ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9 1969

О ТЕОРЕМЕ УМНОЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

До Хонг Тан

Понятие операторного узла, содержащего линейный ограниченный оператор, было введено М. С. Бродским и М. С. Лившицем. Для такого узла была построена характеристическая функция и были доказаны теорема об унитарной эквивалентности узлов, теорема умножения характеристических функций и теорема о разложении открытых систем [1, 2].

А. В. Штраус ввел понятие характеристической функции неограниченного оператора. Им были доказаны также теорема об унитарной эквивалентности операторов [3] и теорема умножения [4].

В этой заметке мы установим связь между характеристической функцией по А. В. Штраусу и характеристической функцией по А. В. Кужелю [5] и докажем теорему умножения характеристических функций А. В. Штрауса для класса квазиэрмитовых операторов. Введем также понятие открытой системы и докажем теорему разложения.

§ 1. ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ И ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

1. Пусть Π гильбертово пространство и E — пространства с невырожденными эрмитово-индефинитными метриками (f, f_1) и $[\varphi, \varphi_1]$ соответственно. Пусть далее A — линейный оператор в Π, имеющий плотную область определения D_A и непустое множество регулярных точек ρ_A, а K — линейный оператор, действующий из D_A в E.

Определение. *Совокупность* $X = (A, \Pi, K, E)$ *будем называть операторным узлом, если выполняется условие*

$$\frac{1}{i}\{(Af, f) - (f, Af)\} = [Kf, Kf] \quad (f \in D_A). \tag{1}$$

Всякий оператор A может быть включен в некоторый узел. Для этого достаточно в качестве E и K взять граничное пространство и граничный оператор [3].

Пусть имеется некоторый узел $X = (A, \Pi^{\sim}, K, E)$. Включим оператор $-A^*$ в узел $X' = (-A^*, \Pi^{\sim}, K', E')$.* Следуя А. В. Штраусу, введем в рассмотрение операторы

$$\left.\begin{aligned} Q(\lambda) &= (A^* - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I), \\ Q'(\bar{\lambda}) &= (A - \bar{\lambda} I)^{-1}(A^* - \bar{\lambda} I). \end{aligned}\right\} (\lambda \in \rho_{A^*}) \tag{3}$$

Оператор $Q(\lambda)$ действует из D_A в D_{A^*}, а $Q'(\bar{\lambda})$ — из D_{A^*} в D_A. Определим на многообразии KD_A следующие операторы:

$$S(\lambda)Kf = K'Q(\lambda)f, \quad (f \in D_A) \tag{4}$$

$$R(\lambda)Kf = [I - Q(\lambda)]f. \tag{5}$$

* Знак* обозначает сопряжение в индефинитной метрике.

Оператор $S(\lambda)$ действует из KD_A в E', а $R(\lambda)$ из KD_A в Π. Оператор $S(\lambda)$ будем называть характеристической функцией пары узлов $\{X, X'\}$. Аналогично для пары узлов $\{X', X\}$ определим следующие операторы:

$$S'(\bar{\lambda})K'g = KQ'(\bar{\lambda})g, \tag{6}$$

$$(g \in D_{A^*})$$

$$R'(\bar{\lambda})K'g = [I - Q'(\bar{\lambda})]g. \tag{7}$$

2. Определение. *Совокупность двух пространств с индефинитной метрикой E^-, E^+ и гильбертова пространства Π, для которых определены отображения S и R пространства E^- в E^+ и в Π, называется открытой системой. Будем говорить, что пара узлов $\{X, X'\}$ принадлежит системе* $F = \begin{pmatrix} S \\ R \end{pmatrix} E^- \begin{smallmatrix} \nearrow E^+ \\ \searrow \Pi \end{smallmatrix}$, *если $E^- = KD_A$, $E^+ = K'D_{A^+}$ и операторы S, R удовлетворяют соотношениям* (4), (5) *при некотором $\lambda \in \rho^+_A$. Пусть* $\dim E^- = \dim E^+$ *и оператор S обратим. Вместе с F введем еще открытую систему* $F' = \begin{pmatrix} S^{-1} \\ -RS^{-1} \end{pmatrix} E^+ \begin{smallmatrix} \nearrow E^- \\ \searrow \Pi \end{smallmatrix}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если пара узлов $\{X, X'\}$ принадлежит открытой системе F, то пара узлов $\{X', X\}$ принадлежит открытой системе F' при всех $\lambda \in \rho_A \cap \rho_{A^*}$.*

