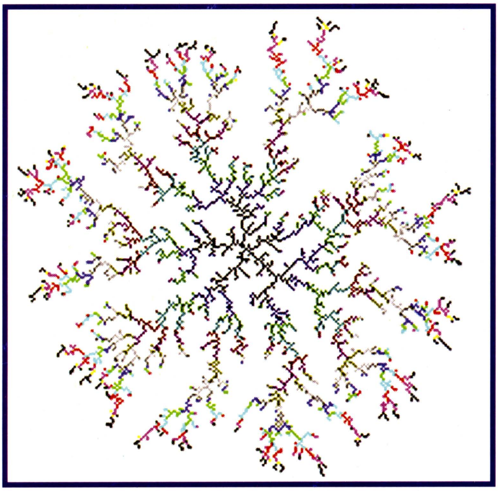
К 200-летию Харьковского университета

Е. Н. Синельник, В. В. Ульянов

ФРАКТАЛЫ

ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ



Харьков – 2005

К 60-летию кафедры теоретической физики

Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов

ФРАКТАЛЫ

ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ

Харьков 2005

УДК 530.1
ББК 22.31
С 38

Синельник Е.Н., Ульянов В.В. Фракталы: от математики к физике. - Харьков: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2005. - 52 с.

Книжка продолжает серию монографий и учебных пособий, приуроченную к 200-летию Харьковского университета и физического факультета, а также 60-летию кафедры теоретической физики. Она может служить учебным пособием по соответствующему спецкурсу.

Это короткий рассказ о фрактальных объектах и явлениях, рассчитанный на достаточно широкий круг лиц, интересующихся новыми представлениями в математике и физике.

К пособию прилагается компакт-диск с оригинальными компьютерными разработками авторов.

Рецензент –
доктор физ.-мат. наук, профессор А.М.Ермолаев.

Издается по решению кафедры теоретической физики
(протокол № 4 от 15 апреля 2004 года).

ISBN 966-623-315-0

П Р Е Д И С Л О В И Е

Трудно найти человека, равнодушного к фракталам.
Б.Мандельброт

Книга была задумана давно, после знакомства с поразившими меня фрактальными образованиями, описанными в журнале “В мире науки”. Это было почти два десятилетия назад. Тогда же мною были созданы и первые программные разработки на фрактальную тему на персональных компьютерах первых поколений. С тех пор появилось много работ этого направления, а также книг. Однако идея создания компактного пособия, содержащего краткое описание как математических аспектов мира фракталов, так и физических, не покидала меня.

И вот, кажется, появилась возможность ее реализации. Моя дипломница Елена Николаевна Синельник согласилась поработать над этой темой. Конкретные задания ей заключались, в частности, в подготовке ряда построений фрактальных объектов на основе компьютерного моделирования. Во-первых, это демонстрация фрактальных картин в окрестностях границ множества Мандельброта. Во-вторых, изучение явлений фрактального роста, получивших название ограниченной диффузией агрегации (ОДА), где представляют интерес как сам процесс формирования дендритных образований, так и окончательный результат в виде разнообразных форм красочных ветвистых построений. Если в первом случае мы имеем дело с чисто математическим фрактальным объектом, то ОДА служит примером явления явно физического типа.

Пособие содержит оригинальные компьютерные программы авторов и рассчитано на достаточно широкий круг читателей.

Замечания и предложения будут приняты с благодарностью.

Особую признательность выражаю Александру Михайловичу Ермолаеву за неизменную поддержку, Олегу Викторовичу Усатенко за снабжение меня редкой литературой и Николаю Владимировичу Ульянову за постоянную помощь.

Июнь 2005 года В.В.Ульянов

В В Е Д Е Н И Е

В 1975 году я придумал термин фрактал.

Б.Мандельброт

В данной книжке рассматривается современное представление о так называемых фрактальных объектах, первоначально возникших в трудах математиков. Последняя четверть прошлого века внесла много новых представлений в научный обиход. Среди них – фракталы. Французский математик Бенуа Мандельброт, работающий в США, – создатель теории фракталов, энтузиаст и пропагандист фрактальной идеи – ввел одно из красивейших построений, получившее название множества Мандельброта. Сюда же примыкает ряд других фрактальных объектов математического направления.

Происхождение термина ФРАКТАЛ обычно связывают с латинскими словами fractio – разламывание и fractus – изломанный, а также с английским fraction – дробь, осколок, разрыв. В связи с этим описания фрактальных свойств объектов и явлений сопровождаются такими эпитетеми, как дробный, ломаный, рыхлый, перистый, обтрепанный, изрезанный, рваный, изломанный, раздробленный, негладкий, нерегулярный, беспорядочный, извилистый, ветвистый, зигзагообразный.

Одной из особенностей фракталов является в определенном смысле их *самоподобие*. Кроме того, еще одной отличительной чертой является *дробная размерность*. Вот что писал Мандельброт об определении понятия фрактал:

Однако я не стал приводить математическое определение, чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет "разлито по бутылкам". Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моем представлении обладали свойством быть "нерегулярными, но самоподобными". Слово "подобный" не всегда имеет классический смысл "линейно *увеличенный или уменьшенный", но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова "похожий".*

Б.Мандельброт

Развитие идей фрактальной геометрии идет по линии математических и теорфизических расчетов, компьютерных исследований с применением аналитических, численных и графических методов, физического эксперимента и природных наблюдений. Оказалось, что в природе очень многие явления фактически имеют фрактальный характер. Нас окружают фракталы. Фрактальные подходы вторгаются во многие области физики, химии, биологии, медицины, социологии, экономики. Мы живем в эпоху фракталов.

Желание придерживаться принципа, провозглашенного в названии нашей книжки, определило выбор обсуждаемых вопросов и разделение ее содержания на две основные части: «От математики» и «К физике». Соответственно в первой части рассматриваются некоторые математические построения фракталов, а вторая часть посвящена физическим приложениям, среди которых важное место занимают так называемые фрактальные кластеры, описываемые, в частности, моделью ограниченной диффузией агрегации.

Говоря о цели данной книжки, следует подчеркнуть, что имеется в виду не только рассказ о некоторых фракталах, но и показ компьютерных разработок, позволяющих читателю наблюдать и *исследовать* различного рода фрактальные объекты. Кроме того, красочные иллюстрации фрактальных построений и экранных картин должны побудить интерес читателя к более серьезному проникновению в мир фракталов, стимулировать его к самостоятельной творческой работе.

Фракталы, безусловно, оригинальны настолько,
насколько это вообще возможно.

Б.Мандельброт

ОТ МАТЕМАТИКИ

МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА

Похоже, что искусство и наука сливаются воедино в множестве Мандельброта.

А.К.Дьюдни

Множество Мандельброта – типичный объект моделирования на персональных компьютерах. Красочные картинки, сопровождающие построение этого множества на экране графического дисплея, чрезвычайно разнообразны и поражают воображение.

Множество Мандельброта (ММ) – это множество всех комплексных чисел P, для которых абсолютная величина выражения $Z^2 + P$ остается конечной даже после бесконечно большого количества итераций $Z \leftarrow Z^2 + P$, стартующих от точки $Z = 0$, или

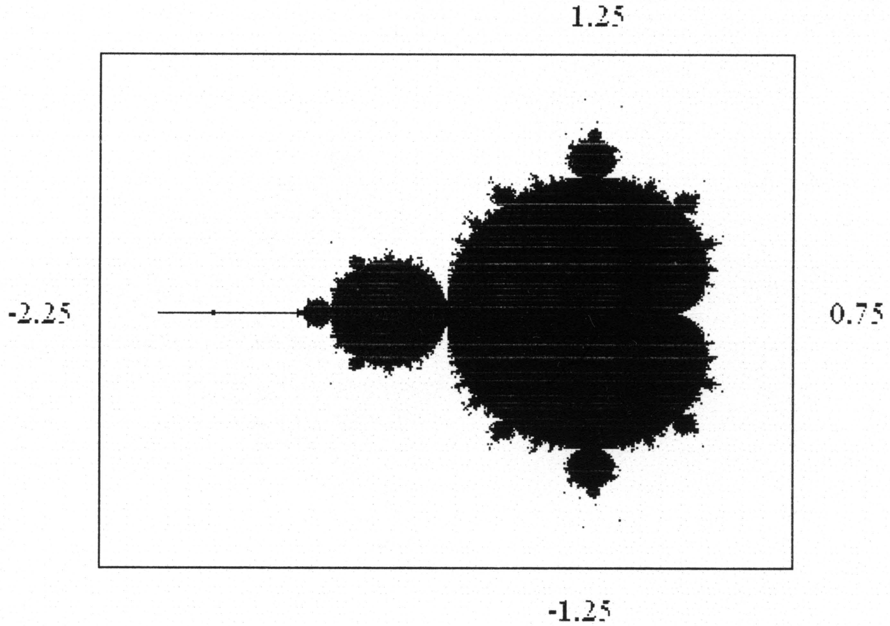
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + P, \ Z_0 = 0, \ n = 0,1,2,\dots \ . \qquad (1)$$

Если перейти к действительным величинам, когда $Z = X + iY$ и $P = P_x + iP_y$, то получаем двумерное отображение вида

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + P_x \ ,$$
$$Y_{n+1} = 2X_nY_n + P_y, \ \ X_0 = 0, \ \ Y_0 = 0 \ . \qquad (2)$$

Важным дополнением при практической реализации этого итерационного процесса служит доказанная математиками теорема [9] о том, что точки P, для которых модуль Z при итерациях оказывается равным или больше 2, не принадлежат ММ. Кроме того, фактически для проверки на принадлежность точек ММ достаточно сотни итераций (в случае не очень больших увеличений изображения – несколько сотен).

Существуют различные родственные ММ множества. Так, при выборе в итерационной формуле (1) стартовой точки $Z_0 \neq 0$ получаются многочисленные деформированные ММ, однако такие модификации в сравнении с каноническим ММ оказываются менее интересными, так что в дальнейшем, говоря о ММ, будем иметь в виду именно каноническое ММ. На прилагаемом рисунке, где $-2.25 < P_x < 0.75$ и $-1.25 < P_y < 1.25$,



видим типичную картинку ММ:

Неискушенному читателю трудно поверить, что столь простые математические соотношения (1)–(2), порождающие это изображение ММ, таят в себе неисчерпаемый запас любопытных возможностей при визуализации его фрагментов. Тем не менее, по мнению Дж.Х.Хаббарда, «ММ является самым сложным объектом в математике» [9]. Вот что пишет А.К.Дьюдни о ММ [11]: «Его поразительная сложность может символизировать развивающиеся сейчас отрасли науки, изучающие свойства хаоса и динамических систем. Люди, даже не посвященные в реальное физическое значение этого “объекта”, ощущают причудливую красоту его темного ядра и усыпанного “драгоценными камнями” ореола».

Множество Мандельброта состоит из основного тела (ядра), представленного на рисунке, и пронизывающих комплексную плоскость тонких нитей, волокон, волосков, отходящих от ядра и содержащих миниатюрные копии ядра (почки) и ему подобные образования, однако эти внеядерные детали видны только при достаточно большом увеличении. ММ является связным множеством [9].

Как видно, основное тело ММ состоит из главной части, ограниченной кардиоидой, к которой присоединен круг. К нему, в свою очередь, прилегает меньший круг, от которого отходит отрезок прямой (антенна). Все это в огрубленном приближении, поскольку граница ММ не является резкой. Она явно фрактальна даже при малом увеличении, содержит многочисленные наросты-бородавки различной величины с усиками-антеннами, и даже незначительное увеличение позволяет увидеть исключительную изрезанность границы. Можно сравнить общий вид основного тела ММ с распластанной фигурой птицы с длинным тонким клювом, имеющим небольшой закругленный нарост у круглой головы, сидящей на кардиоидном туловище. Подобные основному телу фигурки встречаются в разных ответвлениях ММ, хотя они часто имеют несколько искаженную форму (главное же тело симметрично относительно горизонтальной оси).

