ОПЫТЪ ИЗУЧЕНІЯ

СТАЦІОНАРНАГО СОСТОЯНІЯ УПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ.

А. П. Грузинцева.

1.

Предметомъ настоящей статьи будетъ служить рѣшеніе слѣдующаго вопроса: дана упругая изотропная среда, частицы которой выполняютъ нѣкоторыя перемѣщенія, какъ поступательныя, такъ и вращательныя около нѣкоторыхъ осей; эти перемѣщенія даны для точекъ внутри нѣкотораго объема, составляющаго часть данной среды: найдти перемѣщенія и силы, развивающіяся вслѣдствіе этихъ перемѣщеній, въ остальной части среды.

Пусть въ точкѣ M $(x, y\ z)$ данной упругой среды возбуждены молекулярныя перемѣщенія, причемъ частицы вращаются около нѣкоторыхъ осей. Положимъ, что u, v, w суть составляющія параллельно осямъ прямоугольныхъ координатъ поступательнаго перемѣщенія частицы, а ω, χ, ϱ — вращательнаго; далѣе предположимъ, что средина находится или въ равновѣсіи, или въ состояніи установившагося движенія, т. е. средина находится въ стаціонарномъ состояніи, тогда, если X, Y, Z будутъ составляющія внѣшнихъ, дѣйствующихъ на точку M, силъ, поддерживающихъ средину въ стаціонарномъ состояніи, имѣемъ извѣстныя уравненія упругости:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta_2 u=\delta X;\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta_2 v=\delta Y;\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta_2 w=\delta Z;\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{A})$$

здѣсь λ и μ суть коэффиціенты упругости, θ — коэффиціентъ сжатія среды въ точкѣ M, именно:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$ суть дифференціальные параметры 2-го порядка въ прямоугольныхъ координатахъ трехъ функцій u, v, w; δ плотность среды въ точкѣ M; кромѣ того въ этихъ уравненіяхъ X, Y, Z имѣютъ нѣкоторую напередъ данную форму. Такъ-какъ по предположенію частица M вращается около нѣкоторой оси, то кромѣ уравненій (A) должны имѣть мѣсто еще соотношенія между ω, χ, ϱ и u, v, w. Эти соотношенія суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}2\omega=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\text{*};\\2\chi=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x};\\2\varrho=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y};\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{B})$$

* *Kirchhoff's,* Vorlesungen über Mathematische Physik. S. 108.

причемъ, какъ слѣдствіе этихъ равенствъ:

$$\frac{\partial \omega}{dx} + \frac{\partial \chi}{dy} + \frac{\partial \varrho}{dz} = 0.$$

Для удобствъ изслѣдованія мы замѣнимъ уравненія (A) другими. Прибавимъ и вычтемъ изъ каждаго уравненія системы (A) по порядку количества

$$\mu \frac{\partial \theta}{dx}, \ \mu \frac{\partial \theta}{dy}, \ \mu \frac{\partial \theta}{dz}$$

и введемъ ω, χ, ϱ изъ уравненій (B), тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{dx} + 2\mu\left(\frac{\partial \chi}{dz} - \frac{\partial \varrho}{dy}\right) &= \delta X \\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{dy} + 2\mu\left(\frac{\partial \varrho}{dx} - \frac{\partial \omega}{dz}\right) &= \delta Y \\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \theta}{dz} + 2\mu\left(\frac{\partial \omega}{dy} - \frac{\partial \chi}{dx}\right) &= \delta Z
\end{aligned}\right\} \quad \text{(A bis)}$$

Замѣтимъ здѣсь соотношеніе для силъ X, Y, Z.

Продифференцировавъ послѣднія уравненія по x, y, z, по сложеніи результатовъ найдемъ:

$$\frac{\partial X}{dx} + \frac{\partial Y}{dy} + \frac{\partial Z}{dz} = \frac{\lambda + 2\mu}{\delta} \Delta_2 \theta. \qquad \text{(C)}$$

Предположимъ теперь, что средина не сжимаема, т. е. что

$$\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial w}{dz} = 0, \qquad \text{(D)}$$

тогда уравненія (A), (A bis) и (C) обратятся въ новыя болѣе простыя, а именно:

$$\left.\begin{aligned}\mu\Delta_2 u &= \delta X\\ \mu\Delta_2 v &= \delta Y\\ \mu\Delta_2 w &= \delta Z\end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