Доказательство. Если λ есть общая регулярная точка операторов A и A^+, то из (2) и (3) вытекает, что $Q^{-1}(\lambda) = Q'(\lambda)$. Тогда для любого $f \in D_A$ и $g \in D_A{}^*$ равносильны следующие соотношения:

$$f = Q'(\lambda)g, \; g = Q(\lambda)f. \tag{8}$$

Теперь из равенства (4) следует, что оператор $S(\lambda)$ обратим и

$$S^{-1}(\lambda)K'Q(\lambda)f = Kf.$$

Согласно (8) это равенство можно переписать в виде

$$S^{-1}(\lambda)K'g = KQ'(\lambda)g. \tag{9}$$

Отсюда, учитывая (6), получим

$$S'(\lambda) = S^{-1}(\lambda). \tag{10}$$

Далее, из (5) и (8) следует, что

$$R(\lambda)KQ'(\lambda)g = [Q'(\lambda) - I]g.$$

На основании (9) это равенство можно заменить следующим:

$$R(\lambda)S^{-1}(\lambda)K'g = [Q'(\lambda) - I]g.$$

Это равенство вместе с (7) дает

$$R'(\lambda) = -R(\lambda)S^{-1}(\lambda). \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) следует справедливость утверждения.

§ 2. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Следуя А. В. Кужелю [5], введем следующие определения.

Определение 1. *Линейный замкнутый оператор A с плотной в Π (пространстве с индефинитной метрикой) областью определения D_A называется квазиэрмитовым, если*

1) $i \in \rho_A \cap \rho_{A^{+}}$*;

*) Знак «+» означает сопряжение в индефинитной метрике.

2) $\dim D_A = r \,(\mathrm{mod}\, G_A) < \infty$,

где G_A — *наиболее широкое многообразие, на котором* $A = A^+$.

Определение 2. *Совокупность* $M = \begin{pmatrix} A & \Gamma & J \\ \Pi & & E \end{pmatrix}$, *состоящая из гильбертового пространства* E, *пространства с индефинитной метрикой* Π *и трех операторов* A, Γ, J, *называется* K-*операторным узлом, если* A *квазиэрмитов*, $J = J^*$, $J^2 = I$ и)

$$B^{\text{опр}} i\,(A + iI)^{-1} - i\,(A^+ - iI)^{-1} - 2\,(A^+ - iI)^{-1}\,(A + iI)^{-1} = \Gamma J \Gamma^+. \quad (12)$$

В работе [5] был введен оператор

$$\tau = I - 2\Gamma^+ \Gamma J \quad (13)$$

и было доказано соотношение [6]

$$\tau^{-1}\Gamma^+ = \Gamma^+ T^{-1}\,(T^{-1})^+, \quad (14)$$

где T — преобразование Кэли оператора A, т. е.

$$T = (A - iI)\,(A + iI)^{-1}.$$

Представим оператор $J\tau^{-1}$ в виде

$$J\tau^{-1} = CJ'C^*, \quad (15)$$

где C — некоторый обратимый оператор. Оператор-функция $\chi(\lambda)$, определяемая соотношением

$$\chi^*(i)\,J'\chi(\lambda) = J + i\,(\lambda + i)\,\Gamma^+\,(A^+ - iI)\,(A^+ - \lambda I)^{-1}\Gamma, \quad (16)$$

называется характеристической функцией K-узла M.

