УДК 518

ВУ КУОК ФОНГ

ТЕОРИЯ ПЕРРОНА — ФРОБЕНИУСА ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУПП В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

1. В работах [1—3] введен и изучен важный класс элементарных почти периодических (п. п.) банаховых представлений топологических полугрупп, для которых соответствующее ядро Сушкевича (наименьший двусторонний идеал) является группой. Для неотрицательных элементарных п. п. представлений в пространстве $C(Q)$ непрерывных функций на компакте была построена теория [4], обобщающая классическую теорию Перрона—Фробениуса для неотрицательных матриц. В настоящей статье мы распространим эту теорию в той мере, в какой это возможно, на неотрицательные п. п. представления в пространствах $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, (Ω, Σ, μ)-пространство с σ-конечной мерой. Напомним, прежде всего, некоторые основные понятия и факты общей теории п. п. представлений (подробности см. [3]).

Пусть S — топологическая полугруппа, B — комплексное банахово пространство, $T : S \to L(B)$ — представление полугруппы S в B. Представление T называется п. п., если орбита $O(x) = \{T(s)x, s \in S\}$ каждого вектора $x \in B$ сильно предкомпактна, или, что эквивалентно, сильное замыкание $\beta_T = \overline{\{T(s) : s \in S\}}$ сильно компактно. Ядро Сушкевича K компактной полугруппы β_T называется также ядром Сушкевича представления T. Если представление T элементарное, т. е. его ядро Сушкевича K-группа, то единица P группы K является проектором в B (граничный проектор). Для элементарных п. п. представлений справедлива следующая теорема об отщеплении граничного спектра: $B = B_0 + B_1$, где $B_0 = \mathrm{Ker} P = \{x : 0 \in \overline{O(x)}\}$, $B_1 = \mathrm{Im} P = \overline{\Sigma_\lambda V_\lambda}$, V_λ пробегает конечномерные инвариантные подпространства, на которых $T \mid V_\lambda$ неприводимы и с точностью до эквивалентности унитарны. Если T — сжимающее (что всегда можно обеспечить с помощью перехода к эквивалентной норме, так как T ограничено), то $T \mid B_1$ — представление обратимыми изометриями. Замыкание его образа есть группа изометрий. Граничный проектор в этом случае ортогонален ($\| P \| = 1$, если $P \neq 0$). Подпространства B_0 и B_1 называются внутренним и граничным соответственно.

Если полугруппа S абелева, то любое ее п. п. представление элементарно. Более того, вводя на S направление: $s \leqslant t \leftrightarrow \exists\ u : t = s + u$, можно определить более широкий класс так называемых асимптотически почти периодических (а. п. п.) представлений. Представление T называется а. п. п., если $\sup\limits_s \| T(s) \| < \infty$ и направленность $\{T(s)\}$ асимптотически сильно предкомпактна (т. е. любая ее поднаправленность содержит сильно сходящуюся поднаправленность). Для а. п. п. представлений абелевой полугруппы теорема об отщеплении граничного спектра справедлива со следующим уточнением:

$B_0 = \{x : \lim_s T(s) x = 0\}$, B_1— замыкание линейной оболочки весовых векторов, отвечающих унитарным весам.

Далее в этой статье рассмотрение проводится одновременно для элементарных п. п. представлений произвольных полугрупп и для а. п. п. представлений абелевых полугрупп. Любое такое представление относим к классу N, если его граничное подпространство $B_1 \neq 0$.

Пусть T — неотрицательное представление класса N в $L_p(\Omega, \sum, \mu)$, где $1 \leqslant p < \infty$, (Ω, Σ, μ) — пространство с полной σ-конечной мерой. Считаем, что $\| T(s) \| \leqslant 1 \, (s \in S)$. Рассмотрим сначала случай, когда мера μ конечна, и $T(s) 1 = 1 \, (s \in S)$. Такие представления будем называть марковскими в соответствии с терминологией, принятой для операторов. Очевидно, марковское представление принадлежит классу N.