Даже в черно-белом варианте и основное тело ММ, и различные увеличенные его фрагменты имеют причудливые формы, сулящие своим разнообразием интересные особенности внутренних закономерностей структуры. Что уж говорить об удачных расцветках фрагментов ММ при разной степени увеличения. Многим исследователям удалось обнаружить поражающие воображение интересные фрагменты ММ. В серии популярных статей [9-11, 13] подробно излагаются алгоритмы построения ММ с помощью компьютера и принципы раскраски в зависимости от числа итераций, так что любой читатель может быстро овладеть навыками изучения ММ – неисчерпаемого хранилища удивительных изображений.

Еще раз следует подчеркнуть, что к множеству Мандельброта относятся только закрашенные черным цветом точки на рисунках, хотя часто говорят обо всем расцвеченном изображении как о множестве Мандельброта.

Заметим, что возможны различные варианты цветовой палитры для раскрашивания на экране областей комплексной плоскости вокруг ядра ММ. Часто используются 16 основных цветов, хотя неплохие результаты дает применение лишь некоторых из них. Другой вариант – выбор определенной части полноцветного RGB-спектра. Какой раскраске отдать предпочтение, зависит во многом от вкуса наблюдателя. Раскрашивание существенно влияет на эстетическое восприятие возникающих картинок.

В качестве примера многоцветных разновидностей окраски на стр. 34 приведены изображения множества Мандельброта и некоторых его аналогов (см. также различные варианты цветового оформления фрагментов ММ на стр. 39 и 40).

На прилагаемом к нашей книжке компакт-диске имеются компьютерные разработки, с помощью которых можно ближе познакомиться с интересными фрагментами ММ *не в статическом режиме, а в виде анимаций.*

Во-первых, файл MANDEL_ANIM_1 дает возможность пользователю совершить путешествия в глубины ММ в окрестностях интересных точек комплексной плоскости, где таятся удивительные сокровища ММ. На экране монитора в левом окошке мы видим стандартное изображение основного тела ММ с указанием 5 выделенных прямоугольниками областей, которые можно выбирать с помощью переключателей в центре экрана. В правом окошке демонстрируется соответствующий мультфильм о «заныривании» в выбранную область (кнопка Start запускает анимацию). При помощи кнопки Pause можно на несколько секунд остановить просмотр на нужном кадре, а кнопка Exit (как и стандартные кнопки полосы заголовка) завершает сеанс и закрывает окно.

Вам не потребуется снаряжение для подводного плавания, не нужны ни маска с дыхательной трубкой, ни ласты. Лишь человеку с ослабленным зрением советуем хорошенько протереть стекла своих очков. И вот, словно в глубоководном батискафе, мы погружаемся в пучину ММ, чтобы наблюдать прелестные пейзажи и диковинные узоры, напоминающие завитушки морских коньков, ежей и звезд, экзотических медуз и причудливых водорослей. Здесь же попадаются и затейливые узоры на хвосте павлина, и раскидистая корневая система необычного дерева. На стр. 35 показан экран монитора во время сеанса этого мультфильма.

Укажем координаты ($P_x + i P_y$) тех пяти точек комплексной плоскости, вблизи которых расположены выбранные области наблюдений: -0.74691+i 0.10725; -1.2507+i 0.0201; -1.62725+i 0; 0.28343+i 0.010255; -0.74198-i 0.143297. Размеры областей $\sim 10^{-4}$.

Одна из целей нашей демонстрации – побудить читателя самому создать аналогичную компьютерную разработку, чтобы отыскивать места вблизи фрактальных берегов «водоема» ММ с необычными подводными ландшафтами и обитателями подводного мира в их естественной среде (как в статическом режиме, так и в анимации).

Во-вторых, файл MANDEL_ANIM_2 позволяет совершить увлекательные путешествия вдоль границы основного тела ММ на некоторой «глубине», чтобы полюбоваться красотами фрактальных узоров. При этом можно выбрать с помощью переключателей один из двух маршрутов и направлений на них. Кнопки Fast и Slow регулируют скорость движения, красная точка в левом окошке отмечает место, к которому относится демонстрируемый в правом окошке кадр. Другие видимые на экране элементы уже знакомы по описанию предыдущего файла.

Открывающиеся картины должны напомнить читателю страницы романа Жюля Верна «20 тысяч лье под водой». Вы уподобляетесь профессору Аронаксу, взирающему сквозь большой иллюминатор «Наутилуса» и наблюдающему бахрому изрезанной границы ММ с диковинными щупальцами-протуберанцами и россыпью коралловых ожерельев. На стр. 36 можно увидеть экран во время этой анимации.

Разумеется, что пытливый читатель сможет усовершенствовать наш «подводный аппарат», снабдив его рулями глубины и поворота, чтобы отклоняться от выбранного маршрута и опускаться в понравившихся местах.

> *В поле зрения попадают всё новые области, напоминающие какие-то ландшафты, и всегда можно ещё больше увеличить изображение, чтобы исследовать более глубокие пласты структурных возможностей.*
>
> *Г.Франке* [2]

Подробному *изучению* ММ посвящены программы MANDEL_04 и MVideo, которые описаны в Приложении.

О литературе по теме ММ. Во-первых, начинающему читателю можно рекомендовать серию популярных статей в журнале «В мире науки» [9-11, 13]. Во-вторых, более серьезные исследования содержатся в книге «Красота фракталов» [2]. Наконец, отдельные разделы, посвященные ММ, имеются в специальных книгах различного уровня сложности [1, 5-7]. Речь идет как о чисто математических аспектах, так и о компьютерном моделировании. О различных обобщениях итерационных построений см. в [5, 10, 14, 23]. На стр. 34 можно увидеть несколько примеров таких аналогов ММ.

Далее мы познакомим читателя с так называемыми множествами Жюлиа, связанными с множеством Мандельброта.

МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА

Появились признаки того, что всё это когда-нибудь сложится в единую картину.

Б.Мандельброт

Для квадратичного отображения множество Жюлиа (МЖ), характеризуемое некоторой комплексной величиной P (управляющим параметром), – это множество тех комплексных чисел Z, для которых абсолютная величина выражения $Z^2 + P$ остается конечной даже после бесконечно большого количества итераций $Z \leftarrow Z^2 + P$, стартующих от точки Z, или

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + P, \quad Z_0 = Z, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad (3)$$

Переходя к действительным величинам, когда $Z = X + iY$ и $P = P_x + iP_y$, получаем двумерное отображение вида

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + P_x,$$

$$Y_{n+1} = 2X_nY_n + P_y, \quad X_0 = X, \quad Y_0 = Y. \quad (4)$$

Таким образом, каждому комплексному числу P соответствует одно из множеств Жюлиа. На рисунках обычно закрашивают черным цветом области комплексной плоскости Z, принадлежащие данному множеству Жюлиа. Строго говоря, множеством Жюлиа является граница такой области, а вся область – это *наполненное* множество Жюлиа (часто всю картинку комплексной плоскости называют МЖ). Так, при $P = 0$ МЖ является единичная окружность. Замечания по поводу практического воспроизведения МЖ аналогичны приведенным относительно ММ.

Существует тесная связь между множествами Жюлиа и множеством Мандельброта. Во-первых, их построение реализуется формально одной и той же итерационной формулой

$$Z \leftarrow Z^2 + P,$$

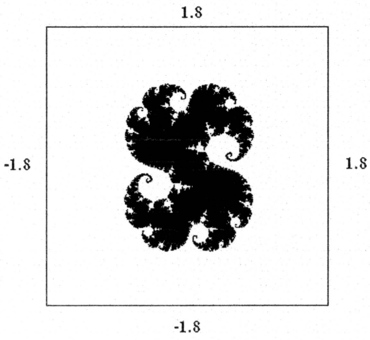
однако множества Жюлиа порождаются при некотором фиксированном значении величины P и для начальных значений итерируемых величин Z выбираются различные точки комплексной плоскости, тогда как для множества Мандельброта фиксируется исходное значение Z (каноническому ММ соответствует $Z = 0$), а величины P соответствуют точкам комплексной плоскости.

Во-вторых, отбор принадлежности множеству получающихся точек в комплексной плоскости идет по одинаковому признаку.

В-третьих, связность МЖ определяется положением управляющего параметра P: если точка P принадлежит множеству Мандельброта, то соответствующее множество Жюлиа будет связным, или однокомпонентным (как и само ММ), в противном случае – несвязным, или многокомпонентным («пыль Фату») [5,9,13]. При построении конкретных МЖ получаются удивительные формы этих двух видов.

По словам Б.Мандельброта, одним из учителей которого был Гастон Жюлиа, чьи работы (а также Пьера Фату) по множествам, ныне носящим его имя, относятся к 1918 году, «практически все множества Жюлиа оказались чрезвычайно красивыми».

Вот одна из типичных форм связного МЖ в виде «дракона», соответствующего значениям $P_x = 0.2733$ и $P_y = 0.0074$, где $-1.8 < X < 1.8$ и $-1.8 < Y < 1.8$:



На стр. 42 приведены также некоторые другие примеры множеств Жюлиа в таком же масштабе (там под каждым изображением указаны значения соответствующих P_x и P_y). Этой же демонстрации посвящен и файл JULIA_SETS.

Файл JULIA_ANIM_3

создан для показа еще одного анимационного фильма о путешествии по некоторым линиям в комплексной плоскости с изображением множества Мандельброта. Как уже отмечалось, в этом случае каждой точке комплексной плоскости соответствует некоторое множество Жюлиа, которое будет связным внутри ММ и несвязным вне ММ.

Таким образом, путешествие позволяет познакомиться с различными видами МЖ и переходами от однокомпонентных к многокомпонентным их структурам. Управляющие элементы этой прикладной программы уже знакомы пользователю по соответствующим анимациям для ММ. На стр. 41 видим экран монитора во время сеанса этого мультфильма.

Подробному *изучению* различных МЖ посвящены программы JULIA_05 и MVideo, о которых будет рассказано в Приложении.

На этом мы заканчиваем рассмотрение чисто математических примеров фрактальных структур. Добавим, что широко известные более простые геометрические построения фрактальных объектов типа кривой Коха, ковра Серпинского, множеств Кантора и др. мы затрагивать не будем, хотя на их примерах обычно наглядно демонстрируется дробная размерность фракталов (так называемая размерность Хаусдорфа-Безиковича).

Знакомство с МЖ можно начинать с популярного изложения основ в статье А.К.Дьюдни «О множестве Мандельброта и множествах Жюлиа» [10], а затем переходить к более серьезной книге «Красота фракталов» [2]. Об упомянутых других фрактальных объектах, их дробных размерностях и о мультифракталах см. [1,3, 6, 8], а о связи фракталов Мандельброта и Жюлиа с общей теорией динамических систем читайте в [2, 5].

Далее мы переходим ко второй части нашего пособия, посвященной физическим фрактальным объектам.

ФРАКТАЛЫ В ФИЗИКЕ

Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности.
Б.Мандельброт

Природа изобилует фракталоподобными структурами. Очертания деревьев, облаков и гор, линии берегов морей и рек, разломы земной коры, ледяные узоры на оконном стекле, молнии, – описание сложности всех этих и многих других природных объектов и явлений достигается на основе идей *фрактальной геометрии Мандельброта* [1].

Фракталы находят приложения в химии, в экономике (курсы валют), в биологии (строение объектов), в океанологии, гидрологии, геологии.