потомъ

$$\left.\begin{aligned}2\mu\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}-\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) &= \delta X\\ 2\mu\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}-\frac{\partial \omega}{\partial z}\right) &= \delta Y\\ 2\mu\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) &= \delta Z\end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

и

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0. \qquad \text{(C bis)}$$

Такъ какъ силы X, Y, Z вмѣстѣ съ внутренними силами упругости поддерживаютъ средину въ стаціонарномъ состояніи, то мы можемъ напередъ предположить, что X, Y, Z суть функціи u, v, w, т. е. суть нѣкоторыя функціи точки; допустимъ, что X, Y, Z имѣютъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{\mu}X &= \frac{\partial\Delta_2 W}{\partial y}-\frac{\partial\Delta_2 V}{\partial z}\\ \frac{\delta}{\mu}Y &= \frac{\partial\Delta_2 U}{\partial z}-\frac{\partial\Delta_2 W}{\partial x}\\ \frac{\delta}{\mu}Z &= \frac{\partial\Delta_2 V}{\partial x}-\frac{\partial\Delta_2 U}{\partial y}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(K)}$$

эти значенія X, Y, Z удовлетворяютъ тождественно соотношенію (C bis); количества U, V, W суть нѣкоторыя функціи точки, подлежащія опредѣленію.

2.

Приступимъ теперь къ рѣшенію предложенной задачи.

Введемъ вмѣсто u, v, w нѣкоторыя другія функціи координатъ R, U, V, W, связанныя съ u, v, w соотношеніями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

Эти функціи введены, кажется, Лямэ[1].

Эти выраженія для u, v, w, какъ убѣдимся непосредственно, совмѣстны съ предположеніями (K).

И такъ, надо опредѣлить эти четыре функціи, для чего сначала выразимъ при помощи ихъ ω, χ и ϱ.

Положимъ:

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \quad (H)$$

и внесемъ значенія u, v, w изъ (F) въ (B); тогда, при помощи (H), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} 2\omega &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \Delta_2 U \\ 2\chi &= \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \Delta_2 V \\ 2\varrho &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Delta_2 W \end{aligned}\right\} \quad (J)$$

[1] Leçons sur l'élasticité. 2-me éd., p. 149.

а если внесемъ эти значенія ω, χ, ϱ въ уравненія (F), то получимъ соотношенія (K), чѣмъ и оправдается возможность введенія функцій R, U, V, W.

Предъидущее соображеніе показываетъ, что знаніе функцій R, U, V и W рѣшаетъ предложенный вопросъ. Опредѣлимъ эти функціи. Продифференцировавъ (G) по x, y, z соотвѣтственно и внеся результаты въ (D), находимъ:

$$\Delta_2 R = 0. \tag{I}$$

Отсюда опредѣлимъ R.

Для опредѣленія U, V, W изъ уравненій (J) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 U &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\omega \\ \Delta_2 V &= \frac{\partial \Theta}{\partial y} - 2\chi \\ \Delta_2 W &= \frac{\partial \Theta}{\partial z} - 2\varrho \end{aligned}\right\} \tag{L}$$

Положимъ здѣсь

$$\left.\begin{aligned} U &= U' + \frac{\partial P}{\partial x} \\ V &= V' + \frac{\partial P}{\partial y} \\ W &= W' + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{M}$$

причемъ P, U', V', W', суть нѣкоторыя новыя функціи точки, подлежащія опредѣленію.

Для опредѣленія этихъ функцій предположимъ, что

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{dW'}{dz} = 0, \tag{N}$$

тогда для опредѣленія P имѣемъ равенство:

$$\Delta_2 P = \Theta, \tag{P}$$

находимое при помощи (M), (N) и (H).

Внося значенія U, V и W изъ (M) въ (L), найдемъ при помощи (P) слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_2 U' &= -2\omega \\ \Delta_2 V' &= -2\chi \\ \Delta_2 W' &= -2\varrho \end{aligned}\right\} \tag{Q}$$

Такъ-какъ намъ ω, χ, ϱ извѣстны внутри нѣкотораго объема Ω данной средины, то, называя ω_1, χ_1, ϱ_1 ихъ значенія внутри этого объема и распредѣляя эти вращательныя перемѣщенія въ точкахъ объема Ω, какъ плотности или массы, принадлежащія этимъ точкамъ, можемъ удовлетворить уравненіямъ (Q); положивъ[1]:

$$\left.\begin{aligned} U' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\omega_1\, d\tau_1}{r} \\ V' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\chi_1\, d\tau_1}{r} \\ W' &= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\varrho_1\, d\tau_1}{r} \end{aligned}\right| \tag{R}$$

гдѣ ω_1, χ_1, ϱ_1 суть значенія ω, χ, ϱ въ точкѣ M_1 (x_1, y_1, z_1) пространства Ω; $d\tau_1 = dx_1\ dy_1\ dz_1$ есть элементъ объема въ точкѣ M_1 и r есть разстояніе этой точки M_1 отъ данной M, лежащей внѣ объема Ω, т. е.