Лемма 1. *Пусть A — неотрицательное сжатие в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда множество $F = \{x : Ax = x\}$ — подрешетка.*

Доказательство. Нужно показать, что, если $x \in F$, то $y = |x| \in F$. Имеем $y = |Ax| \leqslant Ay$. Если вдобавок $Ay \neq y$, то $\|y\| < \|Ay\|$, что невозможно, так как $\|A\| \leqslant 1$.

Следствие. *Пусть T — марковское п. п. представление. Тогда 1) его граничное подпространство B_1— подрешетка, содержащая константы, 2) множество F_T инвариантных функций — подрешетка, содержащая константы.*

Утверждение 2) очевидно, а 1) следует из того, что B_1 есть множество неподвижных точек граничного проектора P ($P \geqslant 0$ в силу неотрицательности представления).

Из этого следствия и предложения III.11.2 [5] вытекает, что в Σ существует σ-подалгебра Σ_1 (полная), такая, что B_1 состоит в точности из функций, измеримых относительно Σ_1. Аналогичное утверждение справедливо для F_T (соответствующую σ-подалгебру обозначим через Σ_F). В силу теоремы об отщеплении граничного спектра операторы $T(s) | B_1$ изометричны, неотрицательны, и имеют неотрицательные обратные. Замыкание этого семейства операторов в сильной операторной норме топологии является компактной группой — ядром Сушкевича K-представления T.

Пусть φ — некоторый регулярный изоморфизм σ-алгебры Σ_1 на себя. Тогда φ индуцирует некоторый линейный оператор Φ в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$, который определяется условием $\Phi \xi_A = \xi_{\varphi(A)}$, где ξ_A — характеристическая функция множества A. По известной теореме Банаха—Ламперти [6] каждый изометрический оператор V в $L_p(\Omega, \Sigma_1, \mu)$, $p \neq 2$ порождается некоторым регулярным изоморфизмом φ σ-алгебры Σ_1 по формуле

$$(Vx)\omega = h(\omega)(\Phi x)\omega, \tag{1}$$

где $|h(\omega)|^p$ есть производная Радона—Никодима изоморфизма φ. Более того, формула (1) также дает (при $h(\omega) \geqslant 0$) общий вид неотрицательных изометрических операторов в $L_2(\Omega, \Sigma_1, \mu)$ [7]. В интересующем нас случае, когда $\mu(\Omega) < \infty$ и $V_1 1 = 1$, изоморфизм φ сохраняет меру, и формула (1) принимает вид

$$(Vx)(\omega) = (\Phi x)(\omega). \tag{2}$$

Особенный интерес представляет случай, когда исходное пространство с мерой (Ω, Σ, μ) является пространством Лебега (определения и основные свойства пространств Лебега см. в [8]), поскольку в этом случае мы можем использовать аппарат измеримых разбиений. В самом деле, σ-подалгебра Σ_1 порождает некоторое измеримое разбиение ζ пространства Ω. Факторпространством Ω/ζ пространства Ω по разбиению ζ называется пространство с мерой, точками которого служат элементы разбиения ζ и мера μ_ζ определяется следующим образом: пусть p — отображение, относящее каждой точке $\omega \in \Omega$ тот элемент разбиения ζ, к которому она принадлежит. Подмножество $Z \subseteq \Omega/\zeta$ считается измеримым, если $p^{-1}(Z) \in \Sigma$. Положим $\mu_\zeta(Z) = \mu(p^{-1}(Z))$. Известно, что факторпространство пространства Лебега по любому измеримому разбиению есть пространство Лебега. Поскольку Σ_1 состоит из множеств, измеримых относительно ζ, указанный выше изоморфизм φ σ-алгебры Σ_1 индуцирует (точечный) автоморфизм пространства Лебега Ω/ζ, который обозначим через $\tilde{\varphi}$. Допуская некоторую вольность, можно считать (Ω, Σ_1, μ) пространством Лебега, а φ — его автоморфизмом, что мы далее и предполагаем. Итак, формулу (2) можно переписать следующим образом: $(Vx)(\omega) = x(\varphi(\omega))$ (3).