Особенно бурно шло проникновение новых воззрений в физику: от фрактальных границ, поверхностей и структур – к физическим свойствам и характеристикам движения, к микромиру и фрактальной структуре пространства-времени.

Мандельброт придумал очень удачный термин «фрактал». Во многом именно название предопределило популярность и широкое распространение новой геометрии. В этом отношении понятие «фрактал» можно сопоставить с другим кратким, звучным и емким термином «солитон».

Как сказано в [6], «В области физики фракталы используются при описании хаотического поведения нелинейных динамических и диссипативных систем, турбулентности в жидкости, неоднородного распределения материи во Вселенной, трещин и дислокаций в твердых телах, электрического пробоя, диффузии и агрегации частиц, роста кристаллов».

Быстро произошел переход от математических построений разного рода фракталов к физическим приложениям, нашедшим отражение в отечественных обзорных статьях. Отметим одну из первых таких работ [24], в которой не только поясняются основные понятия фрактальной геометрии, но и рассматривается применение фрактальных подходов к описанию физических систем (в гидродинамике, общей теории относительности и др.).

Большая обзорная статья [26] посвящена использованию фракталов в физике конденсированных сред. В ней подчеркивается важность наглядного изображения столь абстрактного понятия как фрактал, рассматриваются простейшие фрактальные множества Коха и Кантора, приводятся основные характеристики мультифрактальных множеств, экспериментальные методы нахождения фрактальной размерности. Показано, что описание рассмотренных систем приводит к концепции дробных производных и интегралов.

В другом большом обзоре о фракталах в волновых процессах [27] рассказывается о распространении волн во фрактальных структурах, об излучении и рассеянии волн фрактальными структурами, а также описываются фрактальные структуры в самих волновых полях. Подчеркивается важная мысль, что «фрактальные модели не только широко применяются к описанию вполне исследованных ранее процессов и структур... и, в этом смысле, не являются необходимыми, но и позволяют продвинуться в исследовании объектов, ранее не поддававшихся пониманию и количественному описанию».

В нашей стране одной из первых книг по применению фракталов в физике явился сборник статей [23], охватывающий многие области физики, в которых обнаружены фрактальные структуры – от квантовой теории поля и статической физики до турбулентности и хаоса в динамических системах. В книге [28] имеется раздел «Фрактальные понятия в нелинейной динамике», в котором подробно описываются связи теории фракталов с проблемами нелинейной динамики, обсуждаются различные фрактальные структуры, характеристики их размерности и методы их нахождения. Самоподобие, повторяемость, масштабная инвариантность, скейлинг (лат. scala - лестница, англ. scale - масштаб) – основная тема книги [7]. В ней находим такие слова; «Самоподобие, или инвариантность при изменении масштабов или размеров, присуще многим законам природы и бесчисленным явлениям в окружающем нас мире. Более того, самоподобие – одна из важнейших симметрий, играющих формообразующую роль в нашей Вселенной и лежащих в основе наших попыток постичь ее». Термин «фрактальный» относится именно к такому типу симметрии. Из недавно изданных отметим книгу [22], посвященную применениям теории фракталов в радиофизике. Рекомендуем очень хорошую статью [8] с доступным для многих читателей изложением основных идей фрактальной геометрии и ее применений.

Среди физических объектов особое место занимают так называемые фрактальные кластеры (от английского слова cluster – скопление, гроздь). Им посвящена книга [4]. Они составляют один из классов фрактальных объектов, возникающих при слипании твердых частиц. Они образуются также во многих явлениях химии и биологии. Примеры фрактальных кластеров: рыхлые и разреженные твердые вещества, пористые вещества – аэрогели и т. п., шероховатая поверхность твердых тел. Шаровая молния имеет структуру фрактального кластера. Наряду с фрактальными кластерами существует ряд подобных фрактальных систем: диэлектрический пробой, «вязкие пальцы», пленки при осаждении и др. Большая часть материала книги [3] также посвящена фрактальным кластерам и подобным им системам. В ней много внимания уделено модели Виттена-Сандера [15] и связанным с нею компьютерным экспериментам. В следующем разделе нашей книги именно модель Виттена-Сандера будет служить предметом обсуждения. Она относится к случайным фракталам и демонстрирует рост фрактального агрегата в условиях случайного блуждания формирующих его частиц, в связи с чем ее называют моделью агрегации, ограниченной диффузией.

ОГРАНИЧЕННАЯ ДИФФУЗИЕЙ АГРЕГАЦИЯ

Роскошь некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости.
Г.Айленбергер

Сделаем несколько вводных замечаний относительно ограниченной диффузией агрегации (diffusion-limited aggregation). Как уже отмечалось, это типичный пример модели физического фрактала. Особенно важно, что здесь демонстрируется древовидная структура *в процессе* ее роста. Отметим литературу [3, 4, 15, 16, 23], в которой описываются подобные построения и все с ними связанное как в теоретическом плане, так и относительно экспериментальных наблюдений при компьютерном моделировании и в природных реализациях подобных структур.

Общий сценарий компьютерного моделирования ограниченной диффузией агрегации (ОДА) в круге: в центре будущего кластера помещается затравочная частица, из случайных точек на окружности начинают блуждание другие частицы до прилипания к непрерывно растущему древовидному кластеру. По мере испускания может меняться цвет частиц, так что ветвистая структура окажется раскрашенной. Процесс заканчивается, когда заданное число частиц или достигнутый предельный радиус завершат образование кластера.

О некоторых деталях при моделировании ОДА. Во-первых, испускается каждая новая частица из случайной точки окружности, радиус которой больше радиус фрактала (эта разность радиусов служит одним из регулируемых параметров в коде программы, но в исполняемом файле она фиксирована). Во-вторых, случайное блуждание частиц осуществляется в 8 направлениях (вверх, вниз, влево, вправо и по четырем диагональным направлениям). В-третьих, если частица при блуждании выходит за пределы окружности испускания, то начинает движение новая частица. Насколько частица выходит за указанную границу, это также служит еще одним регулируемым параметром.

Фракталы ОДА характеризуются дробной размерностью, которая является количественной мерой заполнения ими занимаемого пространства.

В процессе построения фрактала идет вычисление экспериментального значения размерности, которая наглядно сопоставляется с теоретической.

Краткое описание прилагаемой программной разработки в виде файла DLA_1, которая демонстрирует *процесс* построения ограниченной диффузией агрегации (ОДА).

В центре экрана располагается круглая область, в которой наблюдается рост кластера. Под ней имеются три кнопки: левая (Start) запускает процесс роста, средняя (Pause) останавливает процесс на несколько секунд, правая (Exit) предназначена для окончания работы приложения (для этих же целей служат стандартные кнопки в полосе заголовка).

В правой части экрана находится вертикальный ряд переключателей для выбора цвета частиц, из которых строится кластер (цвет указывает на время прилипания частиц в процессе роста кластера). Нижний переключатель (включен по умолчанию) дает автоматическое окрашивание строящегося фрактала последовательными цветами.

Слева вверху в окошках выводятся текущие значения числа частиц фрактала (N), его радиуса (R) и размерности (D). Ниже в прямоугольном окне синим цветом строится кривая зависимости числа частиц от радиуса фрактала в дважды логарифмической шкале, что наглядно изображает размерность кластера по тангенсу угла наклона такой кривой. Красная линия отвечает теоретическому значению размерности 1.71 и может смещаться в сторону экспериментальной кривой при нажатии маленькой кнопки рядом с этим окном. Наконец, слева внизу имеются сведения о создании этой компьютерной разработки одним из авторов данной книжки. На стр. 46 виден результат построения фрактала (копия снята с экрана монитора).

О размерности фрактального кластера. В соответствии с общей формулой [3] зависимости числа частиц N кластера от его радиуса R, т. е. радиуса окружности, в которую он вписан,

$$N = aR^D \text{, или } \ln N = \ln a + D \ln R, \tag{5}$$

имеются два варианта нахождения размерности D. Во-первых, качественно, как уже упоминалось выше, сопоставлением с теоретическим значением тангенса угла наклона прямой линии для зависимости $\ln N$ от $\ln R$. Во-вторых, количественно на основе серии k случайных точек для логарифма числа частиц $y_k = \ln(N_k)$ и для логарифма радиуса $x_k = \ln(R_k)$ методом так называемой линейной регрессии по формуле

$$D = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{xx} - \overline{x} \cdot \overline{x}}, \tag{6}$$

где черта сверху обозначает усреднение, т. е. сумму значений данных величин (y_k или x_k), деленную на число этих величин. При этом прямая линия $y = Dx + b$ минимизирует средний квадрат расстояний между y_k и y.

Помимо описанного, в прилагаемых компьютерных разработках мы демонстрируем построения ОДА из частиц, образованных несколькими пикселами: из 9 точек – файл DLA_9 и из 37 точек – файл DLA_37 (см. картинки с экрана монитора на стр. 45), а также реализован еще один вариант построения ограниченной диффузией агрегации в программе Cluster, о которой расскажем в Приложении.

Добавим, что существуют различные модификации модели Виттена-Сандера. Так, вводится некоторая вероятность прилипания частиц к кластеру; учитывается возможность временного слипания; рассматривается блуждание частиц только вверх-вниз и вправо-влево, но не по диагонали, то же относительно прилипания к кластеру; в круге рост кластера идет не от центра, а к центру; кластер выращивается в прямоугольной области и т. п.

Кроме того, можно вводить анизотропию за счет различных вероятностей слипания в разных направлениях и в виде так называемого случайного дождя.

Используется также подобная модель кластеризации в схеме кластер-кластер, когда случайно движущиеся частицы, встречаясь, образуют многочисленные затравки, которые постепенно вырастают в небольшие кластеры, чтобы затем объединиться в более крупные образования, и т. д.

При компьютерном моделировании фрактальных кластеров и при экспериментах на реальных объектах исследуют не только различные геометрические характеристики агрегатов (размерность, ветвистость и пр.), но и динамику роста.

Многие фрактальные системы, аналогичные фрактальным агрегатам (диэлектрический пробой, вязкие пальцы, полимеры и др.), могут изучаться совместно с ними на основе моделей типа ОДА. Как выяснилось в последнее время, рост городов и развитие сети городского и междугородного транспорта очень напоминает рост фрактальных агрегатов в моделях с ограниченной диффузией [18].

ФРАКТАЛЫ В XXI ВЕКЕ

Понятие «фракталы» захватило воображение ученых, работающих во многих областях науки.
Е.Федер

Бум математический конца 1970-х и начала 1980-х сменился бумом физическим. Повсюду обнаруживались все новые и новые фрактальные системы. Однако задача исследователей состояла не в том, чтобы *приписывать* объектам и явлениям фрактальность, а в том, чтобы *описывать* их с помощью фрактальных теорий. В связи с этим возродился интерес к так называемому дробному исчислению. Интегралы и производные дробного порядка интересовали Лейбница, Эйлера, Лиувилля, Абеля, Римана и других известных математиков прошлого. Дробное интегродифференцирование – целое направление в математическом анализе. Дробные производные и интегралы имеют много приложений. В книге [21] подробно излагаются классические и современные результаты этой теории: обобщение операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложения теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. Эти методы все больше проникают и в физические приложения [22].

Как отмечается в статье [18], в ближайшие десятилетия методы нелинейной динамики, включая фрактальные подходы, войдут в обиход не только медиков и экологов, но и экономистов, социологов, географов

«Геология, гляциология, метеорология, ботаника, биология и зоология, астрофизика, география, земной магнетизм, океанография, геофизика и палеонтология – для всех этих дисциплин здесь открыто широчайшее поле деятельности», – так писал еще до войны знаменитый исследователь Антарктики

Ричард Бэрд. Его слова ныне можно с полным правом отнести к приложениям современной науки о фракталах.