Определение 3. *Проекционно-полное подпространство* $\Pi_1 \subset \Pi$ *называется инвариантным относительно квазиэрмитова оператора* A, *если* $D_A \cap \Pi_1 = \Pi_1$, $A\,(D_A \cap \Pi_1) \subset \Pi_1$ *и часть оператора* A *в* $D_A \cap \Pi_1$ *квазиэрмитова. Обозначим* $\Pi_2 = \Pi \ominus \Pi_1$. *Пусть* Π_1 *инвариантно относительно* A *и* Π_2 *инвариантно относительно* A^+. *Тогда, если* $M = \begin{pmatrix} A & \Gamma & J \\ \Pi & & E \end{pmatrix}$ *является* K-*узлом, совокупности*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & P_1\Gamma & J \\ \Pi_1 & & E \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} A_2 & P_2\Gamma\chi_1^{-1}(i) & J_1' \\ \Pi_2 & & E \end{pmatrix},$$

где $A_1 = A\,|_{D_A \cap \Pi_1}$, $A_2 = (A^+|_{D_{A^+} \cap \Pi_2})^+$, P_k — проекторы на Π_k $(k = 1, 2)$, также представляют собой K-узлы. При этом K-узел M называется сцеплением K-узлов M_1 и M_2. А. В. Кужель [5] доказал следующее утверждение.

Теорема умножения. Если K-узел M является сцеплением K-узлов M_1 и M_2, то их характеристические функции связаны соотношением

$$\chi(\lambda) = U\chi_2(\lambda)\,\chi_1(\lambda), \quad (17)$$

где

$$U = J'\chi^{*-1}(i)\,\chi_1^*(i)\,\chi_2^*(i)\,J'. \quad (18)$$

2. Пусть имеется некоторый узел $X = A$, Π, K, E), причем A — квазиэрмитов оператор и $E = KD_A$. Не нарушая общности, E можно считать J-пространством. В самом деле, возьмем какое-нибудь разложение пространства E на ортогональную сумму положительного и отрицательного подпространств E_+ и E_-. Тогда в качестве J достаточно взять оператор $J(\varphi_+ + \varphi_-) = \varphi_+ - \varphi_-$ $(\varphi_+ \in E_+,\ \varphi_- \in E_-)$.

В этом случае соотношение (1) имеет вид

$$\frac{1}{i}\{(Af, f) - (f, Af)\} = (JKf, Kf)_E \quad (f \in D_A), \quad (19)$$

[1] Знак * обозначает сопряжение в гильбертовой метрике.

причем символ $(\varphi\varphi_1)_E$ обозначает гильбертовую метрику в E.
Введем оператор

$$F = K(A + iI)^{-1}. \tag{20}$$

Этот оператор отображает пространство П на конечномерное пространство E, следовательно, он ограничен и существует сопряженный оператор F^+, действующий из E в П. Введем оператор $T = I - 2FF^+J$ и представим оператор JT^{-1} в виде

$$JT^{-1} = \int_a^b \lambda dE_\lambda,$$

где E_λ — спектральная функция. Далее, определим еще следующие операторы:

$$J' = \int_a^b \operatorname{sign} \lambda dE_\lambda, \qquad C = \int_a^b \sqrt{|\lambda|}\, dE_\lambda. \tag{21}$$

Покажем, что совокупность $M = \begin{pmatrix} A F^+ J \\ \Pi \quad E \end{pmatrix}$ представляет собой K-узел. Для этого возьмем вектор $h = (A + iI)f$ и подставим его в правую часть равенства (19). Учитывая (20), получим

$$\frac{1}{i}\{(Af, f) - (f, Af)\} = (F^+JFh, h). \tag{22}$$

С другой стороны, как легко проверить,

$$(Bh, h) = \frac{1}{i}\{(Af, f) - (f, Af)\}. \tag{23}$$

Сопоставляя (22) и (23), получим условие (12).

Введем теперь в E новую метрику, полагая

$$[\varphi_1, \varphi_2]' = (J'\varphi_1, \varphi_2)_E. \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in E). \tag{24}$$

Пространство E с метрикой (24) обозначим через E'. Определим оператор K' формулой

$$K'g = CKQ'(-i)g \quad (g \in D_{A^+}), \tag{25}$$

где $Q'(\lambda)$ определяется соотношением (3). Покажем, что совокупность $X' = (-A^+, \Pi, K', E')$ представляет собой узел. В самом деле, из легко проверяемого равенства $I - T^+T = 2B$ следует, что

$$F^+JF = \frac{1}{2}(I - T^+T). \tag{26}$$

Теперь на основании (20), (24) и (25) имеем

$$[K'g, K'g]' = (F^+CJ'CFh, h) \quad (g \in D_{A^+}),$$

где $h = (A^+ + iI)g$. Воспользовавшись соотношениями (14), (15) и (26) (при замене Г на F^+), получим

$$[K'g, K'g]' = \frac{1}{2}(T^{-1}(I - TT^+)T^{-1+}h, h). \tag{27}$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$B'^{\text{опр}} = i(A^+ + iI)^{-1} - i(A - iI)^{-1} - 2(A - iI)^{-1}(A^+ + iI)^{-1} =$$
$$= \frac{-1}{2} T^{-1}(I - TT^+)T^{-1+}$$

