(v+1)}, \dots, \gamma_{v m_v}^{(r)}$ матрицы N следующим об-

разом $N = -\tilde{H}_2^{-1} \tilde{H}_1 Q_1$, получим, что матрица наблюдаемости системы (14), (15) имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 \\ \tilde{K} & 0 \\ \tilde{K}Q_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{K}Q_1^{n-(r-v)-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где через $\tilde{K}$ обозначена матрица $\tilde{H}_1 Q_1 + \tilde{H}_2 N$.

Как и выше, $\text{rank } R < n$, так как матрица наблюдаемости системы $\dot{z} = Q_1 z$, $y = \tilde{K}z$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{K} \\ \tilde{K}Q_1 \\ \vdots \\ \tilde{K}Q_1^{n-(r-v)-1} \end{pmatrix},$$

а в силу выбора коэффициентов $\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{m_v}^{(v)}$ матрицы Q_1 (см. [5]), ранг ее меньше, чем $n - (r - v)$.

В случае 2, очевидно, существует управление $u = Mw$ такое, что система (9), (10) имеет вид $\dot{w} = Q_2 w$, причем максимальная размерность собственного подпространства матрицы Q_2^* равна $r + s$.

Таким образом для любых векторов $g_i \in E_n$ ($i = 1, 2, \dots, r + s - 1$) всегда существует управление $u = Mw$ такое, что система (9), (10) с выходом $y = Hw$, $H = (g_1, \dots, g_{r+s-1})$ не является наблюдаемой по Калману. Поэтому для любых векторов $g_i \in E_n$ ($i = 1, 2, \dots, r + s - 1$) система (9), (10) с выходом $y = Hw$, $H = (g_1, \dots, g_{r+s-1})^*$ не является идеально наблюдаемой.

Теорема доказана.

Из данной теоремы можно привести ряд следствий. Ограничимся наиболее важными.

Следствие 1. Пусть система (1) является полностью управляемой, т. е. $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Тогда минимальное число вектор-строк матрицы H , при которых система (1), (2) является идеально наблюдаемой, равно $\text{rank } B$.

Следствие 2. Минимальное число вектор-строк матрицы H , при которых система (1), (2) является наблюдаемой по Калману, равно максимальной размерности собственного подпространства матрицы A^* , т. е. подпространства, состоящего из собственных век-

торов матрицы A^* , отвечающих одному и тому же собственному значению.

Таким образом, мы пришли к результату, доказанному в [5].

Теорема 2. Любая идеально наблюдаемая система с минимальным выходом

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Hx$$

линейно эквивалентна системе вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_{11} &= w_{12}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{1p_1-1} &= w_{1p_1}, \\ \dot{w}_{1p_1} &= \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j^{(1)} w_{1j}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{s1} &= w_{s2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{sp_s} &= \sum_{j=1}^{p_s} \alpha_j^{(s)} w_{sj}, \\ \dot{w}_{s+11} &= w_{s+12}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{s+1p_{s+1}} &= \sum_{i=1}^{r+s} \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij}^{(1)} w_{ij} + u_1 + \sum_{j=2}^r \beta_j u_j, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{s+r1} &= w_{s+r2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \dot{w}_{s+rp_{s+r}} &= \sum_{i=1}^{r+s} \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ij}^{(r)} w_{ij} + u_r, \quad y = \bar{H}w, \end{aligned} \tag{16}$$

причем существует такая невырожденная матрица D , что

$$D\bar{H}w = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \dots \dots \dots \\ w_{r+s1} \end{pmatrix},$$

где s — максимальная размерность собственного подпространства матрицы A^* , ортогонального всем столбцам матрицы B , $r = \text{rank } B$.

Данная теорема является следствием теоремы 1. Система (16) получается из системы (1), (2) путем применения замены (8) с использованием канонической формы наблюдаемых по Калману систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. — «Тр. I Конгресса ИФАК», 1961, с. 49—56.
2. Никольский М. С. Идеально наблюдаемые системы. — Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6, с. 32—35.
3. Никольский М. С. Об идеально наблюдаемых системах. — «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 4, с. 631—638.
4. Маринич А. П. Каноническая форма идеально наблюдаемых систем. — «Вестн. Харьк. ун-та», 1975, № 119. Математика и механика, вып. 40, с. 36—40.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971. 507 с.
6. Luenberger D. G. Canonical forms for linear multivariable systems. — IEEE Trans. Automatic Control, AC-12, 1967, p. 20—25.
7. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968. 475 с.