Одним из важных применений фрактальных идей стало фрактальное кодирование изображений: их компактное хранение в виде системы итерируемых функций дает колоссальные эффекты сжатия информации.

Дорога вилась среди торосов, мимо белоснежных гор с ярко-синими пещерами, мерцающими ледяными иглами и снежными обелисками; на подъемах взору открывались изумрудные утесы барьера и дымка, стелющаяся над морем... Дорога была самой красивой на свете, но сумеем ли мы ею воспользоваться...

Р.Э.Бэрд

Сумели. Изрезанная форма природных границ и поверхностей привела к созданию реалистических фрактальных пейзажей [17] – выдающемуся достижению современной компьютерной графики.

Как и мольерову мещанину во дворянстве, нам недоставало надлежащей прозы – существительного фрактал *и прилагательного* фрактальный, *которые мы обрели благодаря Бенуа Мандельброту.* *М.Шрёдер* [7]

В новом веке фрактальность пронизывает все жизненные явления: телевизионные заставки, клипы, комиксы, попсу. Вот типичный пример. В далеком от физико-математической тематики журнале «Вопросы литературы» (2003, № 4) есть критическая статья Е.Е.Прониной «Фрактальная логика Виктора Пелевина». В ней даны общие представления о фракталах и говорится, что фрактальные элементы ныне обнаруживаются в психологии, в сознании, в мотивах творчества писателя В.Пелевина, в русских сказках с повторами. И в качестве итогового замечания читаем ее образное высказывание:

Оказаться вне фрактала невозможно.

П О С Л Е С Л О В И Е

Я льщу себя надеждой, что эти удивительные идеи вскоре будут казаться "естественными" и "неизбежными".

Б.Мандельброт

Вот и закончилось наше краткое путешествие в удивительный мир фракталов. Надеемся, что читатель, впервые узнавший о фракталах, не был разочарован, а тот, кто уже знаком с ними, получил дополнительный стимул самому глубже взглянуть на это причудливое многообразие объектов различной природы.

Мы затронули лишь тонкий слой ныне неисчерпаемой фрактальной темы. Знакомство с фракталами читатель сможет продолжить по книгам и статьям, краткий список которых приведен далее. Особое внимание следует уделить книге Б.Мандельброта [1], в которой авторский полет фантазии и непринужденность изложения сочетаются со строгим математическим подходом и обилием иллюстраций.

Покинув прочную основу традиционной геометрии,
мы оказываемся в зоопарке фрактальных объектов
во всем их разнообразии.

Е.Федер

Особый интерес представляют современные применения фрактальных идей как в физических теоретических построениях, так и в технологических новинках.

Богатый красками мир делается ярче,
и на его фоне становятся еще заметнее
отдельные явления природы.

М.Миннарт

В этом году мы отмечаем 30-летие понятия фрактал. Этой дате, в частности, посвящена данная книжка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. - 656 с.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем.- М.: Мир,1993. -176 с.
3. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991. - 254 с.
4. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. - М: Наука, 1991. - 136 с.
5. Морозов А.Д.,Драгунов Т.Н.,Бойкова С.А.,Малышева О.В. Инвариантные множества динамических систем в Windows. - М.: Эдиториал УРСС, 1998. - 240 с.
6. Божокин С.В., Паршин Д.А.Фракталы и мультифракталы.- Ижевск: НИЦ "Регул. и хаотич. динамика", 2001. - 128 с.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. - Ижевск: НИЦ "Регул. и хаотич. динамика", 2001. - 528 с.
8. Яновский В.В.Фракталы.Возникновение новой парадигмы в физике // Университеты. - 2003. - № 3. - С. 32-47.
9. Дьюдни А.К. Получение изображений самых сложных математических объектов с помощью компьютера-микроскопа // В мире науки. - 1985. - № 10. - С. 80-87.
10. Дьюдни А.К. Множество Мандельброта и родственные ему множества Жюлиа // В мире науки. - 1988. - № 1. - С. 88-93.
11. Дьюдни А.К. Увлекательное путешествие по множеству Мандельброта // В мире науки. - 1989. - № 4. - С. 82-86.
12. Дьюдни А.К. Аффинные преобразования и фрактальные структуры // В мире науки. - 1990. - № 7. - С. 82-86.
13. Юргенс Х., Пайтген Х.-О., Заупе Д. Язык фракталов // В мире науки. - 1990. - № 10. - С. 36-44.
14. Дьюдни А.К. Биоморфы, попкорн и улитки // В мире науки. - 1989. - № 9. - С. 80-84.
15. Сандер Л.М. Фрактальный рост // В мире науки. - 1987. – № 3. - С. 62-69.

16. Дьюдни А.К. Случайное движение и образование фрактальных скоплений //В мире науки.- 1989. - № 2. - С. 78-82.
17. Дьюдни А.К. О фрактальных горах, графтальных растениях и других графических чудесах фирмы Pixar // В мире науки. - 1987. - № 2. - С. 104-109.
18. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. О хаосе и порядке // Наука и человечество. - 1991. - С. 216-230.
19. Ульянов В.В. О моделировании фрактальных явлений // Компьютерные программы учебного назначения. Тезисы докладов II Международной конференции (Донецк, 3-7 сентября 1994 года). - Донецк, ДонГу, 1994. - С. 116.
20. Синельник Е.Н., Ульянов В.В. Фракталы: от математики к физике // Каразінські природознавчі студії. Матеріали міжнародної наукової конференції 14-16 червня 2004 р., м. Харків / Харків: ХНУ ім. В.Н.Каразіна, 2004. - С. 83.
21. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интергалы и производные дробного порядка и некоторые их применения. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.
22. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002. - 664 с.
23. Фракталы в физике. - М.: Мир, 1988.- 672 с.
24. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фрактали, подобие, Промежуточная асимптотика // УФН. - 1985. - Т. 146, в 3. - С. 493-506.
25. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // УФН. - 1986. - Т. 150, - в. 2. - С. 221-255.
26. Олемской А.И., Флат А.Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. - 1993. - Т. 163, - № 12. - С. 1-50.
27. Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Фракталы в волновых процессах // УФН. - 1995. - Т. 165, - № 4. - С. 361-402.
28. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 312 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОПИСАНИЕ ФАЙЛОВ НА КОМПАКТ-ДИСКЕ

Когда оседлаем мы наши машины.

Ю.Визбор

Демонстрационные программные файлы MANDEL_ANIM_1, MANDEL_ANIM_2, JULIA_ANIM_3, JULIA_SETS, DLA_1, DLA_9 и DLA_37 описаны в соответствующих разделах книги. В данном приложении мы расскажем о наших разработках, предназначенных для подробного *изучения* фракталов.

1. Основное внимание уделим программе MANDEL_04, которая позволяет детально *исследовать* множество Мандельброта, его аналоги и модификации, а также сохранять удачные фрагменты в виде графических файлов (общий вид соответствующего рабочего стенда можно увидеть на стр. 37).

Опишем ее возможности несколько подробнее. При открытии файла на экране появляется основное окно со многими управляющими компонентами, которые становятся *доступными после нажатия* кнопки Start.

В левом окошке прорисовывается характерный профиль стандартного канонического множества Мандельброта (ММ) в исходном масштабе (3x3 в P-плоскости) и выбранной по умолчанию некоторой расцветке.

Пункт меню Fractal содержит также другие возможные фрактальные построения аналогов ММ: кубическое отображение Z^3, четверное Z^4 и т. п. Кроме того, справа от окошка имеется круг с красной точкой в центре для выбора итерационного стартового значения Zo с помощью нажатия кнопки мыши, если ее указатель поместить в какую-либо точку внутри круга. Это приведет к некоторому значению Zo, составляющие которого (Xo, Yo) отображаются под кругом, и соответствующей деформации ММ, делая его неканоническим. Таким способом выбирается тип фрактала и его модификация.

Главные действия – масштабирование и перемещение центра изображения – совершаются с помощью мыши. Прежде всего нужно выбрать среди кнопок Scaling требуемую величину масштабирования (лучше всего начинать с небольших увеличений – по умолчанию стоит «1/2», т. е. в P-плоскости линейные размеры уменьшатся в два раза), а затем поместить указатель мыши на изображение в предполагаемый центр новой прорисовки и нажать кнопку мыши. Тотчас же появится фрагмент ММ в выбранном масштабе. Данные о новом центре картинки и масштабе выводятся слева от группы кнопок Scaling.

Далее необходимо следить за выбором максимального числа итераций Nmax с помощью вертикальной шкалы с регулятором-ползунком. По умолчанию заданы 100 итераций, но по мере углубления в пучину ММ нужно *постепенно* увеличивать Nmax. При этом прорисовка происходит после нажатия Start.

Затем можно выбрать вариант цветовой раскраски в пункте меню Color, где имеются различные палитры, включая случайные (Random). Среди них есть палитра Colors, установленная по умолчанию и регулируемая условной горизонтальной шкалой с ползунком. При этом цвет изменяется после нажатия Start, тогда как другие палитры дают эффект сразу.

Когда в результате всех указанных манипуляций, многократно проделанных при разных установках, удается получить интересную картинку фрагмента ММ, ее можно занести в правое окошко Frames щелчком мыши на счетчике кадров. Под каждым кадром указываются параметры картинки (K - тип фрактала; Xo, Yo - его модификация; центр Pxc, Pyc и полуширина dP изображения в P-плоскости). Этим способом собирается блок из 6 рисунков, который можно сохранить выбором Save или Save As... в меню File или скопировать в буфер обмена выбором Copy в меню Edit. Очищается окно Frames кнопкой Clear или выбором Cut в меню Edit (с сохранением в буфере обмена).

Завершить сеанс можно выбором Exit в меню File или в системном меню, а также соответствующей кнопкой полосы заголовка. При этом возникнет подстраховывающее окошко.

Итак, данная разработка позволяет пользователю: выбрать тип фрактала и его модификацию, центр изображения и масштаб в P-плоскости, максимальное число итераций и цветовую гамму, а также зафиксировать результаты исследований в виде блока из 6 кадров с сохранением в графическом файле формата BMP и т. п. Именно с помощью такого рабочего стенда были получены рисунки, приведенные в нашей книжке на стр. 34, 39, 40, 43 и 44. Желаем читателю успехов в самостоятельном поиске увлекательных фрагментов ММ и его аналогов с помощью этого программного файла.

2. Программа JULIA_05 (см. картинку на стр. 38) содержит многие элементы управления, описанные ранее, так что не станем повторяться, а отметим отличия от MANDEL_04. Видно, что добавлено окошко Z-Julia Plane в правой половине формы, отведенной множеству Жюлиа (МЖ). В нем рисуется это множество, соответствующее выбираемому типу множества Мандельброта (на сей раз с помощью счетчика над окошком P-Mandelbrot Plane). По умолчанию МЖ строится сначала для точки P=0 и имеет вид окружности (наполненное МЖ – круг).

Левая кнопка мыши, по-прежнему управляет перемещением и масштабированием ММ, а нажатие *правой кнопки* на изображении ММ фиксирует точку P, для которой строится МЖ. При этом в P-Mandelbrot Plane появляется маленький светлый кружок в указанной точке, а над окошком Z-Julia Plane красным шрифтом указываются ее координаты Px и Py.

Для перемещения и масштабирования МЖ нужно пользоваться *правой кнопкой* мыши в области Z-Julia Plane. При этом надо следить за группами кнопок масштабирования P-Scaling и Z-Scaling, которые связаны между собой.