Применяя эту формулу к операторам $T(s)$, действующим в $L_p(\Omega, \sum_1, \mu)$, получаем семейство автоморфизмов φ_s пространства $(\Omega, \sum_1, \mu)$, таких, что $(T(s)x)(\omega) = x(\varphi_s(\omega))$ $(s \in S,\ \omega \in \Omega)$. Очевидно, φ_s является действием полугруппы S на $(\Omega, \sum_1, \mu)$, непрерывным в том смысле, что, если $\hat{\varphi}_s$ — класс совпадающих (mod 0) автоморфизмов, то для любых $A, B \in \sum_1$ функция $s \to \mu(\hat{\varphi}_s(A) \cap B)$ непрерывна на S.

Предположим теперь, что G — любая компактная группа и $\alpha : G \to \operatorname{Aut}\Omega$ — непрерывное действие группы G на $(\Omega, \sum_1, \mu)$ автоморфизмами. Тогда α индуцирует некоторое представление α^* в $L_p(\Omega, \sum_1, \mu) : (\alpha^*(g)x)(\omega) = x(\alpha_g(\omega))$ $(g \in G,\ \omega \in \Omega)$ (сильная непрерывность α^* следует из слабой непрерывности и теоремы Миркила (см. [3]). Легко видеть, что α^* — марковское п. п. представление. Эта ситуация является моделью для любого представления полугруппы S класса N, рассматриваемого на граничном подпространстве. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в $B_1 = L_p(\Omega, \sum_1, \mu)$ $(K \approx K \mid B_1,\ K \mid B_0 = 0)$. Если $V \in K$, то, поскольку V — изометрия и одновременно порядковый изоморфизм, $(Vx)(\omega) = x(\varphi_V(\omega$ $(\omega \in \Omega,\ x \in L_p(\Omega, \sum_1, \mu)$. Следовательно, мы имеем непрерывное действие компактной группы K на $(\Omega, \sum_1, \mu)$ автоморфизмами, порожденное представлением T, при этом $(\varphi^*(V)x)(\omega) = (Vx)(\omega)$. Рассмотрим сквозной гомоморфизм $S \xrightarrow{T} \beta_T \xrightarrow{\pi} K$, где π — умножение слева на P. Очевидно, поднятие представления φ^* с K на полугруппу S при помощи указанного гомоморфизма есть подпредставление $T \mid B_1$.

Пусть теперь мера μ σ-конечна. Существование инвариантных функций (и их общую конструкцию) обеспечивает следующая.

Лемма 2 (ср. [1, 3]). *Для каждой функции $x \in B_1$, такой, что $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, формула $h_x = \int_K Vx\,dV$ (dV — мера Хаара на K) определяет* *инвариантную функцию представления T, такую, что* $\operatorname{supp} h_x \supset \supset \operatorname{supp} x \pmod 0$ **(4).**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инвариантность функции h_x следует из инвариантности меры Хаара. Для доказательства включения (4) предположим, что существует подмножество $A \in \Sigma$, такое, что $A \subset \operatorname{supp} x$, $\mu(A) > 0$ и A не пересекается с $\operatorname{supp} h_x$. Обозначим через ξ_A функционал на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, порожденный характеристической функцией множества A. Тогда $\xi_A(x) > 0$, следовательно $\xi_A(h_x) > 0$, поскольку подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и отлична от нуля в точке P. Это противоречит тому, что $\operatorname{supp} h_x \cap A = \varnothing$.

С л е д с т в и е. *Существует такая инвариантная функция* $h \geqslant 0$, *что для всех* $x \in B_1$ *имеет место включение* $\operatorname{supp} x \subset \operatorname{supp} h$ **(5).**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем счетную последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных инвариантных функций, плотную в конусе подрешетки F_T, и положим $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|h_n\|^{-1} h_n$.

Тогда для каждой функции $g \in F_T$, $g \geqslant 0$ имеем $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} h$. Следовательно, в силу (4) $\operatorname{supp} x \subset \operatorname{supp} h$ для $x \in B_1$, $x \geqslant 0$, а потому для всех $x \in B_1$, так как конус в B_1 — воспроизводящий.