Поступила 5 февраля 1975 г.

УДК 62.501.12

В. Е. ЧУПРИНА

К УПРАВЛЯЕМОСТИ СПЕКТРОМ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В работе [1] рассмотрена управляемость спектром в линейной динамической системе при неполной информации о фазовых координатах с n -мерным входом. В предлагаемой работе дается необходимое и достаточное условие управляемости спектром в линейной динамической системе с одномерным выходом при произвольном входе (с одномерным входом при произвольном выходе).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

$$y = Hx, \quad (2)$$

где x — фазовый n -вектор; y — m -вектор выхода; u — r -вектор управления; A , B , H — вещественные постоянные матрицы соответственно размеров $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $1 \leq r \leq n$, $1 \leq m \leq n$. Будем считать, что $\text{rank } B = r$, $\text{rank } H = m$. Если $m = n$, будем говорить, что есть полная информация о фазовых координатах.

Рассмотрим также двойственную систему по отношению к системе (1) — (2):

$$\dot{z} = A'z + H'u, \quad (3)$$

$$w = B'z, \quad (4)$$

где штрих означает транспонирование.

Приведем некоторые определения и обозначения. Под спектром Λ будем понимать набор из n -комплексных чисел, содержащий при $\nu \neq 0$ наряду с числом $\lambda = \mu + i\nu$ его комплексно сопряженное число $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$ столько раз, сколько и λ . Совокупность собственных значений вещественной матрицы C размеров $n \times n$ образует спектр, обозначим его $\sigma(C)$.

Систему (1) назовем синтезируемой с произвольным спектром по выходу (2), если для любого спектра Λ существует управление $u = Py$ такое, что система $\dot{x} = (A + BPH)x$ имеет спектр Λ , т. е. $\sigma(A + BPH) = \Lambda$.

Если $m = n$, то будем говорить о синтезируемости системы (1) с произвольным спектром при полной информации.

Задача. Каким условиям должны удовлетворять матрицы A, B, H , чтобы система (1) была синтезируема с произвольным спектром по выходу (2)?

Известно [2], что система (1) синтезируема с произвольным спектром при полной информации тогда и только тогда, когда она вполне управляема, т. е. $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$.

Предварительно приведем две леммы, связывающие задачи синтеза спектра системы (1) — (2) и системы (3) — (4).

Лемма 1. Для того чтобы система (1) была синтезируема с произвольным спектром по выходу (2), необходимо и достаточно, чтобы система (3) была синтезируема с произвольным спектром по выходу (4).

Справедливость этой леммы следует из равенства

$$\sigma(A + BPH) = \sigma(A' + H'P'B').$$

Лемма 2. Для того чтобы система (1) была синтезируема с произвольным спектром по выходу (2), необходимо, чтобы система (1) и система (3) были вполне управляемы.

Это следует из леммы 1 и условия синтезирования системы при полной информации.

Рассмотрим одномерный выход, т. е. $y = hx$, где

$$h = (h^1, h^2, \dots, h^n).$$

Теорема. Для того чтобы система (1) была синтезируема с произвольным спектром по выходу (2), необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } B = n$ и система (1) была вполне наблюдаема, т. е. $\text{rank}(h', A'h', \dots, A'^{n-1}h') = n$.

Доказательство. *Необходимость.* В силу леммы 2 следует, что система (1) — (2) вполне управляема и вполне наблюдаема. Покажем, что $\text{rank } B = n$. Пусть $\text{rank } B < n$.

Произведя в системе (3) — (4) замену переменных $C\eta = z$, получим систему

$$\dot{\eta} = A_1\eta + h_1v, \quad (5)$$

$$w = B_1\eta, \quad (6)$$

где $B_1 = B'C$; $h_1 = (0, \dots, 0, 1)'$; $C = QQ_1^{-1}$; $Q = (A'^{n-1}h', \dots, A'h', h')$;

$$Q_1 = (A_1^{n-1}h_1, \dots, A_1h_1, h_1);$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$a_i, i = 1, \dots, n$ — коэффициенты характеристического полинома $\psi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ матрицы A .