Независимые цветовые палитры для ММ и МЖ задаются шкалами с ползунками типа Colors. Также независимо устанавливаются предельные числа итераций Nmax.

Интересные картинки множеств Жюлиа можно сохранить выбором Save или Save As... в меню File.

3. Предлагается также программа MVideo, которая позволяет выполнить ряд построений множества Мандельброта и соответствующего ему множества Жюлиа (общий вид дан на стр. 47). Нажатием кнопки «Build» строится множество Мандельброта. На картинке, которая отобразилась на экране, можно выбрать область или точку и рассмотреть ее в большем масштабе, нажав кнопку «Zoom», или просмотреть видеофрагмент углубления в заданную точку или область, нажав кнопку «Film».

Программа позволяет также построить соответствующее множество Жюлиа нажатием на кнопку «Жюлиа».

Выбор цветовой гаммы осуществляется или автоматически, или путем выбора пользователем одной из предложенных палитр.

В окошках PXmin, PXmax, PYmin, PYmax отображаются координаты фрагмента множества, который изображен на экране. Можно задать координаты фрагмента в соответствующих окошках и, нажав на кнопку «Zoom In», получить построение данного фрагмента. С помощью кнопки «Zoom Out» можно вернуться на один шаг увеличения назад.

Раскрашивание ММ происходит в зависимости от количества итераций. С помощью счетчика «Color Count» можно изменять количество цветов заливки, а с помощью счетчика «Set Color» можно выбрать в окошке цвет и заменить его, нажав не кнопку «Change», на любой понравившийся цвет, который выбирается с помощью стандартной палитры.

Кнопка «Reset» служит для очистки введенных или полученных данных и восстановления их исходных значений.

Нажатием на кнопку «Save» Вы можете сохранить понравившееся изображение обоих множеств в формате *.bmp. С помощью счетчика «t» можно регулировать временную задержку между кадрами при просмотре фильма.

4. Программная разработка Cluster создана для изучения ограниченной диффузией агрегации. Она позволяет построить кластер из произвольного количества частиц. В окошке (см. стр. 48) «Количество частиц» пользователь может указать желаемое число испускаемых частиц. В окошке «Размер частиц» задается размер частицы кластера. С помощь счетчика «Вероятность» можно задать вероятность присоединения частицы к кластеру в случае ее приближения вплотную.

После нажатия на кнопку «Старт» начинает производиться построение, которое можно остановить («Стоп»).

В строке состояния отображается размерность полученного кластера и количество присоединившихся частиц. Нажатием на кнопку «Сохранить» Вы можете сохранить получившееся изображение в формате *.bmp.

Примечание

Прилагаемый к книжке компакт-диск содержит готовые к работе исполняемые файлы, которые желательно *скопировать в какую-либо папку*. После чего не потребуются никакие предварительные действия: достаточно запустить любой из них. Они не меняют установок в компьютере пользователя и не являются коммерческими.

Прилагаемые программные разработки созданы любителями и не претендуют на высокое качество. Они проверены в работе и не дают явных сбоев, хотя пытливый пользователь, возможно, обнаружит какие-либо формальные недостатки.

Еще раз подчеркнем, что программы рассчитаны на *изучение* фракталов, а не на показ компьютерных достижений. Авторы считают, что поставленные ими цели были достигнуты и не стремились доводить свои программы до высоких компьютерных кондиций.

Программы не снабжены встроенным справочным материалом, а рассчитаны на работу с описаниями, содержащимися в книге, и на разрешение экрана 1024 на 768.

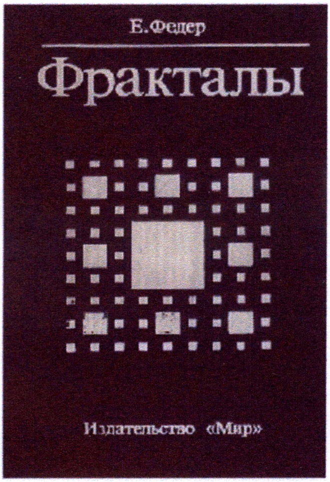
ИЛЛЮСТРАЦИИ

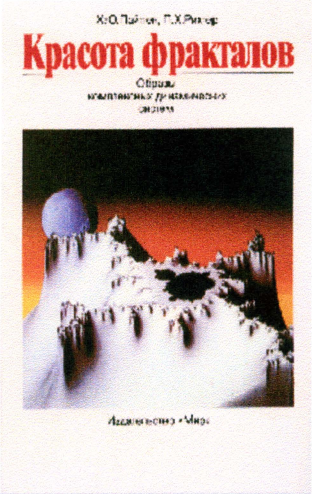
Чем сложнее ситуация, тем более подходящим становится наглядное изображение.