---

[1] См. *Helmholtz*'s, Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc. Journal von Crelle, 1858, S. 38, или его-же Wissenschaftliche Abhandlungen, 1 Band. S. 115.

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2};$$

интегрированіе же должно быть распространено на весь объемъ точекъ M_1, т. е. на весь объемъ Ω.

Теперь можемъ вычислить u, v, w.

Сначала положимъ по уравненію (P):

$$P = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\Theta_1 d\tau_1}{r} \tag{П}$$

причемъ Θ_1 будетъ значеніе Θ въ точкѣ M_1; затѣмъ будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\omega_1 d\tau_1}{r} + \frac{\partial P}{\partial x} \\ V &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\chi_1 d\tau_1}{r} + \frac{\partial P}{\partial y} \\ W &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{\rho_1 d\tau_1}{r} + \frac{dP}{dz} \end{aligned}\right| \tag{Ш}$$

Прежде чѣмъ идти дальше, замѣтимъ полнѣйшую аналогію нашихъ уравненій (G), (H), (J), (M), (R), (П) и (B) съ уравненіями Максуэлля, данными имъ въ § 616 его извѣстнаго трактата по электричеству и магнетизму (Treatise on el. and magn. Vol. II. pp. 234 — 235). Эта аналогія наводитъ на мысль, что электрическія и магнитныя явленія должны быть приписаны особому состоянію нѣкоторой упругой среды, внутри которой происходятъ вращательныя перемѣщенія частицъ. Указанная аналогія можетъ послужить основаніемъ для новой теоріи электрическихъ и магнитныхъ явленій*, теоріи, которая была уже высказываема

* Для легчайшаго сравненія формулъ Максуэлля съ данными здѣсь можно привести сравнительную таблицу обозначеній Максуэлля и настоящей статьи:

Максуэлль:	У меня:
F', G', H'	U', V', W'
χ, J	P, Θ
F, G, H	U, V, W
$2\pi\mu u, 2\pi\mu v, 2\pi\mu w$	ω, χ, ρ
$\mu\alpha, \mu\beta, \mu\gamma$	$u, v, w.$

въ той или другой формѣ многими учеными, въ томъ числѣ и Максуэллемъ. Не останавливаясь, однако, на этомъ пунктѣ (мы предполагаемъ развить его въ особой статьѣ), перейдемъ къ дальнѣйшему изученію нашего вопроса.

3.

Назовемъ a, b, c косинусы направленія вращательнаго перемѣщенія, величину котораго въ точкѣ M_1 обозначимъ $2\pi k_1$; тогда

$$\omega_1 = 2\pi k_1 a,\ \chi_1 = 2\pi k_1 b,\ \varrho_1 = 2\pi k_1 c.$$

Затѣмъ положимъ:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{\partial r}{\partial z} - c\frac{\partial r}{\partial y}\right);\ u' = \int \frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 c)}{\partial y} - \frac{\partial(k_1 b)}{\partial z}\right);\\ v_1 &= \int \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{\partial r}{\partial x} - a\frac{\partial r}{\partial z}\right);\ v' = \int \frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 a)}{\partial z} - \frac{\partial(k_1 c)}{\partial x}\right);\\ w_1 &= \int \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{\partial r}{\partial y} - b\frac{\partial r}{\partial x}\right);\ w' = \int \frac{d\tau_1}{r}\left(\frac{\partial(k_1 b)}{\partial x} - \frac{\partial(k_1 a)}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{IV})$$

при такихъ положеніяхъ u, v, w будутъ вычисляться по слѣдующимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial R}{\partial x} + u_1 + u'\\ v &= \frac{\partial R}{\partial y} + v_1 + v'\\ w &= \frac{\partial R}{\partial z} + w_1 + w'. \end{aligned}\right| \quad (\mathrm{V})$$

Разсматривая эти выраженія, видимъ, что u, v, w составлены изъ трехъ частей. Первыя части зависятъ отъ нѣкоторой функціи координатъ — функціи, которая вообще отъ вращательныхъ перемѣщеній не зависитъ; вторыя части зависятъ отъ вращательныхъ перемѣщеній въ точкѣ M_1 и наконецъ третьи зависятъ отъ измѣненій ихъ по координатамъ точки M.