Так как система (3) — (4) (а значит и система (5) — (6)) синтезируема с произвольным спектром на основании леммы 1 одновременно с системой (1) — (2), то для любого спектра

$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ существует управление $v = Pw$ такое, что $\sigma(A_1 + h_1 P B_1) = \Lambda$.

Нетрудно видеть, что матрица $A_1 + h_1 P B_1$ имеет вид

$$A_1 + h_1 P B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

и так как она имеет спектр Λ , то $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, являются коэффициентами полинома $\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$.

Из (7) следует, что

$$P B_1 = a - \alpha, \quad (8)$$

где $a = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$; $\alpha = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)$.

Равенство (8) означает, что $\text{rank } B_1 = \text{rank} \begin{pmatrix} B_1 \\ a - \alpha \end{pmatrix}$. С другой стороны, так как система синтезируема с произвольным спектром и $\text{rank } B = \text{rank } B_1 = r < n$, то управление $v = Pw$ можно выбрать так, чтобы вектор $a - \alpha$ был линейно независим с вектор-строками матрицы B_1 , что противоречит равенству (8).

Полученное противоречие означает, что $\text{rank } B = n$.

Достаточность непосредственно следует из леммы 1 и условия синтезируемости с произвольным спектром при полной информации. Так как система (3) — (4) с полной информацией и вполне управляема, то система (1) синтезируема с произвольным спектром по выходу (2).

Следствие. Для того чтобы система (1) при $r=1$ была синтезируема с произвольным спектром по выходу (2), необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } H = n$ и система (1) была вполне управляема.

Результат работы [1] непосредственно следует из леммы 1 и условия синтезируемости при полной информации.

1. Григорьева Т. П., Кожинская Л. Н. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 7, с. 167—169.
2. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М., «Наука», 1970. 420 с.

Поступила 29 января 1975 г.

УДК 532.135

И. Г. АЛЬПЕРИН, канд. физ.-мат. наук

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ. I

Допустим, что некоторый объем Ω , принадлежащий n -мерному евклидову пространству и ограниченный поверхностью $\partial\Omega$, представляет собой свободное упругое тело, которое находится в состоянии A равновесия под действием некоторой системы объемных и поверхностных сил.

Введем в этом состоянии A декартову систему координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которой будем пользоваться в дальнейшем, и запишем условия равновесия тела Ω .

Как известно, они сводятся к системе дифференциальных уравнений¹

$$\sigma_{ik,k} + F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и граничных условий

$$\sigma_{ik} N_k|_{\partial\Omega} = P_i. \quad (2)$$

Здесь σ_{ik} — тензор напряжений в точке $x \in \Omega$, $\sigma_{ik,j} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j}$; F_i, P_i —

компоненты объемных сил — $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ и поверхностных сил — $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ соответственно, а $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ — орт внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Чтобы написанная система (1) стала определенной, необходимо к ней добавить закон Гука

$$\sigma_{ik} = \rho \frac{\partial E}{\partial l_{ik}}, \quad (3)$$

где ρ — плотность среды; l_{ik} — компоненты тензора конечных деформаций; E — упругий потенциал, который предполагается зависеть только от l_{ik} .

Выведем тело Ω из состояния A путем добавления к внешним силам уравновешенной системы малых объемных и поверхностных сил — $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ и $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ соответственно.

Тогда упругое тело перейдет в состояние равновесия B . Так как по условию силы, возмущившие состояние A , малы, то можно полагать, что состояние B будет близким к состоянию A .

В этом предположении уравнения возмущенного состояния равновесия B можно приближенно описать с помощью системы линей-

¹ Знак суммы везде опущен.

ных дифференциальных уравнений и граничных условий, внешне подобных исходным:

$$\sum_{ik,k} f_i = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{ik} N_k|_{\partial\Omega} = p_i, \quad (5)$$

и связи, аналогичной закону Гука¹ (3):

$$\sum_{ik} \rho \frac{\partial^2 E}{\partial l_{ik} \partial l_{\alpha\beta}} v_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha k} v_{i,\alpha}, \quad (6)$$

где $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ — вектор (полагаемый малым) возмущенных смещений точек тела Ω ; $v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha})$ — тензор соответствующих ему малых деформаций этого тела.

Уравнения (4) — (6) впервые встречаются в книге Грина и Зерна [1], а также в известных работах об устойчивости упругого равновесия Пирсона [2] и Хилла [3].