и

$$(B'h, h) = \frac{1}{i}\{(A^+g, g) - (g, A^+g)\}. \tag{28}$$

Из (27) и (28) вытекает справедливость утверждения.

Пусть Π_1 инвариантно относительно A. Тогда очевидно, что совокупность $X_1 = (A_1, \Pi_1, K_1, E)$, где

$$K_1 = K|_{D_{A_1}}, \tag{29}$$

представляет собой узел. Для определения X'_1, как и раньше, сначала определим операторы J'_1 и C_1 по оператору JT_1^{-1} формулами (21). Затем в E введем новую метрику, полагая

$$[\varphi_1, \varphi_2]'_1 = (J'_1\varphi_1, \varphi_2)_E \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in E), \tag{30}$$

и обозначим полученное пространство через E'_1. Наконец, определим оператор K'_1 формулой

$$K'_1 = C_1K_1Q'_1(-i). \tag{31}$$

Как легко убедиться, оператор $T_1 = T|_{\Pi_1}$ является преобразованием Кэли оператора A_1. Поэтому аналогично предыдущему (при замене A на A_1, T на T_1) совокупность $X'_1 = (-A_1^+, \Pi_1, K'_1, E'_1)$ представляет собой узел.

Пусть Π_2 инвариантно относительно A^+. Тогда совокупность $X'_2 = (-A_2^+, \Pi_2, K'_2, E')$, где $K'_2 = K'|_{D_{A_2^+}}$, является узлом. По общей формуле (25) имеем

$$K'_2 = C_2K_2Q'_2(-i).$$

Тогда

$$K_2 = C_2^{-1}K'_2\, Q_2(-i). \tag{32}$$

Покажем, что в качестве C_2 можно взять оператор

$$C_2 = CC_1^{-1}, \tag{33}$$

если в качестве E_2 возьмем E'_1. В самом деле, подставляя выражения для C_2, K'_2 и $Q_2(-i)$ в (32), получим

$$K_2 = C_1K(A + iI)^{-1}(A_2 + iI). \tag{34}$$

Учитывая (20), отсюда имеем

$$F = \underset{2}{\overset{\text{опр}}{=}}K_2(A_2 + iI)^{-1} = C_1FP_2.$$

Но тогда из результатов А. В. Кужеля (при замене Γ на F^+, $\chi_1^{-1}(i)$ на C_1) вытекает, что

$$F_2^+J'_1F_2 = B_2.$$

Отсюда аналогично предыдущему получается соотношение

$$\frac{1}{i}\{(A_2f_2, f_2) - (f_2, A_2f_2)\} = (J'_1K_2f_2, K_2f_2) \quad (f_2 \in D_{A_2}),$$

т. е. совокупность $X_2 = (A_2, \Pi_2, K_2, E'_1)$ представляет собой узел.

Итак, мы видели, что по заданному узлу X всегда можно однозначно определить узлы X', X_1, X'_1, X_2, X'_2 формулами (24), (25), (29—31) и (34). При этом пару узлов $\{X, X'\}$ будем называть сцеплением пар узлов $\{X_1, X'_1\}$ и $\{X_2, X'_2\}$. Сцепление называется регулярным, если $K_1D_{A_1} = E$, $K'_2D^*_{A_2} = E'$.