Выраженіе для u_1, v_1, w_1 можно преобразовать, сведя интегрированіе по объему на интегрированіе по поверхности этого объема.

Дѣйствительно, замѣчая, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial r}{\partial z_1},$$

получимъ, интегрируя u_1, v_1, w_1 по частямъ

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{(b\gamma - c\beta)k_1 d\sigma_1}{r} + u_1{}', \\ v_1 &= \int \frac{(c\alpha - a\gamma)k_1 d\sigma_1}{r} + v_1{}', \\ w_1 &= \int \frac{(a\beta - b\alpha)k_1 d\sigma_1}{r} + w_1{}'. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Здѣсь, во-первыхъ, α, β, γ суть косинусы направленія нормала къ элементу $d\sigma_1$ поверхности, ограничивающей объемъ Ω точекъ M_1 и, во-вторыхъ, $u_1{}'$, $v_1{}'$, $w_1{}'$ суть u', v', w', въ которыхъ дифференцированіе по x, y, z замѣнено соотвѣтственно дифференцированіемъ по x_1, y_1, z_1. Замѣтимъ, что множители въ скобкахъ имѣютъ простое геометрическое значеніе. Это, ясно, суть количества, пропорціональныя косинусамъ направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ: оси вращенія и нормала къ элементу поверхности $d\sigma_1$; называя уголъ между этими прямыми буквой φ, а косинусы направленія перпендикуляра къ ихъ плоскости λ, μ, ν, имѣемъ:

$$\lambda \sin \varphi = b\gamma - c\beta$$

$$\mu \sin \varphi = c\alpha - a\gamma$$

$$\nu \sin \varphi = a\beta - \alpha b$$

и

$$\cos \varphi = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

4.

Разсмотримъ элементарныя перемѣщенія въ точкѣ M, производимыя элементомъ объема въ M_1.

Элементарныя значенія для u_1, v_1, w_1 будутъ

$$u_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{\partial r}{\partial x} - c\frac{\partial r}{\partial y}\right);$$

$$v_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{\partial r}{\partial y} - a\frac{\partial r}{\partial z}\right);$$

$$w_1 = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{\partial r}{\partial y} - b\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

предполагая при этомъ, что вращенія въ M_1 не зависятъ отъ координатъ точки M.

Что касается R, то, такъ какъ эта функція должна удовлетворять уравненію Лапласа

$$\Delta_2 R = 0,$$

мы можемъ положить:

$$R = \int \frac{\varepsilon d\tau_1}{r};$$

гдѣ ε количество аналогичное плотности; элементарное же значеніе R будетъ:

$$R = \frac{\varepsilon d\tau_1}{r}.$$

Такимъ образомъ получимъ для u, v, w слѣдующія выраженія:

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(b\frac{dr}{dz} - c\frac{dr}{dy}\right)$$

$$v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(c\frac{dr}{dx} - a\frac{dr}{dz}\right)$$

$$w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(a\frac{dr}{dy} - b\frac{dr}{dx}\right).$$

Называя l, m, n косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости k_1 и r, а уголъ между ними знакомъ

$$(rk_1),$$

имѣемъ:

$$b\frac{dr}{dz} - c\frac{dr}{dy} = l\sin(rk_1)$$

$$c\frac{dr}{dx} - a\frac{dr}{dz} = m\sin(rk_1)$$

$$a\frac{dr}{dy} - b\frac{dr}{dx} = n\sin(rk_1)$$

и

$$a\frac{dr}{dx} + b\frac{dr}{dy} + c\frac{dr}{dz} = \cos(rk_1).$$

Тогда:

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} l\sin(rk_1)$$

$$v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} m\sin(rk_1)$$

$$w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} n\sin(rk_1).$$

Положимъ для краткости письма:

$$s = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}, \quad q = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1),$$

тогда для перемѣщеній получимъ слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} u &= s\frac{\partial r}{\partial x} + ql \\ v &= s\frac{\partial r}{\partial y} + qm \\ w &= s\frac{\partial r}{\partial z} + qn. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Умножая эти равенства по порядку сначала на $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$, а потомъ на l, m, n и складывая, находимъ:

$$s = u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z} \qquad \text{(b)}$$

$$q = ul + vm + wn. \qquad \text{(c)}$$

Помножая тѣ-же равенства на a, b, c и складывая, найдемъ

$$ua + vb + wc = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\cos(rk_1). \qquad \text{(d)}$$