Очевидно, множество $\operatorname{supp} h$ определяется формулой (5) однозначно $\pmod 0$. Назовем его носителем представления T и обозначим через $\operatorname{supp} T$. Зафиксируем раз и навсегда инвариантную функцию $h \geqslant 0$, такую, что $\operatorname{supp} h = \operatorname{supp} T$. Введем в Ω конечную меру $\hat{\mu}(A) = \int_A h^p d\mu$.

Рассмотрим оператор $\hat{h}: L_p(\operatorname{supp} T, \sum, \hat{\mu}) \to L_p(\operatorname{supp} T, \sum, \mu)$, действующий по формуле $\hat{h}x = hx$. Очевидно, $\hat{h}$ — неотрицательный изометрический оператор, имеющий неотрицательный обратный. Обозначим через Q естественный проектор из $L_p(\Omega, \sum, \mu)$ на $L_p(\operatorname{supp} T, \sum, \mu)$ и рассмотрим семейство операторов $\hat{T}(s) = \hat{h}^{-1} Q T(s) \hat{h}$ $(s \in S)$, действующих в $L_p(\operatorname{supp} T, \sum, \hat{\mu})$. Заметим, что если $V \in K$, то $QV = V$. Поэтому в $L_p(\operatorname{supp} T, \sum, \hat{\mu})$ действуют операторы $\hat{V} = \hat{h}^{-1} V h$ $(V \in K)$, и они образуют компактную группу, для которой оператор $\hat{P} = \hat{h}^{-1} P h$ служит единицей. Сужение $\hat{T}(s) | \operatorname{Im} \hat{P}$ является представлением, изометрически неотрицательно эквивалентным $T(s) | \operatorname{Im} P = T(s) | B_1$. Положим $\hat{B}_1 = \operatorname{Im} \hat{P}$. В силу следствия леммы 2 оператор $\hat{h}$ осуществляет биекцию подпространства $\hat{B}_1$ на B_1.

Теорема 1. *Для того чтобы представление T класса N в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ было неотрицательно изометрически эквивалентно марковскому, необходимо и достаточно, чтобы его носитель совпал с Ω.*

Такие представления будем называть слабо положительными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность вытекает из предыдущей конструкции, поскольку если $\operatorname{supp} T = \Omega$, то $Q = E$, $\hat{h}$ — неотрицательный изометрический оператор, осуществляющий требуемую эквивалентность. Докажем необходимость. Пусть существует марковское представление T_1 в некотором $L_p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ и неотрицательный изометрический оператор с неотрицательным обратным H: $L_p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu}) \to L_p(\Omega, \sum, \mu)$ такой, что $T(s) = HT_1(s)H^{-1}(s \in S)$. Тогда $(Hx)(\omega) = x(\psi(\omega))\sqrt[p]{\psi'(\omega)}$, $\omega \in \Omega$ **(6)**, где $\psi: \Omega \to \tilde{\Omega}$ — изоморфизм, такой, что $\mu(A) = 0 \leftrightarrow \tilde{\mu}(\psi(A)) = 0$, ψ' — производная Радона — Никодима. Положим $h(\omega) = \sqrt[p]{\psi'(\omega)} \in L_p(\Omega, \sum, \mu)$. Так как в силу (6) $h = H1$, то h — инвариантная функция представления T. Кроме того, $\operatorname{supp} h = \Omega$, так как если $h | A = 0$, то $\tilde{\mu}(\psi(A)) = 0$, откуда $\mu(A) = 0$.

Теорема 2. *Каждому представлению T класса N соответствует некоторое действие α_T ядра Сушкевича на* supp T, *такое, что подпредставление $T | B_1$ неотрицательно изометрически эквивалентно поднятию представления α_T^* на исходную полугруппу.*