3. Вычислим сначала характеристическую функцию $S(\lambda)$. По определению $S(\lambda)K = K'Q(\lambda)$. Учитывая (20) и (25), это равенство можно переписать в виде

$$S(\lambda)K = CF(A^+ + iI)(A^+ - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I). \tag{35}$$

Воспользовавшись легко проверяемыми соотношениями

$$A^{+} iI = -2iT^{+}(I - T^{+})^{-1},$$

$$(A^{+} - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I) = (I - T^{+})(I - \zeta T^{+})^{-1}(\zeta I - T)(I - T)^{-1},$$

$$\left(\zeta = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right) \tag{36}$$

$$(I - \zeta T^{+})^{-1}(\zeta I - T) = \zeta (I - \zeta T^{+})^{-1}(I - T^{+}T) - T,$$

$$(I - T)^{-1} = \frac{1}{2i}(A + iI), \tag{37}$$

$$(I - \zeta T^{+})^{-1} = -\frac{i}{2}(\lambda + i)(A^{+} - iI)(A^{+} - \lambda I)^{-1},$$

из (35) получим

$$S(\lambda) = C\,[I + i(\lambda + i)F(A^{+} - iI)(A^{+} - \lambda I)^{-1}F^{+}J]. \tag{38}$$

Отсюда, учитывая (15), имеем

$$C_1 = JS^{*}(i)J'. \tag{39}$$

Подставляя (39) в (38) и умножая справа на J, получим

$$JS^{*}(i)J'S(\lambda)J = J + i(\lambda + i)F(A^{+} - iI)(A^{+} - \lambda I)^{-1}F^{+}. \tag{40}$$

Сопоставляя (40) и (16) и учитывая, что $\Gamma = F^{+}$, получим

$$S(\lambda) = J'\chi(\lambda)J, \tag{41}$$

где $\chi(\lambda)$ — некоторая характеристическая функция K-узла $M = \begin{pmatrix} A & F^{+} & J \\ \Pi & & E \end{pmatrix}$. Аналогичным образом, в случае регулярного сцепления, нетрудно проверить, что

$$S_1(\lambda) = J_1'\overline{\chi}_1(\lambda)J, \quad S_2(\lambda) = J'\chi_2(\lambda)J_1'. \tag{42}$$

Заметим, что из соотношений (33), (39) и (41) вытекает равенство $U = I$, где U определяется формулой (18). Из соотношений (41), (42) и теоремы умножения А. В. Кужеля следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Если пара узлов $\{X, X'\}$ является регулярным сцеплением пар узлов $\{X_1, X_1'\}$ и $\{X_2, X_2'\}$, то их характеристические функции связаны соотношением*

$$S(\lambda) = S_2(\lambda)S_1(\lambda).$$

Замечание 1. Если сцепление не регулярно, то это равенство имеет место только на тех элементах $\varphi \in K_1 D_{A_1}$, для которых $S_1\varphi \in K_2 D_{A_2}$.

§ 3. СЦЕПЛЕНИЕ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

1. Как было показано в § 1, каждой паре узлов отвечает некоторая открытая система. Открытая система F называется сцеплением открытых систем F_1 и F_2, если они связаны соотношениями

$$S = S_2 S_1, \quad R = R_1 + R_2 S_1. \tag{43}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если пара узлов $\{X, X'\}$ является регулярным сцеплением пар узлов $\{X_1, X_1'\}$ и $\{X_2, X_2'\}$, а эти пары узлов принадлежат открытым системам F, F_1 и F_2 соответственно, то система F является сцеплением систем F_1 и F_2.*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно доказать второе равенство в (43). По определению $R(\lambda)K = I - Q(\lambda)$. Воспользовавшись соотношениями (2), (20) и (36), нетрудно проверить, что

$$2i(1-\zeta)^{-1}R(\lambda) = (I-\zeta T^{+})^{-1}F^{+}J, \tag{44}$$

$$2i(1-\zeta)^{-1}R_1(\lambda) = (1-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}J, \tag{45}$$

$$2i(1-\zeta)^{-1}R_2(\lambda) = (I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2F^{+}C_1J_1', \tag{46}$$

где $F_1 = FP_1$. Проверим сначала следующее утверждение:

$$\begin{aligned}(I-\zeta T^{+})^{-1} = (I-\zeta T_1^{+})^{-1}P_1 + (I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2 + \\ +\zeta(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}P_1.\end{aligned} \tag{47}$$

В самом деле, оператор $I-\zeta T^{+}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}I-\zeta T^{+} = (P_1+P_2)(I-\zeta T^{+})(P_1+P_2) = \\ = (I-\zeta T_2^{+})P_1 + (I-\zeta T_2^{+})P_2 - \zeta P_2T^{+}P_1.\end{aligned} \tag{48}$$

Перемножая правые части выражений (47) и (48), получим единичный оператор.