Такимъ образомъ заключаемъ слѣдующее: точка M претерпѣваетъ три рода перемѣщеній: 1-ое вдоль радіуса r, это перемѣщеніе измѣняется обратно-пропорціонально квадрату разстоянія отъ точки M_1 (которую мы будемъ называть центромъ перемѣщеній); 2-ое вдоль k_1— это перемѣщеніе измѣняется пропорціонально косинусу угла между r и k_1, и 3-ье вдоль перпендикуляра къ плоскости r и k_1 и измѣняется пропорціонально синусу того-же угла; кромѣ того оба послѣднія перемѣщенія измѣняются вмѣстѣ съ тѣмъ обратно-пропорціонально квадрату разстоянія.

Называя перемѣщеніе вдоль какого-нибудь направленія x символомъ u_x, имѣемъ, слѣдовательно:

$$u_r = -\frac{\varepsilon\, d\tau_1}{r^2};\ u_{k1} = -\frac{\varepsilon\, d\tau_1}{r^2}\cos(rk_1);\ u_q = \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\,. \quad (1)$$

Здѣсь q есть направленіе перпендикуляра къ плоскости r и k_1.

Найдемъ еще перемѣщеніе вдоль перпендикуляра къ r и q; пусть косинусы направленія этого перпендикуляра будутъ ξ, η, ζ, тогда

$$\xi = m\,\frac{\partial r}{\partial z} - n\,\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\eta = n\,\frac{\partial r}{\partial x} - l\,\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\zeta = l\,\frac{\partial r}{\partial y} - m\,\frac{\partial r}{\partial x}$$

или, подставя сюда значенія l, m, n, по приведеніи получимъ:

$$\xi\sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(rk_1) - a$$

$$\eta\sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial y}\cos(rk_1) - b$$

$$\zeta\sin(rk_1) = \frac{\partial r}{\partial z}\cos(rk_1) - c.$$

Называя перемѣщеніе вдоль направленія (ξ, η, ζ) знакомъ u_p, имѣемъ:

$$u_p = u\xi + v\eta + w\zeta = 0, \text{ если уголъ } rk_1 \text{ не нуль.}$$

Итакъ, перемѣщеніе вдоль перпендикуляра къ плоскости $r\ q$ равно нулю.

5.

Разсмотримъ элементарныя перемѣщенія M, производимыя элементомъ поверхности, ограничивающей объемъ Ω.

Формулы (VI) § 3 даютъ:

$$u = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\alpha + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\lambda$$

$$v = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\beta + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\mu$$

$$w = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\gamma + \frac{\sin(n_1 k_1) k_1\, d\sigma_1}{r}\nu,$$

гдѣ n_1 есть направленіе нормала къ элементу поверхности $d\sigma_1$; значенія λ, μ, ν даны въ концѣ § 3.

Отсюда находимъ:

$$u_r = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\cos(n_1 r) + \frac{k_1\, d\sigma_1 \sin(n_1 k_1)}{r}\cos(r q_1)$$

или, зная, что

$$\sin(n_1 k_1)\cos(q_1 r) = -\sin(r k_1)\cos(n_1 q),$$

найдемъ

$$u_r = -\frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}\cos(n_1 r) - \frac{k_1\, d\sigma_1 \sin(r k_1)}{r}\cos(q n_1),$$

гдѣ q_1 направленіе перпендикуляра къ плоскости n_1 и k_1.

Далѣе найдемъ:

$$u_{n_1} = -\frac{\varepsilon d\sigma_1}{r}, \ u_{q_1} = \frac{k_1 d\sigma_1}{r} \sin(n_1 k_1).$$

Изъ этихъ формулъ заключаемъ, что

$$u_r = u_{n_1} \cos(n_1 r) + u_{q_1} \cos(q_1 r).$$

6.

Опредѣлимъ теперь упругія силы, развивающіяся въ точкѣ M вслѣдствіе ея перемѣщеній. Для ихъ вычисленія замѣтимъ предварительно слѣдующія соотношенія между производными r по координатамъ.

Имѣемъ сначала:

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = x - x_1,$$

затѣмъ $r\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 = 1$, оттуда $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2$.