Эти уравнения справедливы только при одном дополнительном условии — нагрузка на тело Ω в состоянии A «мертвая». Это означает, что силы Pds и $Fd\Omega$, действующие в состоянии A на элемент поверхности и элемент объема соответственно, остаются неизменными при переходе тела Ω в состояние B^2 .

В противном случае нагрузку называют «следящей» и в уравнениях (4), (5) к силам f и p необходимо добавить силы, являющиеся результатом такого «слежения».

Допустим теперь, что система (4) — (6) имеет единственное решение. Тогда исходное состояние A равновесия тела Ω (при условии, что нагрузка «мертвая») называют устойчивым.

В противном случае, т. е. в случае, если соответствующая (4) — (6) однородная система допускает нетривиальное решение, исходное состояние A называется неустойчивым.

Настоящая работа и посвящается некоторому исследованию этого вопроса. Ограничения, накладываемые на состояние тела Ω , при которых удается доказать ряд утверждений, излагаются ниже.

1. Предварительные ограничения

Ограничение 1. Объемные силы в состоянии A отсутствуют ($F = 0$) и вся нагрузка «мертвая».

Ограничение $F = 0$ не существенно и принято лишь для упрощения выкладок.

Ограничение 2. Поверхность $\partial\Omega$, ограничивающая тело Ω в состоянии A , предполагается достаточно гладкой, принадлежащей классу C^l , $l \geq 1$.

¹ В отличие от σ_{ik} , $\sum_{ik} \neq \sum_{ki}$.

² В дальнейшем именно это и будем предполагать.

Состояние A равновесия тела Ω описывается системой линейных уравнений классической теории упругости в предположении малых деформаций однородного изотропного упругого тела.

Тензор напряжений σ_{ik} в этом состоянии принадлежит пространству функций $C^{l-1}(\bar{\Omega})$, где l — класс поверхности $\partial\Omega$.

Из сказанного следует, что вместо (1) имеет место система уравнений

$$\sigma_{ik,k} = 0, \quad (1')$$

а вместо (3) —

$$\sigma_{ik} = \rho \frac{\partial E}{\partial l_{ik}} = \lambda l_{ii} \delta_{ik} + 2\mu l_{ik}. \quad (3')$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера; λ, μ — известные упругие постоянные Лямэ.

Так как в этих предположениях $\rho = \text{const}$, то очевидно, что

$$\rho \frac{\partial^2 E}{\partial l_{ik} \partial l_{a\beta}} = \frac{\partial}{\partial l_{a\beta}} \left(\rho \frac{\partial E}{\partial l_{ik}} \right) = \lambda \delta_{a\beta} \delta_{ik} + \mu (\delta_{ia} \delta_{k\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{ka})$$

и вместо (6) получим

$$\sum_{ik} = \lambda v_{ii} \delta_{ik} + 2\mu v_{ik} + \sigma_{ak} v_{i,a}, \quad (6')$$

а вместо (4) и (5) — следующую систему дифференциальных уравнений возмущенного состояния равновесия:

$$\lambda v_{ii,i} + 2\mu v_{ik,k} + \sigma_{ak} v_{i,a} = 0 \quad (4')$$

и граничных условий¹

$$\lambda v_{ii} N_i + 2\mu v_{ik} N_k + P_a v_{i,a} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5')$$

Здесь

$$v_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}; \quad v_{ik} = \frac{1}{2} (v_{i,k} + v_{k,i}).$$

Системы (4'), (5') в упрощенном виде лягут в основу всех дальнейших рассуждений.

Пусть теперь вектор возмущенного смещения $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ точки $x \in \Omega$ удовлетворяет граничным условиям (5'). Умножая

скалярно обе части (4') на v , получаем
$$\int_{\Omega} (\lambda v_{ii}^2 + 2\mu v_{ik}^2 + \sigma_{ak} v_{i,k} v_{ia}) d\Omega = 0.$$

Очевидно, если в каждой точке области Ω квадратичная форма $\sigma_{ak} x_a x_k > 0$, левая часть написанного выше равенства будет положительно-определенной формой от v_{ik} и, следовательно, не существует функции v такой, что $v_{ik} \neq 0$ и которая удовлетворяла бы этому равенству.