Подставляя (47) в (44) и умножая справа обе части на F_1, получим

$$\begin{aligned}2i(1-\zeta)^{-1}R(\lambda)F_1 = (I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1 + (I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2F^{+}JF_1 + \\ +\zeta(I-\zeta T_1^{+})^{-1}P_2T^{+}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1.\end{aligned} \tag{49}$$

Преобразуем два последних члена правой части этого равенства

$$\begin{aligned}(I-\zeta T^{+})^{-1}P_2F^{+}JF_1 = \frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2(I-T^{+}T)P_1 = \\ = -\frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1,\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\zeta(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1 = \\ = (I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1 - \\ -\frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1} + \frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1.\end{aligned} \tag{51}$$

Подставляя (50) и (51) в (49), получим

$$\begin{aligned}2i(1-\zeta)^{-1}R(\lambda)F_1 = (I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1 - \frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1} + \\ +(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1.\end{aligned} \tag{52}$$

Используя (37) и (38), легко проверить, что

$$S_1(\lambda)F_1 = -2C_1F_1(1-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1 + C_1F_1.$$

Это равенство вместе с (46) дает

$$\begin{aligned}2i(1-\zeta)^{-1}R_2(\lambda)S_1(\lambda)F_1 = (I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2F^{+}C_1J_1'C_1F_1 - \\ -2(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2F^{+}C_1J_1'C_1F_1(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1.\end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned}2P_2F^{+}C_1J_1'C_1F_1 = 2P_2F^{+}J\mathrm{T}_1^{-1}F_1 = \\ = 2P_2F^{+}JFT_1^{-1}T_1^{+-1} = -P_2T^{+}T_1^{+-1},\end{aligned}$$

то из (53) получим

$$\begin{aligned}2i(1-\zeta)^{-1}R_2(\lambda)S_1(\lambda)F_1 = -\frac{1}{2}(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1} + \\ +(I-\zeta T_2^{+})^{-1}P_2T^{+}T_1^{+-1}(I-\zeta T_1^{+})^{-1}F_1^{+}JF_1.\end{aligned}$$

Поскольку оператор $F_1 = K_1(A_1 + iI)^{-1}$ отображает Π_1 на все E, то из (45), (52) и (54) следует соотношение

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda) S_1(\lambda).$$

Теорема доказана.

Отметим, что если сцепление пар узлов не регулярно, то можно сделать оговорку, аналогичную замечанию 1 в § 2.

2. Примечание. Для K-операторного узла с гильбертовым пространством можно ввести еще оператор

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2i}(A^+ - iI)(A^+ - \lambda I)^{-1}\Gamma.$$

Тогда, как легко видеть,

$$\Phi(\lambda) = R(\lambda) J. \tag{55}$$

Условие принадлежности узла к системе и определение сцепления открытых систем введем как раньше. Пользуясь соотношениями (41) и (55), легко можно получить утверждения, аналогичные теоремам 1 и 3.

§ 4. ПРИМЕР

Рассмотрим в пространстве $\Pi = L_2(0, l)$ оператор A:

$$Af = i\frac{df}{dt} \quad (f(0) = 0). \tag{56}$$

Многообразие D_A состоит из всех абсолютно непрерывных функций, для которых $\frac{df}{dt} \in L_2(0, l)$ и $f(0) = 0$. При этом легко видеть, что

$$A^+g = i\frac{dg}{dt} \quad (g(l) = 0). \tag{57}$$

А так как

$$\frac{1}{i}\{(Af, f) - (f, Af)\} = f(l)\overline{f(l)} \quad (f \in D_A),$$

то

$$J = 1, \quad Kf = f(l). \tag{58}$$

Найдем оператор K' по формуле (25). Для этого сначала рассмотрим два вектора $f \in D_A$ и $g \in D_{A^+}$, которые связаны равенством