Г. Франке

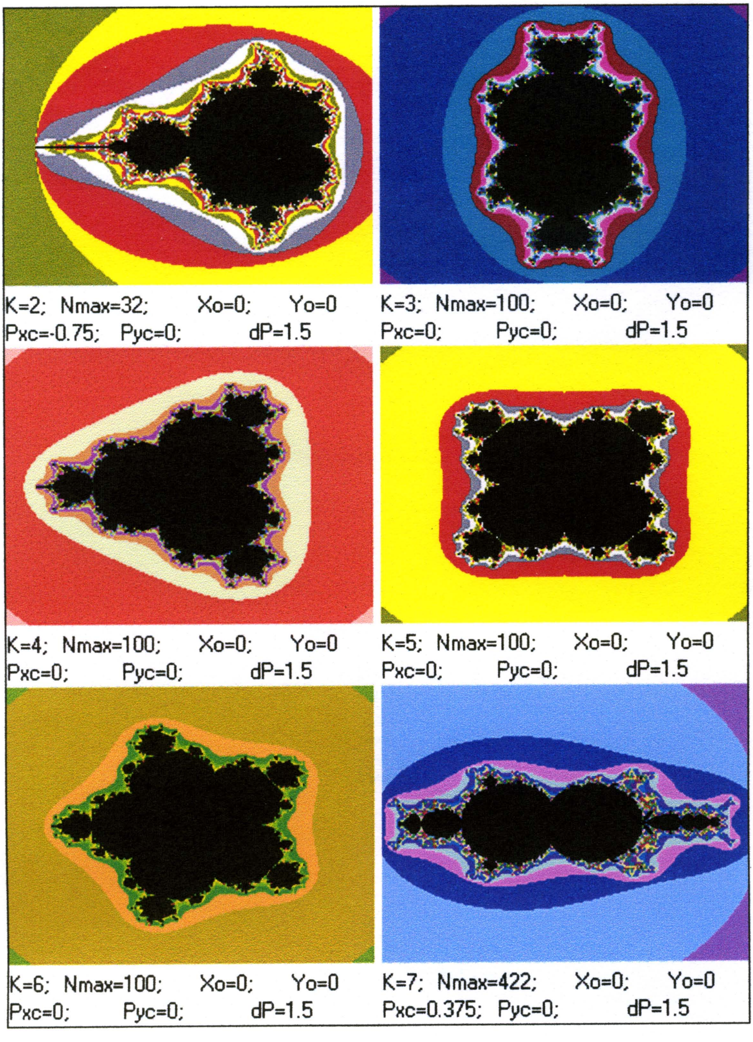
ПОЛНОЦВЕТНЫЕ

МОНОХРОМНЫЕ



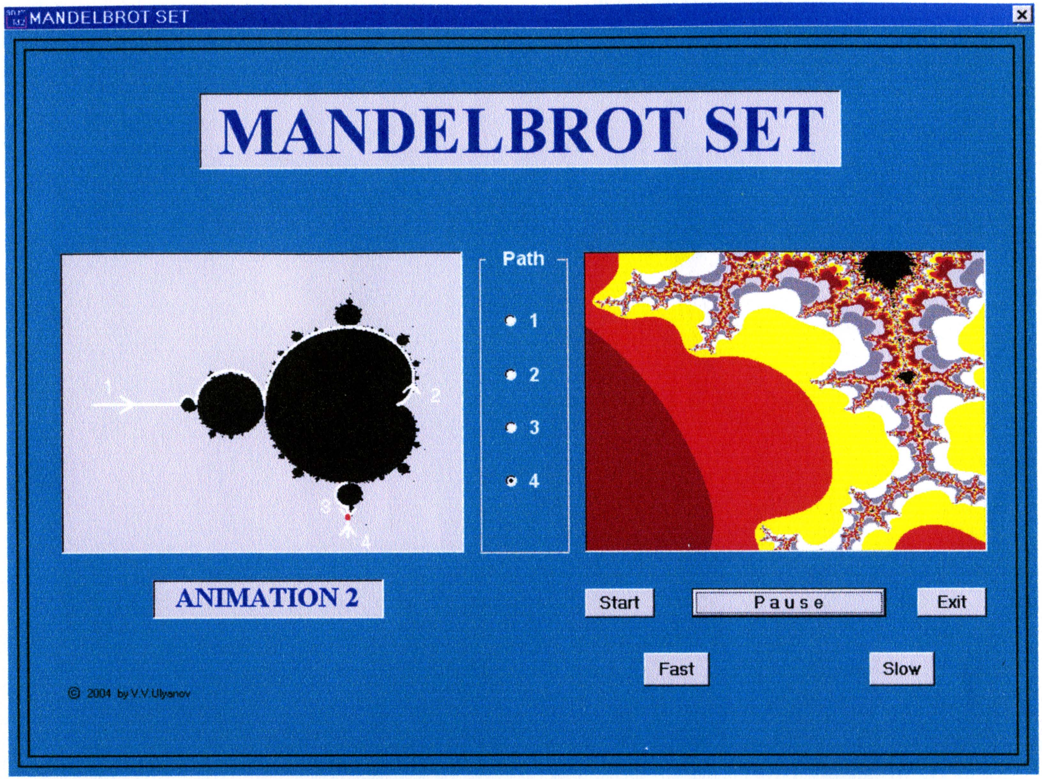


Некоторые книги о фракталах

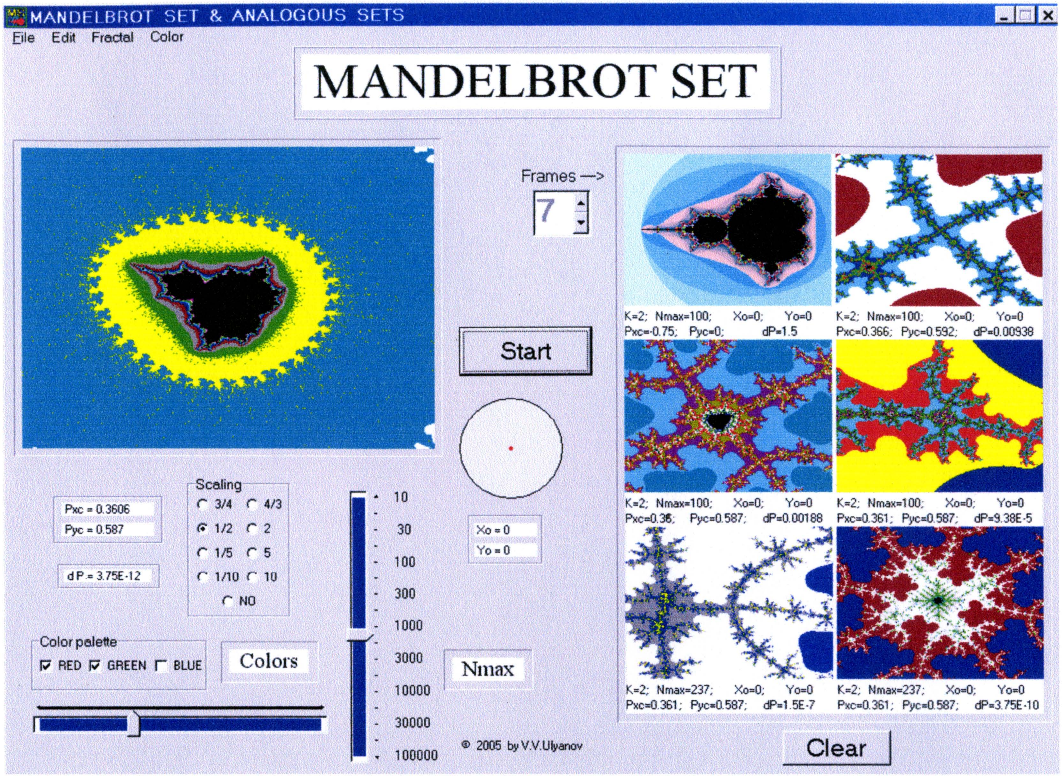


Множество Мандельброта и некоторые его аналоги

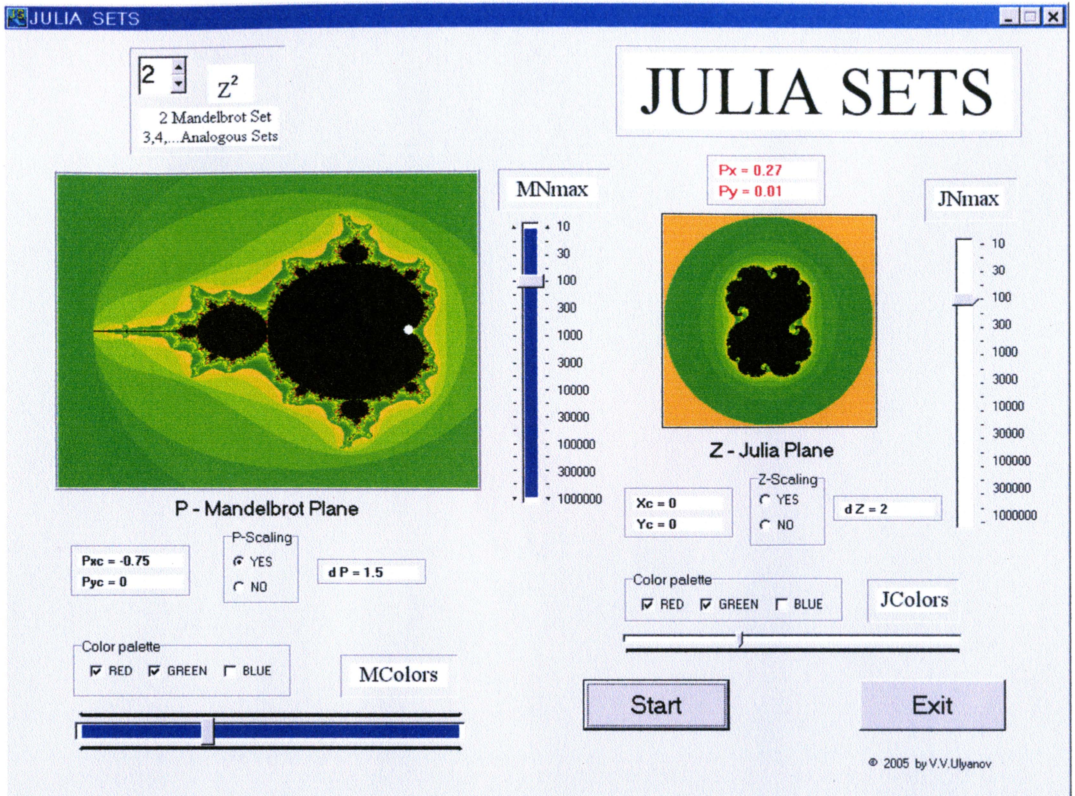
Анимационные путешествия в глубины множества Мандельброта (с экрана монитора)



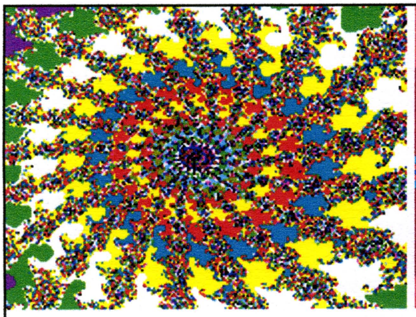
Анимационные путешествия вдоль границы множества Мандельброта (с экрана монитора)



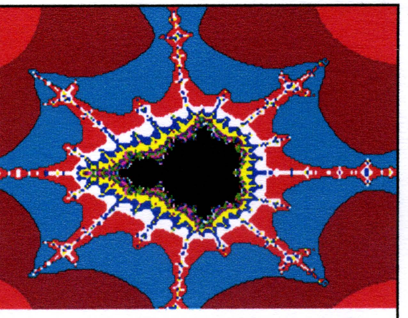
Изучение множества Мандельброта и некоторых его аналогов (с экрана монитора)



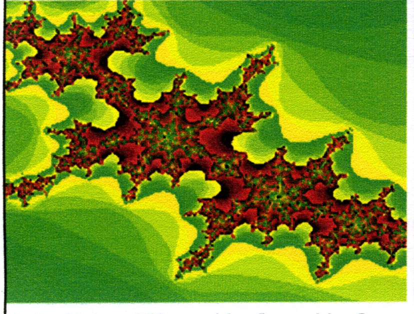
Стенд для изучения множеств Мандельброта и Жюлиа



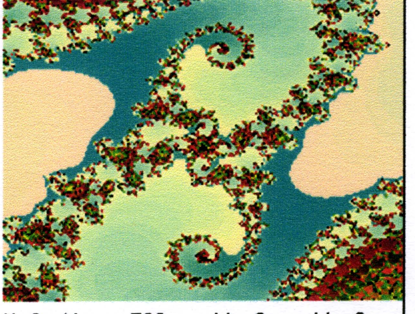
K=2; Nmax=562; Xo=0; Yo=0
Pxc=-0.743; Pyc=0.164; dP=0.00075



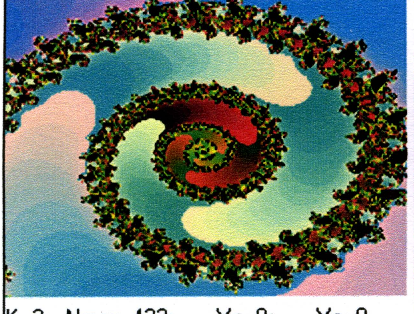
K=2; Nmax=133; Xo=0; Yo=0
Pxc=-1.63; Pyc=0.0012; dP=0.012



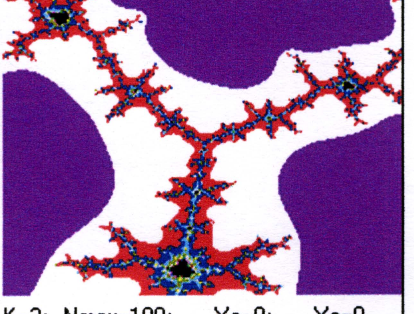
K=2; Nmax=100; Xo=0; Yo=0
Pxc=-1.26; Pyc=0.121; dP=0.00563