Доказательство. Ядро Сушкевича K можно рассматривать как компактную группу неотрицательных операторов в B_1. Положим $\hat{V} = \hat{h}^{-1}V\hat{h}\ (V \in K)$. Соответствие $V \to \hat{V}$ задает представление R группы K в $\hat{B}_1 = L_p(\operatorname{supp} T, \Sigma_1, \hat{\mu})$, где Σ_1— соответствующая булева σ-подалгебра. Представление R неотрицательно изометрически эквивалентно тривиальному представлению ядра Сушкевича K в B_1. Так как $\hat{V}$ — изометрический порядковый изоморфизм, то существует автоморфизм $\alpha_T(V)$ пространства $(\operatorname{supp} T, \Sigma_1, \hat{\mu})$ такой, что $(\hat{V}x)(\omega) = x(\alpha_T(V)(\omega))$. Легко видеть, что α_T — непрерывное действие компактной группы K на $(\operatorname{supp} T, \sum_1, \hat{\mu})$, причем $R\pi = \alpha_T^*$, где π — умножение слева на граничный проектор P. Искомое поднятие представления α_T^* на S индуцируется сквозным гомоморфизмом $S \xrightarrow{T} \beta_T \xrightarrow{\pi} K$. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Любое представление класса N на своем граничном подпространстве неотрицательно изометрически эквивалентно марковскому представлению.*

2. Представление T класса N называется эргодическим, если порожденное им действие α_T ядра Сушкевича на supp T является эргодическим действием, т. е. каждое инвариантное (по модулю множеств меры 0) относительно $\alpha_T(V)(V \in K)$ подмножество либо имеет меру 0, либо имеет полную меру. Поскольку сужение $T(s)$ на B_1 эквивалентно α_T^*, то представление T будет эргодическим тогда и только тогда, когда подпространство его инвариантных функций одномерно. Это вытекает из приводимой ниже леммы, которая хорошо известна [9] для случая действий коммутативных групп, а в общем случае доказывается точно так же.

Лемма 3. *Пусть α — непрерывное действие локально компактной группы G на пространстве с конечной мерой* (Ω, Σ, μ). Пусть α^*— *порожденное им представление G в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$*, $(\alpha^*(g)x)(\omega) = x(\alpha_g(\omega))$. *Действие α эргодично тогда и только тогда, когда подпространство инвариантных функций представления одномерно. Если α эргодично, то* 1) *множество унитарных весов представления α^* образуют группу,* 2) *каждый унитарный вес имеет кратность 1,* 3) *модуль каждой весовой функции постоянен п. в.*

Применяя лемму 3 в сочетании с теоремой 2 к эргодическому представлению класса N, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть T — эргодическое представление класса N, h — его каноническая инвариантная функция. Тогда* 1) *модули весовых функций, отвечающих унитарным весам, пропорциональны h,* 2) *весовые подпространства, отвечающие унитарным весам, одномерны,* 3) *унитарные веса образуют подгруппу группы $\hat{K}$ одномерных характеров ядра Сушкевича. Если S коммутативна, то группа унитарных весов представления T совпадает с $\hat{K}$.*

Неотрицательные представления T в банаховом пространстве B с тотальным конусом называется неразложимым, если для каждого вектора $x \geqslant 0$, $x \neq 0$ и каждого линейного функционала $x^* \geqslant 0$, $x^* \neq 0$ существует $s \in S$, такой, что $x^*(T(s)x) > 0$. Для неотрицательных представлений в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ неразложимость характеризуется следующим свойством.

Лемма 4. *Неотрицательное представление T в $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ неразложимо тогда и только тогда, когда для каждой функции $x(\omega) \geqslant 0$, $x \neq 0$ и каждого подмножества $A \in \Sigma$, такого, что $\mu(A) > 0$, существует элемент $s \in S$, такой, что подмножество $\{\omega \in A : (T(s)x)(\omega) > 0\}$ имеет положительную меру.*

Доказательство. Пусть T неразложимо и ξ_A — функционал на $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, порожденный характеристической функцией множества A. Тогда существует элемент $s \in S$, такой, что $\xi_A(T(s)x) > 0$, откуда $\mu(\{\omega \in A : (T(s)x)(\omega) > 0\}) > 0$. Обратно, пусть

$$x^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \xi_{A_i}, \tag{7}$$

где A_i попарно не пересекаются, $\lambda_i > 0$. Для каждого A_i существует s_i, такой, что $\xi_{A_i}(T(s_i)x) > 0$. Следовательно, $x^*(T(s_i)x) > 0$ $(i = 1, \ldots, N)$. Остается заметить, что функционалы вида (7) плотны в конусе неотрицательных функционалов.