$$f = (A + iI)^{-1}(A^+ + iI)g. \tag{59}$$

Это равенство можно записать в виде (учитывая (56) и (57))

$$\frac{d}{dt}[f - g] = -[f - g].$$

Решая данное уравнение, получим

$$f - g = e^{-t}[f(0) - g(0)] = -e^{-t}g(0).$$

Отсюда согласно (59) имеем

$$(A + iI)^{-1}(A^+ + iI)g = g(t) - e^{-t}g(0).$$

Принимая во внимание (58), получаем

$$K(A + iI)^{-1}(A^+ + iI)g = -e^{-l}g(0). \tag{60}$$

Далее, известно, что

$$(A + iI)^{-1}h = -i\int_0^t e^{-(t-s)}h(s)\,ds.$$

Тогда, учитывая (58), имеем

$$Fh = K(A + iI)^{-1}h = -i\int_0^l e^{-(l-s)}h(s)\,ds. \tag{61}$$

Отсюда $F^+ = ie^{-(l-s)}$ и

$$\tau = I - 2FF^+ = 1 - 2\int_0^l e^{-2(l-s)}ds = e^{-2l}.$$

Но тогда $C = e^l$, $J' = 1$. Следовательно, учитывая (60),

$$K'g = -g(0). \tag{62}$$

Для определения операторов $S(\lambda)$ и $R(\lambda)$ рассмотрим уравнение

$$Af - A^+g = i\frac{d}{dt}[f - g] = \lambda[f - g].$$

Его решение имеет вид

$$f(t_1) - g(t_1) = e^{-i\lambda(t_1 - t_0)}[f(t_0) - g(t_0)] \quad (0 \leqslant t_0,\ t_1 \leqslant l). \tag{63}$$

Полагая $t_1 = l$, $t_0 = 0$, из (63) получим

$$e^{i\lambda l}f(l) = -g(0).$$

Отсюда, учитывая (58) и (62), имеем

$$S(\lambda) = e^{i\lambda l}.$$

Полагая теперь в (63) $t_1 = l$, $t_0 = t$, получим

$$e^{i\lambda(l-t)}f(l) = f(t) - g(t).$$

Отсюда

$$R(\lambda) = e^{i\lambda(l-t)}.$$

В качестве Π_1 возьмем совокупность функций из Π, равных нулю на интервале $[0, \xi)$, $\xi < l$, а Π_2 — совокупность функций из Π, равных нулю на $[\xi, l]$. Тогда аналогично предыдущему легко видеть, что

$$K_1f_1 = f_1(l),\ C_1 = e^{(l-\xi)},\ K_1'g_1 = -g_1(\xi)\left(f_1 \in D_{A_1},\quad g_1 \in D_{A_1^+}\right),$$

и следовательно,

$$S_1(\lambda) = e^{i\lambda(l-\xi)},\quad R_1(\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda(l-t)} & (t \geqslant \xi) \\ 0 & (t < \xi). \end{cases}$$

Оператор K_2 определим по формуле (34)

$$K_2 = C_1K(A + iI)^{-1}(A_2 + iI).$$

Учитывая (61), получим

$$K_2f_2 = \int_0^\xi e^{-(\xi-s)}\left[f_2'(s) + f_2(s)\right]ds = \lim_{t\to\xi-0} f_2(t).$$

А так как $K_2'g_2 = -g_2(0)$, то аналогично предыдущему имеем

$$S_2(\lambda) = e^{i\lambda\xi},\quad R_2(\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda(\xi-t)} & (t < \xi) \\ 0 & (t \geqslant \xi) \end{cases}$$

Автор выражает глубокую признательность профессору М. С. Лившицу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский и М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, т. XIII, вып. 1 (49), 1958, 3—85.

2. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», 1966.

3. А. В. Штраус. Характеристические функции линейных операторов. Изв. АН СССР, серия матем., т. 24, № 1, 1960, 43—74.

4. А. В. Штраус. О теореме умножения характеристических функций линейных операторов. ДАН СССР, т. 26, № 4, 1959, 723—726.

5. А. В. Кужель. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. ДАН СССР, 178, № 1, 1968, 31—33.

6. А. В. Кужель. Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967, 3—27.

Поступила 13 апреля 1968 г.