K=2; Nmax=562; Xo=0; Yo=0
Pxc=-0.748; Pyc=0.101; dP=1.17E-5

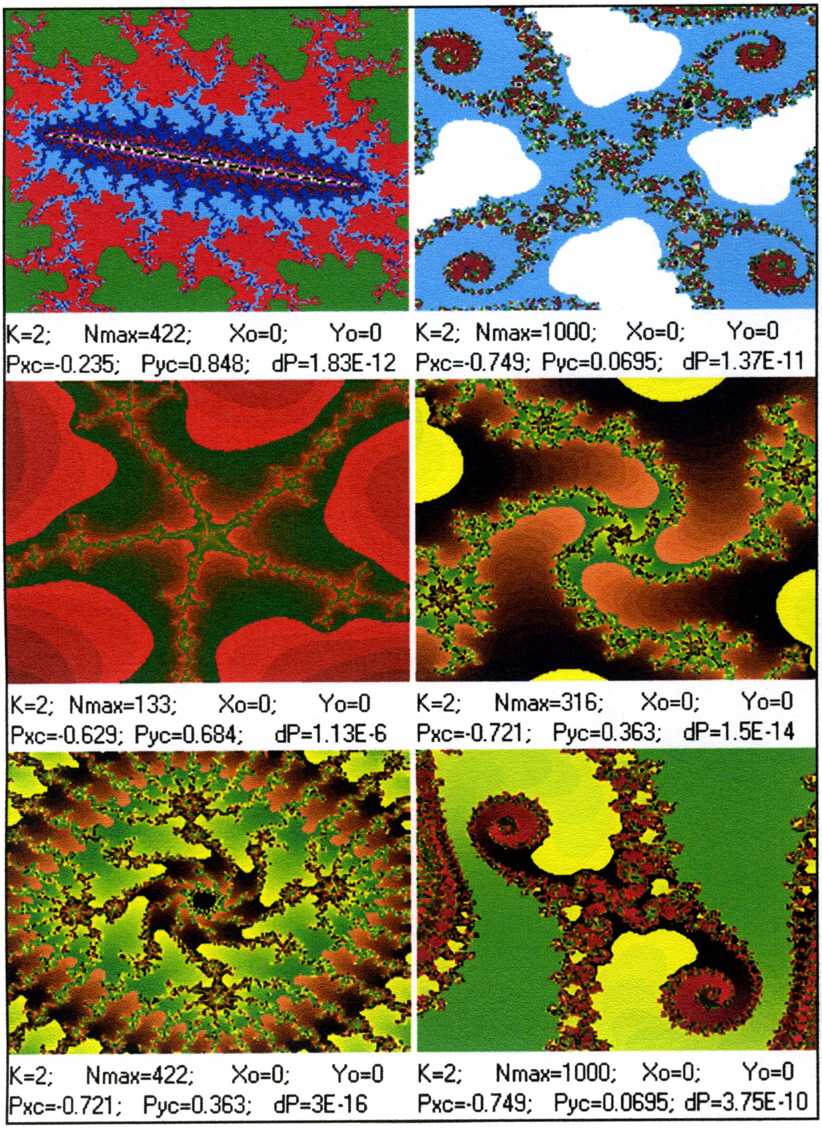


K=2; Nmax=422; Xo=0; Yo=0
Pxc=-0.749; Pyc=0.0606; dP=7.5E-5

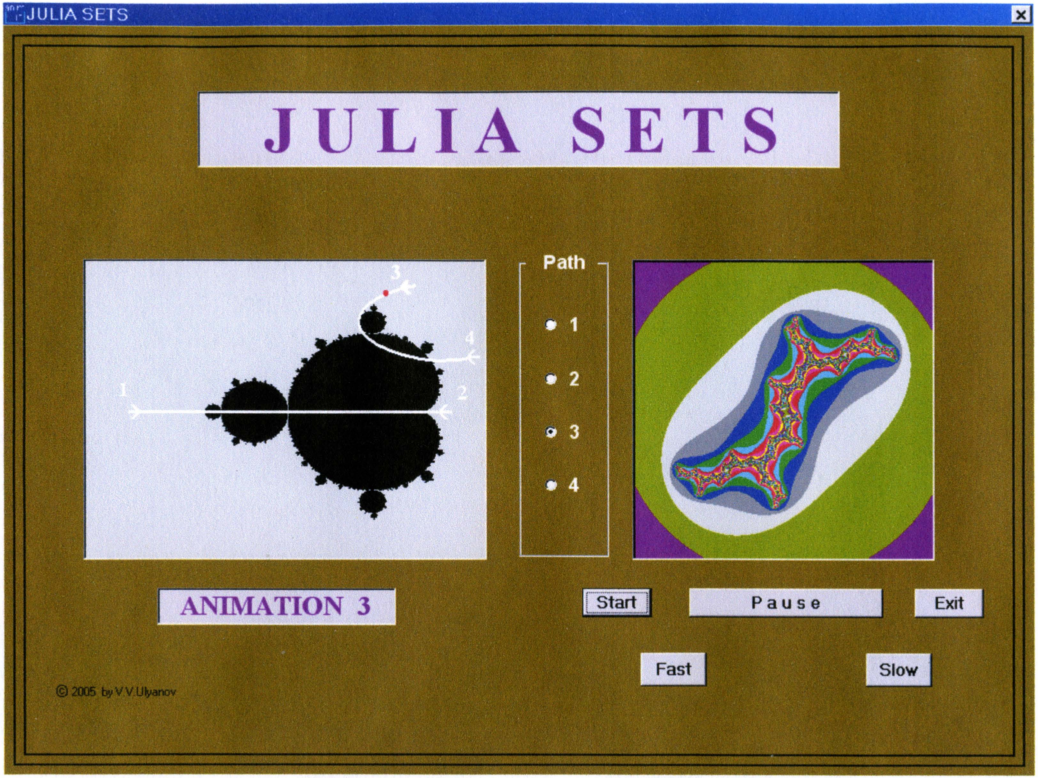


K=2; Nmax=100; Xo=0; Yo=0
Pxc=-0.101; Pyc=0.956; dP=0.0375

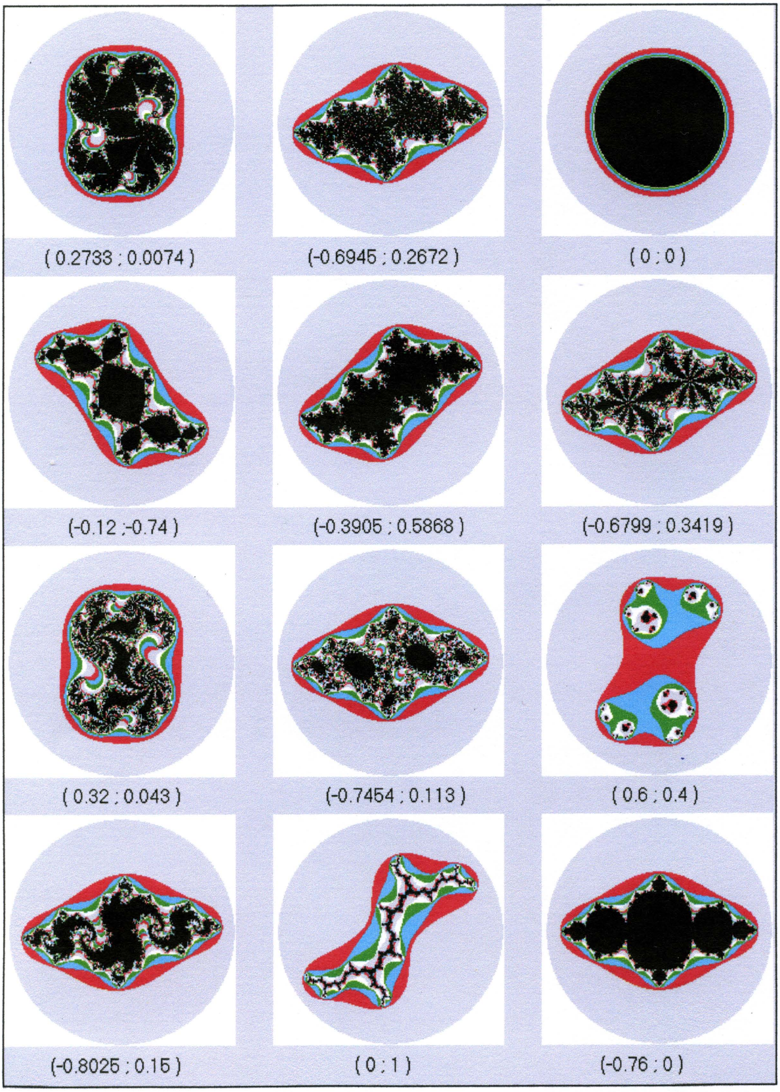
Фрагменты множества Мандельброта



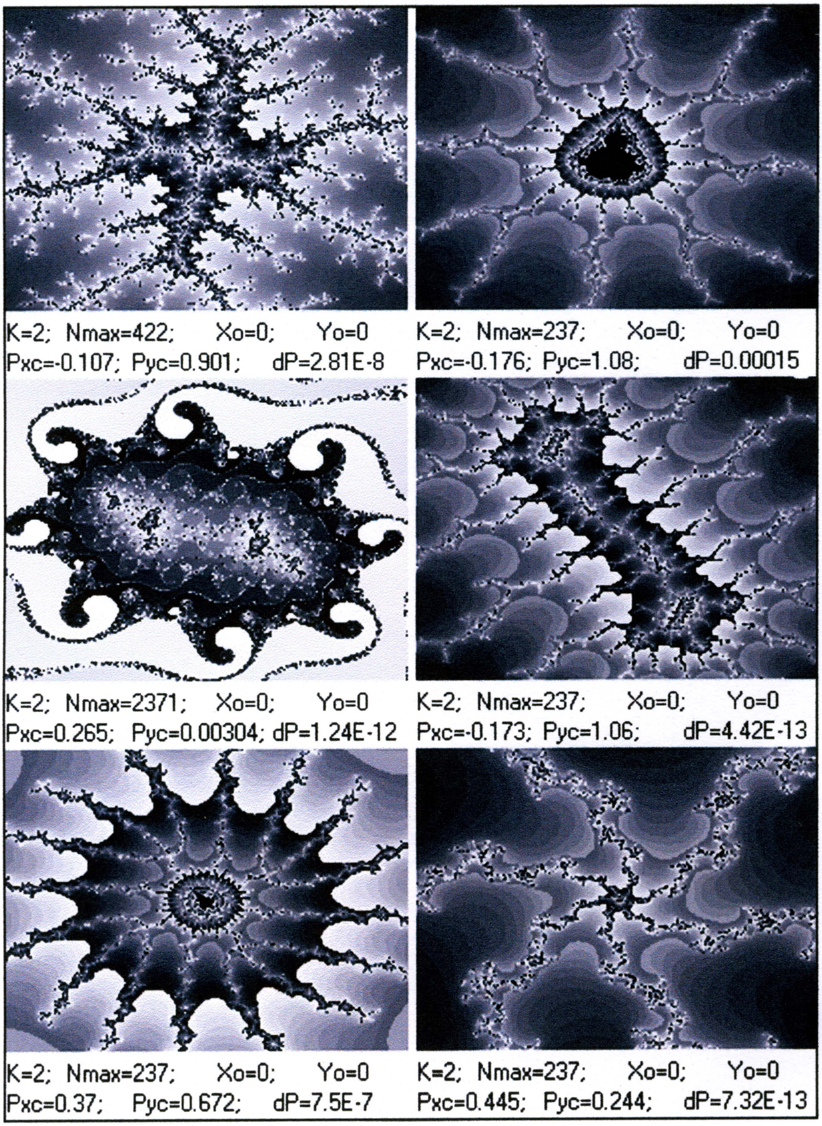
Фрагменты множества Мандельброта



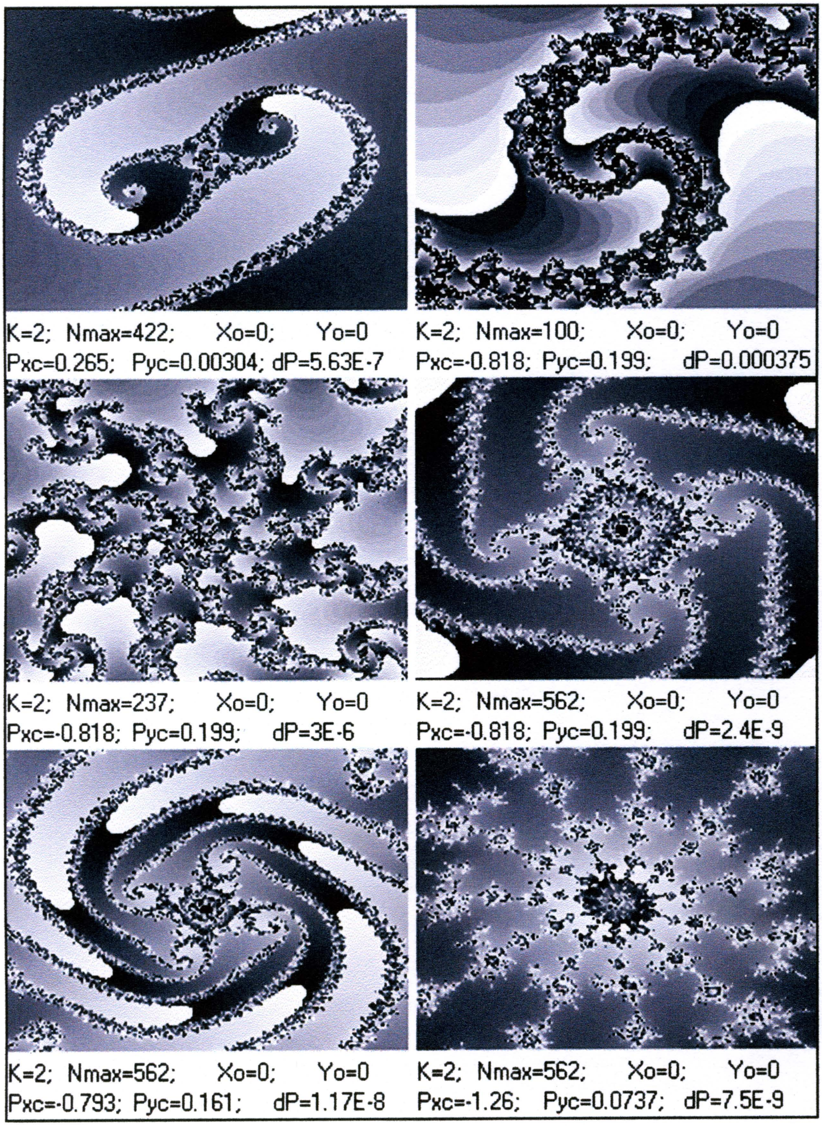
Анимационные путешествия с демонстрацией множеств Жюлиа (с экрана монитора)