Нам понадобится еще следующая

Лемма 5. *Если P — граничный проектор, $x \geqslant 0$ и $Px = 0$, то $x|\operatorname{supp} h = 0$ для всех $h \in \operatorname{Im} P$, $h \geqslant 0$.*

Доказательство. Предположим, что $x|\operatorname{supp} h \neq 0$, т. е. существует подмножество $A \subset \operatorname{supp} h$, такое, что $\mu(A) > 0$ и $x(\omega) > 0$ $(\omega \in A)$. Положим $A_1 = \{\omega \in A : x(\omega) \geqslant h(\omega)\}$, $A_2 = \{\omega \in A : x(\omega) \leqslant h(\omega)\}$. Поскольку $A_1 \cup A_2 = A$, то по крайней мере одно из этих подмножеств имеет положительную меру. Пусть $\mu(A_2) > 0$. Положим

$$\hat{x}(\omega) = \begin{cases} x(\omega), & \omega \in A_2, \\ 0, & \omega \bar{\in} A_2. \end{cases}$$

Тогда $0 \lneqq \hat{x}(\omega) \leqslant x(\omega)$, поэтому $P\hat{x} = 0$. Следовательно, $P(h - \hat{x}) = h$. Поскольку $\|P\| = 1$, то $\int_\Omega h(\omega)^p d\mu \leqslant \int_\Omega (h(\omega) - \hat{x}(\omega)^p d\mu = \int_{A_2} (h(\omega) - \hat{x}(\omega)^p d\mu + \int_{\Omega \setminus A_2} h(\omega)^p d\mu$.

Отсюда $\int\limits_{A_2} h(\omega)^p d\mu \leqslant \int\limits_{A_2} (h(\omega) - \hat{x}(\omega)^p d\mu$, что невозможно. Если теперь $\mu(A_1) > 0$, то достаточно рассмотреть функцию

$$\hat{x}(\omega) = \begin{cases} h(\omega), & \omega \in A_1, \\ 0, & \omega \bar{\in} A_1 \end{cases}$$

и повторить предыдущее рассуждение. Лемма 5 доказана.

Следствие. *Если T — слабо положительное представление, $x \geqslant 0$ и $Px = 0$, то $x = 0$.*

Теорема 4. *Для того чтобы представление T класса N было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было эргодическим и слабо положительным.*

Доказательство. Пусть T неразложимо, но не слабо положительно. Это означает, что существует подмножество $A \subset \Omega \diagdown \diagdown \operatorname{supp} T$ такое, что $\mu(A) > 0$. Если $x \in B_1$, $x \geqslant 0$, $x \neq 0$, то $x \mid A = 0$ в силу (5). Тем самым $T(s)x \mid A = 0$ $(s \in S)$. Это противоречит лемме 4.

Пусть T неэргодично. Тогда в силу теоремы 3 подпространство инвариантных функций имеет размерность, большую чем 1. Поскольку сужения $T(s) \mid B_1$— порядковые изоморфизмы, существуют две неотрицательные инвариантные функции h_1, h_2 с непересекающимися носителями. Рассмотрим подмножество $I = \{x : x \in B, \ \exists N : |x| \leqslant \leqslant Nh_1\}$ и возьмем неотрицательный функционал $x^* \neq 0$, такой, что $x^* \mid I = 0$. Так как множество I инвариантно относительно T, то для всех $s \in Sx^*(T(s)h_1) = 0$. Это противоречит неразложимости T.

Пусть теперь представление T слабо положительно и эргодично. Тогда, если $x \geqslant 0$ и $Px = 0$, то в силу следствия леммы 5 $x = 0$. Если T не неразложимо, то существуют по лемме 4 функция $x \underset{+}{>} 0$ и подмножество $A \in \Sigma$, такое, что $\mu(A) > 0$ и $\xi_A(T(s)x) = 0$ $(s \in S)$ (8).