Точно также найдемъ;

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y\, \partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Подобныя же формулы найдемъ для производныхъ по другимъ координатамъ.

Для вычисленія упругихъ силъ, происходящихъ отъ объемныхъ перемѣщеній (§ 4), составимъ

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 - \frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{2k_1 d\tau_1}{r^3} l \frac{\partial r}{\partial x}\sin(rk_1) +$$

$$+ \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} l \frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial x} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \frac{2k_1 d\tau_1}{r^3} l \frac{\partial r}{\partial y}\sin(rk_1) +$$

$$+ \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\frac{\partial l}{\partial y} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} l \frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial y} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \frac{2k_1 d\tau_1}{r^3} m \frac{\partial r}{\partial x}\sin(rk_1) +$$

$$+ \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2} m \frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial x}. \qquad \text{(c)}$$

Складывая послѣднія двѣ формулы, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{2\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \frac{2k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)$$

$$\left(l\frac{\partial r}{\partial y} + m\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\sin(rk_1)\left(\frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{k_1 d\tau_1}{r^2}\left(l\frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial y} + m\frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial x}\right).$$

Но по формуламъ § 4 для l, m, n находимъ:

$$l\frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial y} + \sin(rk_1)\frac{\partial l}{\partial y} = -\frac{b}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z} - \frac{c}{r} + \frac{c}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2,$$

$$m\frac{\partial \sin(rk_1)}{\partial x} + \sin(rk_1)\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{c}{r} - \frac{c}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{a}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Складывая эти послѣднія формулы и подставляя ихъ сумму въ послѣдніе два члена въ скобкахъ въ выраженіи для величины $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(l\frac{\partial r}{\partial y}+m\frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad (1)$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(l\frac{\partial r}{\partial z}+n\frac{\partial r}{\partial x}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{6\varepsilon d\tau_1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\left(m\frac{\partial r}{\partial z}+n\frac{\partial r}{\partial y}\right). \quad (3)$$

Далѣе (a) даетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,l\frac{\partial r}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,m\frac{\partial r}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^3}+\frac{3\varepsilon d\tau_1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{3k_1 d\tau_1}{r^3}\sin(rk_1)\,n\frac{\partial r}{\partial z} \quad (6)$$

или, введя перемѣщенія s и q вдоль r и q, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{3q}{r}\,l\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{3q}{r}\,m\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\\
\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{s}{r}-\frac{3s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{3q}{r}\,n\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Теперь для упругихъ силъ имѣемъ выраженія:

$$p_{xx}=\frac{2\mu s}{r}-\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,l\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$p_{yy}=\frac{2\mu s}{r}-\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,m\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{zz}=\frac{2\mu s}{r}-\frac{6\mu s}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2-\frac{6\mu q}{r}\,n\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$p_{xy} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dy} - \frac{3\mu q}{r}\left(l\frac{dr}{dy} + m\frac{dr}{dx}\right)$$

$$p_{xz} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dx}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu q}{r}\left(l\frac{dr}{dz} + n\frac{dr}{dx}\right)$$

$$p_{yz} = -\frac{6\mu s}{r}\frac{dr}{dy}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu q}{r}\left(m\frac{dr}{dz} + n\frac{dr}{dy}\right).$$

Если введемъ сюда значенія u, v, w изъ § 4, формула (a), то выраженія для упругихъ силъ упростятся и примутъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu u}{r}\frac{dr}{dx}, & p_{xy} &= -\frac{3\mu u}{r}\frac{dr}{dy} - \frac{3\mu v}{r}\frac{dr}{dx} \\ p_{yy} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu v}{r}\frac{dr}{dy}, & p_{xz} &= -\frac{3\mu u}{r}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu w}{r}\frac{dr}{dx} \\ p_{zz} &= \frac{2\mu s}{r} - \frac{6\mu w}{r}\frac{dr}{dz}, & p_{yz} &= -\frac{3\mu v}{r}\frac{dr}{dz} - \frac{3\mu w}{r}\frac{dr}{dy}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

7.

Чтобы удобнѣе было изслѣдовать распредѣленіе натяженій въ нашей средѣ, опредѣлимъ упругія силы вдоль новыхъ ортогональныхъ направленій r, q и p. Для этого по извѣстнымъ формуламъ теоріи упругости составимъ сначала p_{rx}, p_{ry}, ... p_{qx}, ... и затѣмъ уже p_{rr}, p_{rq} и т. п.