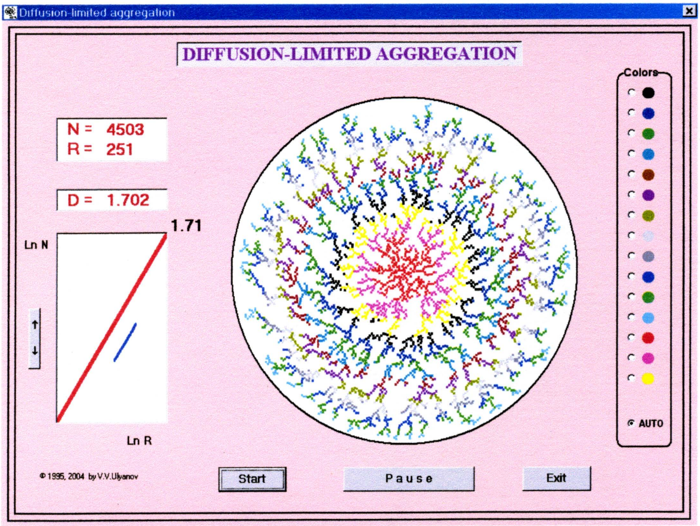
Некоторые множества Жюлиа

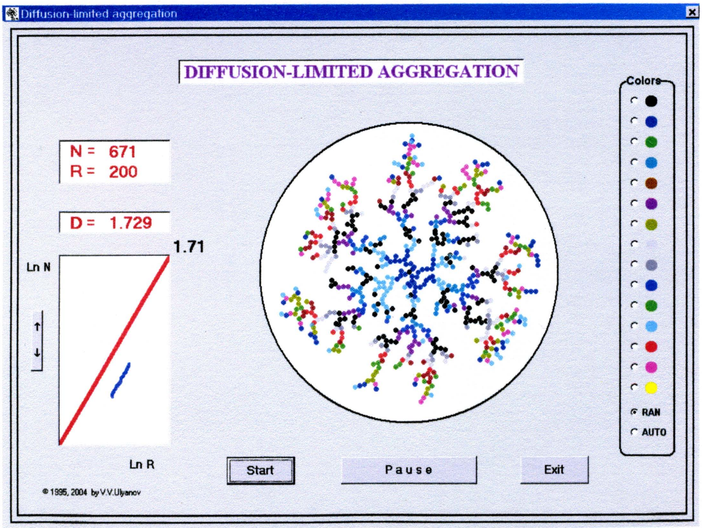


Фрагменты множества Мандельброта

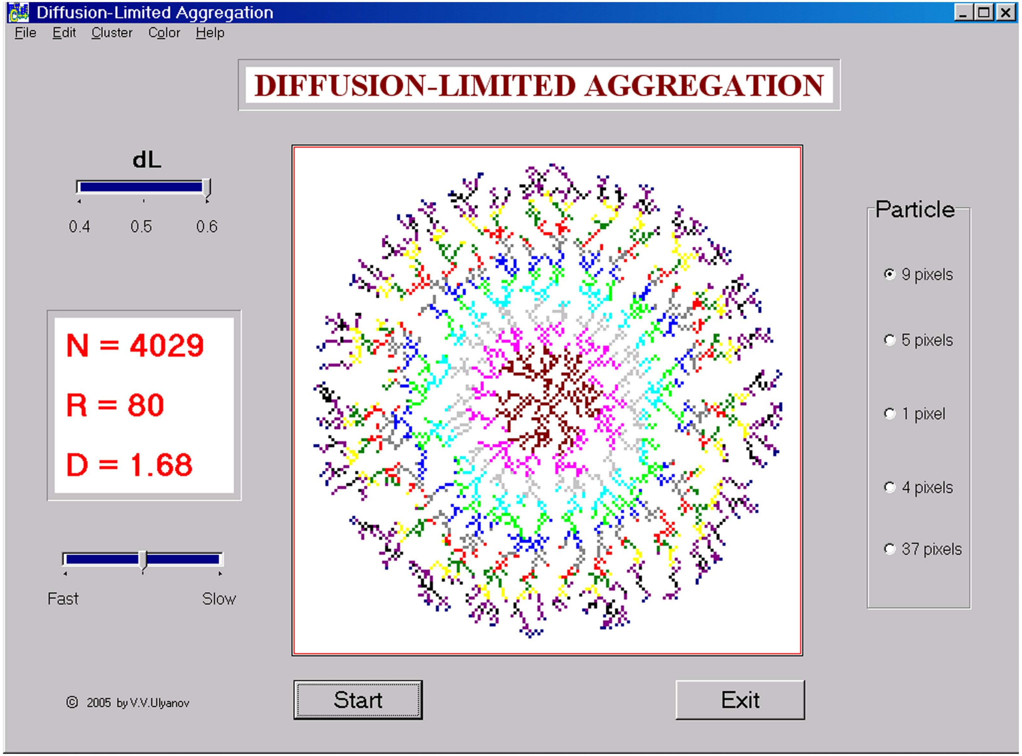


Фрагменты множества Мандельброта

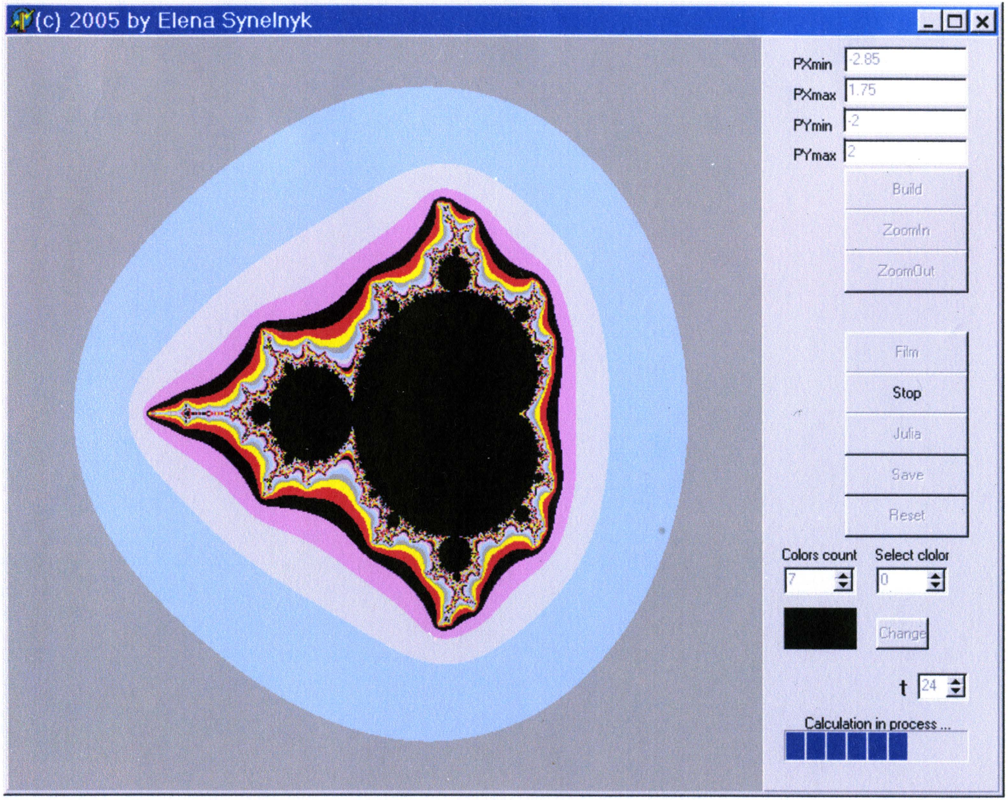




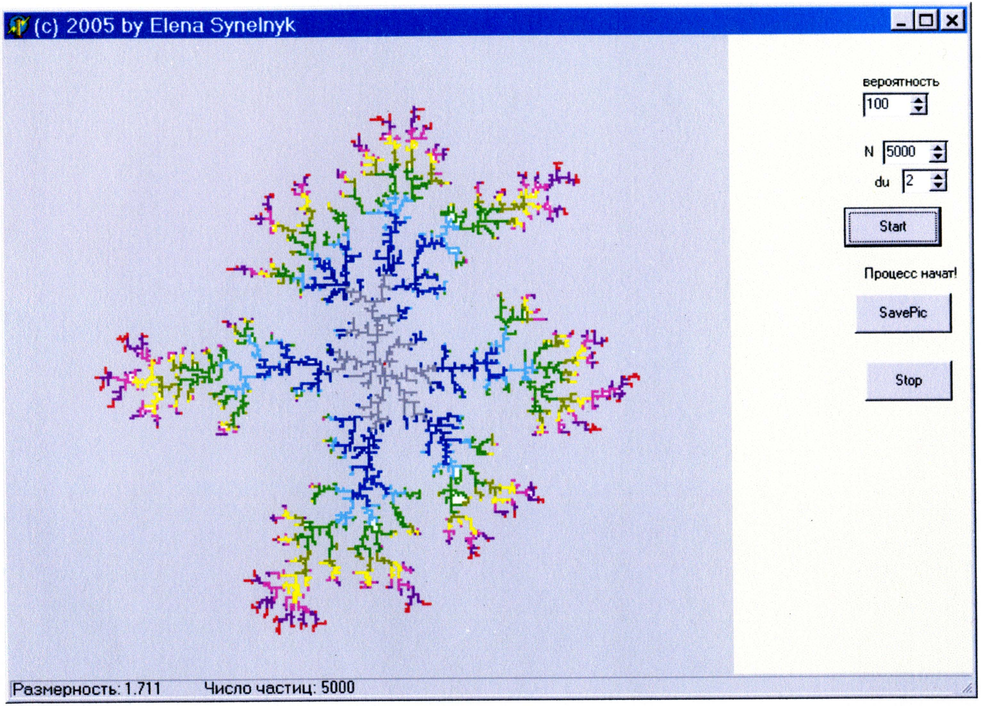
Стенды для изучения ОДА
(с экрана монитора)



Компьютерный стенд для изучения ограниченной диффузией агрегации (с экрана монитора)



Программа для изучения множеств Мандельброта
и Жюлиа (с экрана монитора)



Программа для изучения ограниченной диффузией агрегации (с экрана монитора)

СОДЕРЖАНИЕ

Науково-популярне
та навчальне видання

Олена Миколаївна Синельник
Володимир Володимирович Ульянов

ФРАКТАЛИ: ВІД МАТЕМАТИКИ ДО ФІЗИКИ

Відповідальний за випуск Г.І.Рашба

Підп. до друку 20.10.05. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 2,3. Обл.-вид. арк. 2,8.

ХНУ, 61077 Харків, пл. Свободи, 4.
Видавничий центр.

Серия воспоминаний об ученых-физиках

1. В.В.Ульянов
ИЛЬЯ МИХАЙЛОВИЧ ЛИФШИЦ. – 2001.
2. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
МОИСЕЙ ИСААКОВИЧ КАГАНОВ. – 2001.
3. В.В.Ульянов
ЛЕВ ЭЛЕАЗАРОВИЧ ПАРГАМАНИК. – 2002.
4. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
ЛЕОНИД СТЕПАНОВИЧ ГУЛИДА. – 2002.
5. В.В.Ульянов
БОРИС ИЕРЕМИЕВИЧ ВЕРКИН. – 2002.
6. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
АРНОЛЬД МАРКОВИЧ КОСЕВИЧ. – 2002.
7. В.В.Ульянов
ВИКТОР МОИСЕЕВИЧ ЦУКЕРНИК. – 2002.
8. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ВАЛЕНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ ПЕСЧАНСКИЙ. – 2002.
9. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ЭМАНУИЛ АЙЗИКОВИЧ КАНЕР. – 2002.
10. А.М.Ермолаев, Ю.П.Степановский, В.В.Ульянов
АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР. – 2002.
11. В.В.Ульянов
АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЖЕЛЕХОВСКИЙ. – 2003.
12. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ГАЛАЙКО. – 2003.
13. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ИГОРЬ ИВАНОВИЧ ФАЛЬКО. – 2003.
14. Г.И.Рашба, В.В.Ульянов
АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЕРМОЛАЕВ. – 2003.
16. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ОЛЕГ ИВАНОВИЧ ЛЮБИМОВ. – 2005.

Серия монографий и учебных пособий

1. В.В.Ульянов. ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ. – 2004.
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов
   НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ. – 2005.
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов
   ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ. – 2005.
4. В.В.Ульянов
   О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ. – 2002.
5. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 1-2. – 2002.
6. В.В.Ульянов
   К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 1-2. – 2003.
7. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
   К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 3. – 2004.

Готовятся к изданию

8. В.В.Ульянов
   КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ
9. В.В.Ульянов
   СОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
10. В.В.Ульянов
    ЗАДАЧИ ДЛЯ СТУДЕНЧЕСКИХ ФИЗИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД
11. В.В.Ульянов
    ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. Ч. 3-4
12. В.В.Ульянов
    ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ. Ч. 1-2.