Поэтому ясно, для того чтобы могло существовать нетривиальное решение (4'), (5'), тензор напряжений σ_{ik} должен быть подчинен каким-то условиям относительно знаков его компонентов.

¹ Согласно ограничению 1, нагрузка $p_i = 0$.

Ограничение 3. Главные компоненты $\hat{\sigma}_i$ тензора средних по объему Ω напряжений

$$\hat{\sigma}_{ik} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} \sigma_{ik} d\Omega$$

должны удовлетворять неравенствам $\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_k < 0$, $i \neq k = 1, 2, \dots, n$.

Мы привели лишь некоторые основания формулировки такого сильного ограничения. Как оно скажется на рассуждениях, удобнее будет выяснить в соответствующих местах.

В среднем тело Ω преимущественно сжато потому, что вдоль одной из главных осей тензора $\hat{\sigma}_{ik}$ допускается даже (в среднем!) растяжение.

Пусть теперь σ_α — главные напряжения в точке $x \in \bar{\Omega}$. Из ограничения 3 следует, что

$$\inf \sigma_\alpha = -m, \quad m > 0. \\ (\alpha, x \in \bar{\Omega})$$

Обозначим через ¹

$$S_{ik} = -\frac{\sigma_{ik}}{m} \leq 1, \quad \frac{m}{2\mu} = \tau. \quad (7)$$

Тогда уравнения (4') и граничные условия (5') примут вид

$$-(Lv)_i = \nu' v_{ll,i} + v_{ik,k} - \tau S_{ka} v_{l,ak} = 0, \quad (8)$$

$$(Bv)_i = \nu' v_{ll} N_i + v_{ik} N_k - \tau S_{ka} v_{i,a} N_k | \partial\Omega = 0. \quad (9)$$

Здесь $\nu' = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\nu}{1-2\nu}$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$ — постоянная Пуассона для данной среды.

Уравнения равновесия (1) запишем так:

$$S'_{ik,k} = 0, \quad (10)$$

а вместо ограничения 3 можем написать

Ограничение 3'. $\hat{S}_i + \hat{S}_k > 0$, $i \neq k = 1, 2, \dots, n^2$.

Уравнения (8) и условия на (свободной) границе тела (9) являются в этом изложении окончательными, и задача будет состоять в том, чтобы найти число $\tau_0 > 0$ и вектор $v_0 \neq 0$, которые обращали бы их в тождество.

Необходимо выяснить, не накладывает ли на искомые смещения v каких-нибудь условий то обстоятельство, что они перево-

¹ В приложениях число τ мало. Так, для стали $\tau \sim \frac{[\sigma]}{2\mu} \cong 10^{-3}$.

² $\hat{S}_i$ — главные компоненты тензора $\hat{S}_{ik} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} S_{ik} d\Omega$.

дят тело Ω из одного состояния A равновесия в другое B . Оказывается, эти смещения должны быть подчинены некоторым ограничениям.

Действительно, в состоянии A внешние силы удовлетворяют условиям равновесия

$$\int_{(\partial\Omega)} P_\alpha ds = 0, \quad \int_{(\partial\Omega)} (P_\alpha x_\beta - P_\beta x_\alpha) ds.$$

Аналогичным условиям должны подчиняться эти силы и в состоянии B

$$\int_{(\partial\Omega')} P'_\alpha ds' = 0, \quad \int_{(\partial\Omega')} [P'_\alpha (x_\beta + v_\beta) - P'_\beta (x_\alpha + v_\alpha)] ds' = 0.$$

Но, согласно ограничению 1 (нагрузка „мертвая“!), $P'_\alpha ds' = P_\alpha ds$.

Поэтому первая группа условий выполняется. Из второй же группы условий вытекает, что

$$\int_{(\partial\Omega)} (P_\alpha v_\beta - P_\beta v_\alpha) ds = 0 \quad (\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n)$$

и они должны быть удовлетворены.

Ограничение на смещения. Смещения v точек тела Ω при переходе его из состояния A в другое состояние равновесия B должны удовлетворять условиям

$$\int_{(\partial\Omega)} (P_\alpha v_\beta - P_\beta v_\alpha) ds = 0 \quad (\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

$$\int_{(\Omega)} v d\Omega = 0. \quad (12)$$

Условие (12) не существенно и, если вектор v достаточно гладок, условия (11) эквивалентны следующим:

$$\int_{(\Omega)} (S_{\alpha k} v_{\beta, k} - S_{\beta k} v_{\alpha, k}) d\Omega = 0. \quad (11')$$

Кроме того, аналогичная ситуация складывается и в классической теории, но там левые части этих условий малы и, значит, они выполняются с той степенью точности, в которой поставлена вся задача.