Имѣемъ:

$$p_{rx} = p_{xx}\frac{dr}{dx} + p_{xy}\frac{dr}{dy} + p_{xz}\frac{dr}{dz};$$

подставляя сюда значенія p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} изъ предыдущаго параграфа, найдемъ по приведеніи:

$$p_{rx} = -\frac{3\mu u}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{dr}{dx}.$$

Точно также найдемъ:

$$p_{ry} = -\frac{3\mu v}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{rz} = -\frac{3\mu w}{r} - \frac{\mu s}{r}\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Отсюда найдемъ

$$p_{rr} = p_{rx}\frac{\partial r}{\partial x} + p_{ry}\frac{\partial r}{\partial y} + p_{rz}\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{4\mu s}{r}.$$

И такъ, упругая сила вдоль r будетъ:

$$p_{rr} = -\frac{4\mu s}{r}. \qquad (1)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$p_{qx} = \frac{2\mu s}{r} l - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$p_{qy} = \frac{2\mu s}{r} m - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$p_{qz} = \frac{2\mu s}{r} n - \frac{3\mu q}{r}\frac{\partial r}{\partial z};$$

а отсюда

$$p_{qq} = \frac{2\mu s}{r}. \qquad (2)$$

Далѣе:

$$p_{px} = \frac{2\mu s}{r}\xi,\ p_{py} = \frac{2\mu s}{r}\eta,\ p_{pz} = \frac{2\mu s}{r}\zeta;$$

слѣдовательно:

$$p_{pp} = \frac{2\mu s}{r}. \qquad (3)$$

Затѣмъ:

$$p_{rq} = -\frac{3\mu q}{r} \qquad (4)$$

$$p_{rp} = p_{pq} = 0. \qquad (5)$$

Изъ формулъ (1) — (5) заключаемъ, что въ срединѣ около точки M существуютъ слѣдующія силы: 1) сила давленій (т. е. сила нормальная къ плоскому элементу въ M), одинаковыхъ по всѣмъ направленіямъ и равная

$$\frac{2\mu s}{r};$$

2) сила боковыхъ натяженій вдоль q перпендикулярно къ r; эта сила равна:

$$-\frac{3\mu q}{r}$$

и 3) сила давленій спеціальнаго характера; направленная вдоль r и равная

$$-\frac{6\mu s}{r}.$$

Подобные-же результаты найдены Максуэллемъ (§ 642, 2-го тома его трактата по электричеству и магнетизму) при помощи другихъ соображеній.

8.

Прежде чѣмъ примѣнить предыдущія формулы къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ, разсмотримъ условія на поверхности. Называя P давленіе на единицу поверхности нормальное къ ней, по извѣстнымъ формуламъ теоріи упругости находимъ, при помощи формулы I, § 6.

$$P\cos(Px) = -\frac{3\mu u}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{2\mu s}{r}\cos(nx)$$

$$P\cos(Py) = -\frac{2\mu v}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{2\mu s}{r}\cos(ny)$$

$$P\cos(Px) = -\frac{3\mu w}{r}\cos(nr) - \frac{3\mu u_n}{r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{2\mu s}{r}\cos(nz)$$

гдѣ $u_n = u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)$

есть проэкція перемѣщенія вдоль нормала къ поверхности, ограничивающей объемъ точекъ M.

9.

Займемся теперь нѣкоторыми выводами изъ предыдущихъ формулъ—выводами, представляющими извѣстный интересъ. Найдемъ работу силы P вдоль нѣкотораго направленія s; для этого умножимъ уравненія послѣдняго параграфа на $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ и результаты сложимъ, тогда:

$$Pds\cos(Pds) = \frac{6\mu\varepsilon d\tau_1}{r^3}\cos(nr)\cos(rs)\,ds -$$

$$-\frac{3\mu k_1\sin(nk_1)d\tau_1}{r^3}\cos(rp)\cos(rs)\,ds - \frac{2\mu\varepsilon d\tau_1}{r^3}\cos(ns)\,ds -$$

$$-\frac{3\mu k_1 d\tau_1}{r^3}\cos(nr)\sin(rs)\cos(kp)\,;$$

здѣсь p есть перпендикуляръ къ плоскости k_1 и n.