Отсюда $\xi_A(T(s)Px) = 0$, $Px \neq 0$. Итак, мы можем в равенстве (8) предположить, что $x \in B_1$. Пусть α — соответствующее действие ядра Сушкевича K автоморфизмами на $(\Omega, \Sigma_1, \hat{\mu})$. Тогда из (8) следует, что $\int\limits_A x(\alpha_g(\omega) d\mu = 0$ $(g \in K)$, т. е. $x \mid \alpha_g(A) = 0$ п. в. Так как α — эргодическое действие, то отсюда $x = 0$, вопреки условию. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть χ — унитарный вес неразложимого представления T класса N. Тогда представления $s \to T(s)$ и $s \to \chi(s)T(s)$ изометрически эквивалентны.*

Доказательство основывается на теоремах 3, 4. Поскольку T неразложимо, то $\operatorname{supp} T = \Omega$. Пусть $x(\omega)$ — весовая функция, соответствующая χ. По теореме 3 $|x(\omega)|$ пропорциональна неотрицательной канонической инвариантной функции h. По теореме 1 можно считать, что $|x(\omega)| \equiv 1$. Оператор умножения на функцию x является обратимой изометрией и сплетает представления $s \to T(s)$ и $s \to \to \chi(s)T(s)$, что и требовалось доказать.

* Аналогично [3, 4] это утверждение можно назвать «теоремой о повороте».

3. Пусть T — неотрицательное представление класса N, K — его ядро Сушкевича, α — действие группы K^* на ($\operatorname{supp} T$, Σ_1, $\hat{\mu}$), порожденное T. Пусть A — эргодическая компонента действия α, т. е. A инвариантно, $\hat{\mu}(A) > 0$ и сужение α на A эргодично. Эргодическая компонента действия α будет называться эргодическим классом представления T. С каждым эргодическим классом А связано подпредставление $(\alpha_A^*(V)x)(\omega) = x(\alpha_V(\omega))$, $(V \in K, \ \omega \in A)$ в пространстве $L_p(A, \Sigma_1, \mu)$. Его естественное поднятие на полугруппу S называется субэргодической компонентой представления T, отвечающей эргодическому классу A. Для каждой функции $x \in L_p(A, \Sigma, \mu)$ функция $\hat{h}^{-1}Px = \hat{P}\hat{h}^{-1}x$ принадлежит $L_p(A, \Sigma_1, \hat{\mu})$. Определим теперь представление T^A, действующее в $L_p(A, \Sigma, \mu)$, следующим образом: $(T^A(V)x)(\omega) = \hat{h}(\alpha_A^*(V)h^{-1}Px)(\omega)$.

Его поднятие на S, которое обозначается также, называется эргодической компонентой представления T, отвечающей эргодическому классу A. Из теорем 3, 4 непосредственно следует

Теорема 6. *Для каждого эргодического класса A представление T_A — неразложимое.*

Следствие. *Для каждого представления T класса N его граничный спектр представляет собой объединение подгрупп группы одномерных унитарных характеров ядра Сушкевича.*

Выражаю благодарность профессору Ю. И. Любичу за ценные обсуждения работы.

Список литературы: 1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 632—636. 2. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Отщепление граничного спектра для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 45.— С. 63—80. 3. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп.— Х., 1985.— 144 с. 4. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Теория Перрона-Фробениуса для почти периодических операторов и представлений полугрупп // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 46.— С. 60—80. 5. *Schaefer H. H.* Banach lattices and positive operator.— Berlin — New York: Springer-Verlag.— 1974.— 500 P. 6. *Lamperti J.* On the isometries of certain functional spaces // Pacific I. Math.— 1958.— 8, N 3.— P. 459—466. 7. *Ionescu Tulcea A.* Ergodic properties of isometries in L^p spaces, $1 < p < \infty$ // Bull. Amer. Malh. Soc.— 1964.— **70**, N 3. P. 366—371. 8. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры // Мат. сб.— 1949.— **25**, № 1.— С. 107—150. 9. *Корнфельд И. П.* и др. Эргодическая теория / И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин.— М., 1980.— 384 с.

Поступила в редколлегию 16.03.86

* Мы опускаем индекс T для краткости записи.