2. Формулировка основного утверждения

Будем иметь дело с функциями v , имеющими k -е обобщенные производные, принадлежащие $L_2(\Omega)$, т. е. с функциями, принадлежащими пространству Соболева $W_2^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Из этого пространства отберем функции, удовлетворяющие дополнительно условиям (11) и (12).

Очевидно, последние также образуют полное пространство функций, которое будем обозначать через $W_{2P}^k(\Omega)$. Отметим особо то из них, которое отвечает случаю гидростатического давления, т. е. случаю, когда $P_i = -pN_i (p > 0)$.

Соответствующее ему пространство W_{2P}^k будем обозначать через $W_{2N}^k(\Omega)$. Легко проверяется, что тензор $S_{ik} = \delta_{ik}$ и условия (11') имеют вид

$$\int_{(\Omega)} (v_{i,k} - v_{k,i}) d\Omega = 0, \quad i \neq k = 1, 2, \dots, n. \quad (11'')$$

В связи с этими пространствами функций докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякую функцию $v \in W_2^1(\Omega)$ можно представить в виде*

$$v_i = v'_i + \omega_{ik} x_k + c_i,$$

где $v'_i \in W_{2P}^1(\Omega)$, а $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ и c_i — некоторые постоянные.

Доказательство. Следует доказать возможность выбора этих постоянных так, чтобы для v' выполнялись условия (11) и (12). Возможность удовлетворения условиям (12) очевидна. Остается доказать, что можно найти ω_{ik} такие, что (11) или, что то же, (11') также выполняются.

Для простоты будем считать, что система координатных осей совпадает с главными осями тензора «средних» напряжений

$$\hat{S}_{ik} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} S_{ik} d\Omega.$$

Условие (11') для v' теперь имеет вид

$$0 = \int_{(\Omega)} (S_{i\alpha} v'_{k,\alpha} - S_{k\alpha} v'_{i,\alpha}) d\Omega = \int_{(\Omega)} (S_{i\alpha} v_{k,\alpha} - S_{k\alpha} v_{i,\alpha}) d\Omega - \\ - \int_{(\Omega)} (S_{i\alpha} \omega_{k\alpha} - S_{k\alpha} \omega_{i\alpha}) d\Omega = G_{ik} - \Omega (\hat{S}_i + \hat{S}_k) \omega_{ki} \quad (\text{не суммировать!})$$

Согласно ограничению 3 (3'), $\hat{S}_i + \hat{S}_k > 0$ и, значит, числа ω_{ik} определяются однозначно.

Замечание 1. Именно это обстоятельство и вынудило нас потребовать в ограничении 3 строгое неравенство. Допустим теперь, что при некоторых двух разных значениях i и k — $P_i = P_k = 0$. В таком случае соответствующее $G_{ik} = 0$ и в ограничении 3' для этих значений i и k допускается знак равенства: $\hat{S}_i + \hat{S}_k \geq 0$.

Замечание 2. Для случая гидростатического давления ограничение 3 выполняется очевидно: $S_{ik} = \hat{S}_{ik} = \delta_{ik}$. Поэтому для пространства $W_{2N}^1(\Omega)$ справедливо утверждение леммы.

Пусть теперь функция v такова, что (см. (9)) $Ev/\partial\Omega = 0$. Тогда (см. (8))

$$(Lv, v) = \int_{(\Omega)} (Lv)_i v_i d\Omega = \int_{(\Omega)} (v'v_{ii}^2 + v_{ik}^2 - \tau S_{ak} v_{i,a} v_{i,k}) d\Omega = L_\tau(v, v).$$

Введем в связи с этим следующие обозначения:

$$\int_{(\Omega)} (v'v_{ii}^2 + v_{ik}^2) d\Omega = [v]_v^2, \quad v' = \frac{v}{1-2v};$$

$$\int_{(\Omega)} v_{i,k}^2 d\Omega = |v|_1^2; \quad \int_{(\Omega)} S_{ak} v_{i,a} v_{i,k} d\Omega = S(v, v) \quad (13)$$

и будем иметь

$$L_\tau(v, v) = [v]_v^2 - \tau S(v, v). \quad (14)$$

Относительно введенных форм сделаем несколько важных для дальнейшего замечаний.