Полагая въ послѣдней формулѣ $s = r$, интегрируя вдоль r отъ $r = \infty$ до $r = r$ и полагая

$$R = \int_{\infty}^{r} Pdr\cos(Pdr)\text{, имѣемъ:}$$

$$R = \frac{2\mu d\tau_1}{r^2}\left(\frac{3}{2}k_1\cos(rp)\sin(nk_1) - \varepsilon\cos(nr)\right)$$

Положимъ здѣсь: $rp = \theta'$, $nk_1 = 90^\circ - \theta$, $nr = \delta$, тогда

$$R = -\frac{2\mu d\tau_1}{r^2}\left\{\varepsilon\cos\delta - \frac{3}{2}k_1\cos\theta\cos\theta'\right\}$$

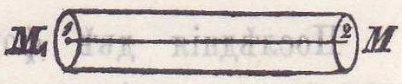
и если въ частномъ случаѣ $\varepsilon = k_1$, то

$$R = -\frac{2\mu k_1 d\tau_1}{r^2}\left\{\cos\delta - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right\}.$$

Это выраженіе весьма любопытно по своему сходству съ извѣстною электродинамическою формулой Ампэра.

10.

Примѣнимъ формулы § 4 къ случаю крайне-тонкаго цилиндра съ какою-нибудь образующей. Разобьемъ его на нѣкоторыя прямолинейныя части $M_1 M$, ограниченныя плоскостями (1) и (2). Пусть



точка M_1 лежитъ на основаніи (1), а — M на основаніи (2) и предположимъ, что ось вращенія k_1 совпадаетъ съ r; тогда

$$u = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dx},\ v = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dy},\ w = -\frac{\varepsilon d\tau_1}{r^2}\frac{dr}{dz}$$

Примемъ r за ось x и положимъ, что

$$d\tau_1 = d\sigma_1\, dr\,,$$

гдѣ $d\sigma_1$ есть элементъ основанія (1); тогда

$$u = -\frac{\varepsilon d\sigma_1 dr}{r^2},\ v = 0,\ w = 0$$

Предполагая, что объемъ Ω распространяется отъ (1) влѣво до безконечности, найдемъ, интегрируя u по r отъ ∞ до r, равнодѣйствующее перемѣщеніе въ M:

$$U' = \frac{\varepsilon\, d\sigma_1}{r}$$

Предполагая цилиндръ крайне тонкимъ, найдемъ по интегрированіи по σ_1 (пренебрегая по этому измѣненіями въ направленіи r)

$$U = \frac{\varepsilon\,\sigma}{r},$$

гдѣ σ будетъ площадь всего сѣченія цилиндра въ M_1. Положимъ:

$$\frac{r}{\sigma} = \gamma,$$

тогда

$$U = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

Послѣднія двѣ формулы показываютъ, что перемѣщеніе въ M 1) пропорціонально нѣкоторому количеству ε, характеризующему точку M_1, и 2) обратно пропорціонально другому количеству γ, которое само измѣняется прямо пропорціонально длинѣ r и обратно — площади сѣченія σ. Замѣчаемъ, слѣдовательно, что U измѣняется подобно силѣ электрическаго тока въ M, причемъ ε будетъ соотвѣтствовать такъ называемой электровозбудительной силѣ, а γ — сопротивленію.

11.

Сдѣлаемъ третье и послѣднее примѣненіе нашихъ формулъ. Въ § 7 найдено, что во всякой точкѣ M среды существуетъ, сверхъ давленія равнаго по всѣмъ направленіямъ, еще боковое натяженіе и давленіе вдоль r. Предположимъ, что k_1 совпадаетъ по направленію съ r, тогда $q = 0$, т. е. боковое натяженіе исчезнетъ и остаются только давленіе одинаковое по всѣмъ направленіямъ и еще особое вдоль r. Это послѣднее равно

$$-\frac{6\mu s}{r}$$

или, подставляя сюда значеніе s изъ § 4,

$$-\frac{6\mu\varepsilon d\tau_1}{r^3}.$$

Положимъ здѣсь $d\tau_1 = d\sigma_1\, dr$, гдѣ $d\sigma_1$ элементъ площади, тогда наше давленіе будетъ

$$3\mu\varepsilon d\sigma_1 d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Интегрируя это выраженіе вдоль r отъ $r = \infty$ до $r = r$, найдемъ

$$\frac{3\mu\varepsilon d\sigma_1}{r^2}.$$

И такъ, дѣйствіе (давленія) безконечно длиннаго цилиндра на точку M, лежащую на разстояніи r отъ его конца вдоль r (она же и ось цилиндра), измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія r. Такимъ образомъ эта сила измѣняется подобно силѣ всемірнаго тяготѣнія.