1. Из известного неравенства Пуанкаре [4] следует, что для всякой функции $v \in W_{2p}^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C |v|_1, \quad (15)$$

где $C > 0$ — постоянная, зависящая только от Ω .

2. Для всех функций $v \in W_{2N}^1(\Omega)$ имеет место известное неравенство Корна (см. [4])

$$[v]_{v=0}^2 \geq \bar{s}_0 |v|_1^2, \quad (16)$$

где через $s_0 > 0$ обозначено наибольшее из чисел такого рода. Это число зависит только от области Ω .

3. Из (16) следует, что для тех же функций $v \in W_{2N}^1$.

$$[v]_v^2 \geq p_0(v) |v|_1^2, \quad (17)$$

где $p_0(v) \geq p_0(0) = s_0$ ($p_0(v)$ — снова наибольшее из чисел подобного рода) зависит только от v и Ω .

4. Для функций, обращающихся в нуль на границе области $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, неравенство Корна доказывается элементарно и приобретает вид

$$[v]_{v=0}^2 \geq \frac{1}{2} |v|_1^2. \quad (16')$$

Знак равенства достигается на функциях, удовлетворяющих условию $v_{ii} = 0$. Но тогда $s_0 = s_0(\Omega) \leq \frac{1}{2}$.

Обозначим теперь

$$\frac{1}{\tau_0(v)} = \sup_{v \in W_{2p}^1} \frac{S(v, v)}{[v]_v^2}$$

и получим для этого числа две важные оценки.

Лемма 2. Число $\tau_0(v)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \tau_0(v) \leq p_0(v). \quad (18)$$

Доказательство. Допустим снова, что система координатных осей совпадает с главными осями тензора $\hat{S}_{ak}$ и пусть $\hat{S}_1 > 0$.

Рассмотрим деформацию объема Ω , соответствующую вектору смещения $v_1 = ax_1 + b$, $v_i = 0$, $i \neq 1$.

Здесь постоянная $a > 0$, а постоянная b выбрана так, чтобы выполнялось условие (12).

Нетрудно проверить, что условие (11) также выполняется, значит, $v \in W_{2p}^1(\Omega)$.

Вычислим соответствующее этому вектору значение формы (см. (13)).

$$S(v, v) = \int_{(\Omega)} S_{ak} v_{i,a} v_{i,k} d\Omega = \int_{(\Omega)} S_{11} a^2 d\Omega = a^2 \Omega \hat{S}_1 > 0,$$

откуда следует левая часть неравенства (18).

Чтобы доказать правую часть (18), рассмотрим произвольную функцию $v \in W_{2p}^1(\Omega)$. Согласно замечанию к лемме 1, можно найти числа $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ и c_i такие, чтобы функция $v'_i = v_i - \omega_{ik} x_k - c_i$ принадлежала пространству $W_{2N}^1(\Omega)$.

Имеем

$$\begin{aligned} S(v', v') &= \int_{(\Omega)} S_{ak} (v_{i,a} - \omega_{ia}) (v_{i,k} - \omega_{ik}) d\Omega = \\ &= S(v, v) - 2\omega_{ik} \int_{(\Omega)} S_{ak} v_{i,a} d\Omega + \hat{S}_{ak} \Omega \omega_{ia} \omega_{ik}. \end{aligned}$$

Так как $v \in W_{2p}^1(\Omega)$, то

$$2\omega_{ik} \int_{(\Omega)} S_{ak} v_{i,a} d\Omega = \omega_{ik} \int_{(\Omega)} (S_{ak} v_{i,a} - S_{ai} v_{k,a}) d\Omega = 0.$$

Поэтому получаем $S(v', v') = S(v, v) + \Omega \hat{S}_{ak} \omega_{ia} \omega_{ik}$.

Для определения числа $\hat{S}_{ak} \omega_{ia} \omega_{ik}$ считаем, что оси координат совпадают с главными осями тензора $\hat{S}_{ak}$. Находим, что

$$S(v', v') = S(v, v) + \Omega \sum_{i \neq k=1}^n (\hat{S}_i + \hat{S}_k) \frac{\omega_{ik}^2}{2}.$$

¹ Для какой-нибудь оси такое неравенство, в силу ограничения 3, обязательно выполняется.

Учитывая теперь условие $\hat{S}_i + \hat{S}_k > 0$, $i \neq k$, заключаем, что $S(v', v') \geq S(v, v)$, $v' \in W_{2N}^1(\Omega)$, $v \in W_{2p}^1(\Omega)$ и (см. 13) $[v']_v = [v]_v$.

Кроме того, согласно (7),

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} S_{ak}(x) = 1,$$

где $\sup$ берется по всем точкам $x \in \bar{\Omega}$ и всем направлениям.

Поэтому

$$S(v', v') = \int_{(\Omega)} S_{ak} v'_{i,a} v'_{i,k} d\Omega \leq |v'|_1^2, \quad (19)$$

и мы получаем вторую часть неравенства (см. (17)).

$$\frac{1}{\tau_0(v)} = \sup_{v \in W_{2p}^1} \frac{S(v, v)}{[v]_v^2} \leq \sup_{v' \in W_{2N}^1} \frac{S(v', v')}{[v']_v^2} \leq \frac{1}{p_0(v)}.$$

Сформулируем основную теорему.

Теорема. Пусть Ω — конечная область E_n , ограниченная поверхностью класса C^l , $l \geq 1$, является изотропным и однородным упругим телом, характеризующимся постоянной Пуассона — ν .

Пусть это тело находится под действием уравновешенной системы поверхностных сил P в деформированном состоянии равновесия, при котором выполняются все условия, сформулированные в ограничениях 1—3. Тогда

а) если число $\frac{1}{\tau_0} = \sup_{v \in W_{2p}^1} \frac{S(v, v)}{[v]_v^2}$ больше 4, существует функция $v_0 \in W_{2p}^1(\Omega)$, которая обращает функционал

$$F(v) = \frac{S(v, v)}{[v]_v^2}$$

в максимум, равный $F(v_0) = \frac{1}{\tau_0}$;

б) в действительности же $v_0 \in W_{2p}^l(\Omega)$ и, если $l \geq 2$, в каждой точке внутри области Ω она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (8), а на поверхности $\partial\Omega$ условиям (9).

Замечание. В приложениях число τ_0 весьма мало, так что для них условие $\tau_0 < \frac{1}{4}$ не является ограничительным. Принято оно

потому, что аналогичному ограничению подчиняется постоянная в неравенстве, использованном в доказательстве, которое вместе со списком литературы дано во второй части работы.

Поступила 13 марта 1973 г.

УДК 532.135

Э. Н. ТАТАРЧЕНКО

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] выведены уравнения пограничного слоя на произвольной гладкой поверхности для вязкопластичной среды, описываемой достаточно универсальным реологическим уравнением. Эти уравнения справедливы при малом пределе текучести среды.

В случае большого предела текучести среды (как показано в [2]) в разложениях по малому параметру, характеризующему толщину пограничного слоя, необходимо удерживать члены более высокого порядка, которые оказываются существенными при малой кривизне поверхности. Это дало возможность в настоящей работе получить уравнения, допускающие предельный переход к уравнениям плоского обобщенного вязкопластичного пограничного слоя Олдройда [3]. Показано, что трансверсальный перепад давления отсутствует в случаях, когда поверхность изометрична плоскости или является поверхностью вращения. Внешнее течение в обоих случаях должно обладать осевой симметрией.

Используя реологическое соотношение, предложенное в работе [1],

$$P_{ik} = P\delta_{ik} + 2\tilde{\mu}v_{ik}, \quad (1)$$

где P_{ik} и v_{ik} — тензоры напряжений и скоростей деформаций; P — давление; $\tilde{\mu}$ — переменная кажущаяся вязкость, определяемая соотношением

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{\tau_0^n} + (\mu h)^{\frac{1}{m}} \right]^n, \quad (2)$$

приводим уравнения вязкопластичной среды к виду

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = - \text{grad } P + 2\tilde{\mu} \text{div } \Phi + \Phi \text{grad } 2\tilde{\mu}, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Здесь τ_0 — предел текучести; μ — коэффициент вязкости; ρ — плотность среды, Φ — тензор скоростей деформаций; $h^2 = 2v_{ik}v^{ki}$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций.