

Научные работы И. Е. Тарапова в области физико-математических наук и основанной им школы по механике сплошных сред с усложненными свойствами

Борисов И.Д., Кизилова Н.Н., Пацегон Н.Ф., Терехов Л.П.

И. Е. Тарапов является признанным специалистом в области механики жидкости, газа и плазмы. Свою научную деятельность он начал в аспирантуре Харьковского государственного университета при кафедре теоретической механики. Научные исследования, составившие основу его кандидатской диссертации (1953 г.), посвящены гидро- и газодинамической теории смазки. И. Е. Тарапов впервые применил в задачах теории смазки метод интегральных соотношений, что позволило эффективно решить ряд практически важных и интересных задач. Продолжая работы в области гидродинамической теории смазки, И. Е. Тарапов первым поставил и решил задачу о магнитогидродинамическом подшипнике (1969). Эта задача нашла широкое применение в ряде реальных конструкций (США, Япония), а также послужила толчком для изучения магнитогидродинамических вязких течений в тонких слоях. Затем И. Е. Тараповым был теоретически решен вопрос об эффективности различных схем МГД-подшипников.

Один из важнейших этапов научной деятельности И. Е. Тарапова связан с механикой намагничивающихся и поляризующихся сплошных сред. Эти работы явились продолжением основополагающих трудов академика АН СССР Л. И. Седова. И. Е. Тараповым была получена замкнутая система уравнений и краевых условий, описывающих поведение изотропной сплошной среды в электромагнитном поле при произвольных законах намагничивания и поляризации, а также сформулирована краевая задача для электромагнитного поля в движущейся среде. Предложенная им модель изотропной сплошной среды, взаимодействующей с электромагнитным полем, позволила качественно объяснить и количественно описать ряд макроскопических физических явлений, наблюдаемых в намагничивающихся и поляризующихся средах, в частности, в феррожидкостях и жидких диэлектриках. Различные приближения этой модели в случае преобладающего влияния магнитного поля по сравнению с электрическим на движение сплошной среды, либо наоборот – электрического над магнитным, сыграли большую роль в становлении и развитии новых областей механики сплошных сред – «феррогидродинамики» и «электрогидродинамики». Система уравнений в этих приближениях описывает основные эффекты пондеромоторного взаимодействия среды с электромагнитным полем, обладает достаточной простотой и поэтому является «рабочей системой» при инженерных расчетах и фундаментальных исследованиях отечественных и зарубежных ученых (см. Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. Т.18. М., ВИНТИ, 1981).

И. Е. Тараповым рассмотрен ряд прикладных задач гидромеханики намагничивающихся и поляризующихся сред, а также задачи гидростатики и определения равновесных форм свободной поверхности жидкости и ее устойчивости в электромагнитных полях.

Свои работы И. Е. Тарапов многократно докладывал на всесоюзных и республиканских научных конференциях и совещаниях. Работы И. Е. Тарапова и его учеников нашли признание за рубежом. Так, полученная в 1972 г. проф. И. Е. Тараповым система уравнений движения изотропно намагничивающейся и поляризующейся среды нашла подтверждение в экспериментах, проведенных в Кэвендишской лаборатории (см. IEEE Trans. Magn. 1980, 16, № 2, 309-316); на работы, написанные И. Е. Тараповым совместно с учениками, ссылается ряд зарубежных ученых.

Продолжая исследования в области намагничивающихся и поляризующихся сред, И. Е. Тарапов рассмотрел интегралы уравнения движения основной системы и сформулировал вариационный принцип для идеально намагничивающихся и поляризующихся сред. Последние годы жизни И. Е. Тарапова связаны с разработкой теории сплошных сред с распределенными источниками массы, импульса и энергии, с некоторыми задачами механики кровообращения, а также с завершением работы над трехтомником «Механика сплошных сред», основанном на одноименном курсе лекций, который И. Е. Тарапов более 20 лет читал студентам-механикам, постоянно его усовершенствуя и дополняя.

В данной статье приведен краткий, обзор научных результатов, полученных И. Е. Тараповым, его учениками и развитых в последующие годы представителями школы И. Е. Тарапова по механике сплошных сред с усложненными свойствами.

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ШКОЛЫ И. Е. ТАРАПОВА

1. Гидро- и магнитогидродинамическая теория смазки.
2. Гидродинамика намагничивающихся и поляризующихся сред.
3. Волновые движения намагничивающихся и поляризующихся сред.
4. Вариационные принципы гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред.
5. Динамика сплошных сред с источниками массы, импульса и энергии.
6. Механика кровообращения.

1. Гидро- и магнитогидродинамическая теория смазки.

В научной деятельности И. Е. Тарапова заметное место занимают проблемы гидродинамической теории смазки, являющейся основой расчета реальных опор жидкостного трения. При проектировании современных быстроходных подшипников скольжения важно учитывать влияние, оказываемое силами инерции смазки на рабочие характеристики узла.

В его кандидатской диссертации [2] исследовано плоское течение вязкой среды в тонком зазоре между цилиндрическими поверхностями. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Применительно к цилиндрическому подшипнику уравнения движения смазки записаны в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left[h \int_0^1 v_\varphi^2 d\eta \right] &= -h \frac{dp}{d\varphi} + \frac{v_0}{\omega \delta^2 h} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}^{\eta=1}, \\ h \int_0^1 v_\varphi d\eta &= Q = \text{const}, \\ p &= p(\varphi), p(\varphi + 2\pi) = p(\varphi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\delta = R - r$, $\varepsilon = l / \delta$; $h(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos \varphi$; $\varphi = q_1$; $v_0 = \mu_0 / \rho_0$. Влияние, оказываемое силами инерции, характеризуется значением числа Рейнольдса $\omega \delta^2 / v_0$. Основная идея использования метода интегральных соотношений в задачах смазки сводится к тому, что продольная скорость в (1.1) ищется в виде:

$$v_\varphi = A(\varphi)\eta^m + B(\varphi)\eta + C(\varphi).$$

При этом выполнены граничные условия: $v_\varphi(\varphi, 0) = 1$, $v_\varphi(\varphi, 1) = 0$.

Выводы, получаемые в результате решения задачи, имеют компактный вид и могут быть непосредственно использованы в инженерных расчетах. Например, силы инерции существенно изменяют распределение давления в зазоре (рис. 2) (ψ - угол, образованный вектором полезной нагрузки и линией центров) [10].

В связи с этим появляется составляющая полезной нагрузки $\vec{P}$, параллельная линии центров, что приводит к уменьшению коэффициента трения $f = M / rP$, где M – суммарный момент сил трения на вращающемся вале, а коэффициент трения суть:

$$f = f(m, \varepsilon, \omega) = \frac{\delta}{r} \frac{2(m-1+m\varepsilon^2)}{\varepsilon m(m+1) \left\{ 1 + \left[\frac{\omega \delta^2}{v_0} \Phi(\varepsilon, m) \right]^2 \right\}^{1/2}}$$

Другая актуальная проблема связана с тем, что в экстремальных (типичных для современного этапа развития техники) внешних условиях эксплуатации конструкций обычные материалы разрушаются. Возникает необходимость использования смазки с усложненными свойствами. Так, при высоких температурах, имеющих место в металлургии, перспективно в качестве смазки подшипников скольжения применять жидкий металл.

И. Е. Тарапов выполнил цикл исследований, посвященных изучению движения электропроводных сред в зазорах узлов трения (см., например, [12,18,19]). В его работах, связанных с указанной тематикой, всесторонне проанализировано влияние, оказываемое электромагнитным полем на рабочие параметры конструкций. Принципиально новым подходом к

проблемам смазки является анализ эффективности магнитогидродинамических опор, основанный на подсчете затрат внешней энергии, приходящейся на единицу полезной нагрузки [23].

Необходимо отметить, что в работах И. Е. Тарапова, посвященных теории смазки, рассмотрены разнообразные геометрические формы зазоров в узлах трения. Например, исследованы трехмерные движения вязких сред в подшипниках конечной длины [1, 2], а также в шаровой МГД-опоре [28].

Впоследствии результаты, полученные И. Е. Тараповым в кандидатской диссертации, были развиты его учениками. На кафедре теоретической механики ХГУ под руководством И. Е. Тарапова выполнил диссертационную работу «Основные задачи теории смазки подшипника с плавающей втулкой» аспирант из Сирии И. М. Аль-Насан. В ней подробно изучены характеристики узла трения, смазочный зазор которого разделен втулкой на две части. При этом установлено, что при определенных соотношениях между размерами вращающегося вала, неподвижного подшипника и промежуточной втулки существенно уменьшаются относительные потери на трение, что свидетельствует о повышении эффективности работы конструкции [36].

И. Е. Тарапов был научным руководителем кандидатской диссертации Л.П.Терехова «Специальные задачи гидродинамической теории смазки», выполненной на кафедре теоретической механики ХГУ. В ней было изучено влияние, оказываемое внешним электромагнитным полем на устойчивость стационарных вращений вала в радиальном МГД-подшипнике [20]. С помощью метода интегральных соотношений учтены силы инерции проводящей смазки при анализе зон стабильной работы узлов трения. Была решена плоская задача теории смазки в многосвязной области, ограниченной боковыми поверхностями вращающихся круговых цилиндров, при произвольных размерах зазора. Изучены характеристики работы узла жидкостного трения с усложненной кинетической схемой, когда подвижными являются обе граничные поверхности. Рассмотрены некоторые задачи теории смазки в нестационарной постановке. При этом исследованы случаи торможения и разгона вала, а также ситуация, когда угловая скорость шипа изменяется по гармоническому закону. Результаты теоретических исследований были сопоставлены с экспериментальными данными о работе реальных конструкций. Исследована задача об оптимальной геометрической форме смазочного зазора подшипника, работающего в нестационарном режиме разгона. Показано, что максимальное значение грузоподъемности узла (при фиксированном значении минимального зазора) имеет место при использовании опоры, имеющей ступенчатую форму.

2. Гидродинамика намагничивающихся и поляризующихся сред [32,111].

Как известно, в магнитной гидродинамике обычно намагниченность среды не учитывается, а в электрогидродинамике зачастую принимают, что диэлектрическая проницаемость среды постоянна. Однако во многих задачах, имеющих в настоящее время практическое значение,

модель, в которой предполагается постоянство магнитной (μ) и диэлектрической (ε) проницаемостей для жидкостей и газов, не может считаться удовлетворительной.

Даже у слабомагнитных веществ ($|\mu - 1| \ll 1$) эффект намагниченности и зависимость μ от термодинамических переменных и поля могут быть весьма существенны в сильных полях. Учет слабого магнетизма среды становится необходимым в тех задачах магнитной гидродинамики, где используются различные приближения, так что наряду с $|\mu - 1|$ появляется еще один или несколько малых параметров и заранее неясно, как они входят в приближенное решение. Даже при слабой зависимости μ , ε от полей и термодинамических переменных, в областях, где возможны большие градиенты этих переменных, становятся значительными по величине и $\nabla\mu$, $\nabla\varepsilon$. Заметим, что целый ряд обычных жидкостей, растворов, органических соединений обладают поляризацией, существенно меняющейся с изменением температуры, плотности и поля.

В последнее время разработан ряд способов получения ферромагнитных жидкостей, которые обладают сильной намагниченностью, зависящей от температуры и поля, способны в обычных полях намагничиваться до насыщения и вследствие этого имеют широкий диапазон технических применений. Наконец, следует иметь в виду, что магнетизм весьма тесно связан с другими свойствами вещества (электрическими, оптическими, механическими, тепловыми), и это может оказаться решающим в деле измерения физико-химических свойств сред, поскольку магнитные свойства, в частности, свойства, связанные с намагничиванием, легко поддаются измерению.

Главной целью докторской диссертации И. Е. Тарапова явилось установление основных законов гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся в электромагнитном поле сред. Вместе с тем важно проследить, как эти законы проявляются в ряде основных задач гидро- и газодинамики, чтобы, выявив те особенности движения, которые определяются намагничиванием или поляризацией и становятся решающими при определенных условиях.

В соответствии с этим в докторской диссертации И. Е. Тарапова:

- I. Получена замкнутая система основных уравнений движения сред, которые по произвольным изотропным законам поляризуются и намагничиваются в электромагнитном поле; рассмотрены особенности этой системы, выведены некоторые ее интегралы, сформулированы соответствующие граничные условия.
- II. На основе полученного решения задачи о распространении волн малой амплитуды в средах с произвольными законами изотропного намагничивания и поляризации выяснены критерии устойчивости состояния этих сред.
- III. Изучены особенности волн конечной амплитуды в средах с намагничиванием и поляризацией, превращение их в разрывы, эволюционность этих разрывов.

- IV. Полученные уравнения гидростатики сред с намагничиванием и поляризацией проанализированы на ряде задач, в которых намагничивание и поляризация играют основную роль (деформация и устойчивость поверхности раздела в электромагнитном поле).
- V. Решены характерные задачи течения намагничивающихся сред в каналах, позволяющие выяснить возможности использования явления намагниченности жидкостей в вопросах, представляющих интерес с точки зрения непосредственных технических применений.

Ниже, в соответствии с перечисленными пунктами I–V, охарактеризованы основные результаты, полученные И. Е. Тараповым в этой области механики сплошных сред.

I. Система уравнений гидродинамики сред, изотропно поляризующихся и намагничивающихся в электромагнитном поле, полученная в нерелятивистском приближении квазистационарности процессов, имеет следующий вид [38]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \cdot \operatorname{div} \vec{v}; \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} \hat{P} + \vec{f}^*; \\
 \rho T \frac{dS^*}{dt} &= \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \Phi^*; \quad P = P(\rho, T); \quad S = S(\rho, T) \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \operatorname{rot} \vec{E}; \\
 \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_e; \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = c \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}; \\
 \vec{f}^* &= \rho_e^* \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j}^* \times \vec{B}^*) - \nabla(\psi^{(\rho)*} + \chi^{(\rho)*}) + P^* \nabla \vec{E}^* + \vec{M}^* \nabla \vec{H}^*; \\
 S^* &= S(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^{E^*} \left(\frac{\partial P^*}{\partial T} \right)_{\rho, E^*} dE^* + \frac{1}{\rho} \int_0^{H^*} \left(\frac{\partial M^*}{\partial T} \right)_{\rho, H^*} dH^*; \\
 \vec{B}^* &= \vec{H}^* + 4\pi \vec{M}^*(\rho, T, H^*) \frac{\vec{H}^*}{H^*} \equiv \mu_* \vec{H}^*, \\
 \vec{D}^* &= \vec{E}^* + 4\pi \vec{P}^*(\rho, T, E^*) \frac{\vec{E}^*}{E^*} \equiv \varepsilon_* \vec{E}^*; \quad \vec{j}^* = \sigma \vec{E}^*.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В диссертации И. Е. Тарапова принята линейная зависимость между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, а процессы намагничивания и поляризации считаются обратимыми, так что

$$\begin{aligned}
 p_{ij} \equiv \|\hat{p}\|_{ij} &= -pg_{ij} + \eta_1 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \left(\eta_2 - \frac{2}{3} \eta_1 \right) g_{ij} \operatorname{div} \vec{v}, \\
 \Phi^* &= \tau_j^i \nabla_i v^j + \overline{j^* E^*}, \quad (\tau_j^i \equiv p_j^i + pg_j^i).
 \end{aligned}$$

Функции намагничивания M^* и поляризации P^* считаются известными либо из эксперимента, либо из теоретических предпосылок. Кроме того, следует иметь в виду зависимости между значениями электромагнитных величин в лабораторной и собственной системе отсчета (в этой системе они отмечены знаком *); эти зависимости в рассматриваемом приближении ($v^2 \ll c^2$) имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{H}^* &= \vec{H} - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{D}), & \vec{B}^* &= \vec{B} - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{E}), \\ \vec{E}^* &= \vec{E} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}), & \vec{D}^* &= \vec{D} + \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{H}), \\ \rho_e^* &= \rho_e, & \vec{j}^* &= \vec{j} - \rho_0 \vec{v}.\end{aligned}$$

Таким образом, система 27 скалярных уравнений (2.1) замкнута и служит для определения множества определяющих параметров: $\rho, p, T, S, \rho_e, S'^*, \vec{v}, \vec{H}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$.

Квазистационарные процессы в рассматриваемых средах описываются уравнением Гиббса, которое можно представить в виде

$$TdS'^* = dU'^* + p'^* d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{\vec{E}^*}{4\pi} d\left(\frac{\vec{D}^*}{\rho}\right) - \frac{\vec{H}^*}{4\pi} d\left(\frac{\vec{B}^*}{\rho}\right),$$

где U'^*, p'^* – полные внутренняя энергия и давление выражаются, как и полная энтропия S'^* (см. (1)), через функции намагничивания M^* и поляризации P^* с помощью формул

$$\begin{aligned}p'^* &= p(\rho, T) + p^{j*}(\rho, T, H^*) = p(\rho, T) + \frac{H^{*2} + E^{*2}}{8\pi} + \psi^{(\rho)*} + \chi^{(\rho)*}, \\ U'^* &= U(\rho, T) + U^{j*}(\rho, T, H^*) = U(\rho, T) - \frac{H^{*2} + E^{*2}}{8\pi\rho} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho}(\vec{E}^* \cdot \vec{D}^* + \vec{H}^* \cdot \vec{B}^*) - \frac{1}{\rho}(\psi^{(T)*} + \chi^{(T)*}), \\ \left(\psi^{(T)*} \equiv -T^2 \int_0^{H^*} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{M^*}{T} \right)_{\rho, H^*} dH^*, \quad \chi^{(T)*} \equiv -T^2 \int_0^{H^*} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P^*}{T} \right)_{\rho, E^*} dE^* \right).\end{aligned}$$

При этом тензор полных напряжений в среде $\hat{p}^*$ имеет компоненты

$$p_{ik}^* = p_{ik} + p_{ik}^{j*} = p_{ik} - p^{j*} g_{ik} + \frac{1}{4\pi}(E_i^* \cdot D_k^* + H_i^* \cdot B_k^*).$$

В МГД-приближении, т.е. когда $E \sim \frac{v}{c}H$, из (2.1) получаем следующую систему 14-ти уравнений для определения $\rho, p, T, S, \vec{v}, \vec{B}, \vec{H}, S'$:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}, \quad p = p(\rho, T), \quad S = (p, T), \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \psi^{(\rho)}) + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B}) + M\nabla H + \text{div} \hat{\tau},$$

$$\vec{B} = B_c(\vec{i}_x + \vec{b}(x, t)),$$

$$\text{div} \vec{B} = 0; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi} \text{rot}\left(\frac{\text{rot} \vec{H}}{\sigma}\right),$$

$$S' = S(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH,$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi M(\rho, T, H) \frac{\vec{H}}{H} \equiv \mu(\rho, T, H) \vec{H}.$$

При этом ρ_e и поле $\vec{E}$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{D} &= 4\pi \rho_e, & \vec{E} &= \frac{\vec{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B}), \\ \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi P(\rho, T, E) \frac{\vec{E}}{E} + \frac{4\pi}{c}(\vec{v} \times \vec{M}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В диссертации рассмотрены и другие частные случаи системы (2.1), например, система уравнений электрогидродинамики с учетом поляризации (ЭГД-приближения), когда $H \sim vE/c$. Эта система при $\rho_e = 0$ совпадает с системой (2.2), в которой следует положить $\vec{j} = c(4\pi)^{-1} \text{rot} \vec{H} = 0$, исключить уравнение индукции и заменить $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на $\vec{D}$ и $\vec{E}$.

Уравнение энергии в МГД-приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Xi - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{BH}{4\pi} \right) &= \\ &= -\text{div} \left\{ \vec{v} \left(\Xi + p + \psi^{(\rho)} \right) + \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) + \lambda^0 \nabla T - \vec{v} \cdot \hat{\tau} \right\} \end{aligned}$$

где $\Xi = \frac{\rho v^2}{2} + \rho U - \psi^{(T)}$.

В стационарном потоке непроводящей среды с $\lambda^0 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ это уравнение имеет интеграл вида [37]:

$$\Xi + p + \psi^{(\rho)} = C,$$

где постоянная C зависит от линии тока. В случае проводящей среды этот интеграл существует лишь при $\vec{v} \parallel \vec{H}$.

Уравнение импульсов из системы (2.2) для идеальной непроводящей среды ($\lambda^0 = \eta_1 = \eta_2 = 0$) также допускает в стационарном случае интеграл вдоль линий тока, который имеет вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \psi^{(\rho)} - \int_0^H M dH = const.$$

В случае проводящей среды этот интеграл существует, если $\vec{v} \parallel \vec{H}$, или $\vec{v} \parallel \vec{j}$, или если Лоренцева сила имеет потенциал.

Уравнения (2.1) являются обобщением уравнений для случая линейной поляризации и намагничивания, т.е. когда $\vec{B} = \mu(\rho, T)\vec{H}$ и $\vec{D} = \varepsilon(\rho, T)\vec{E}$. При $M = \rho M_0(T, H)$ уравнение импульсов и уравнение переноса тепла из (2) совпадают с уравнениями, обычно используемыми для анализа движения ферромагнитных жидкостей. Следует заметить, что всюду в диссертации среда рассматривается как однокомпонентная сплошная среда с плотностью внутренних моментов количества движения равной нулю.

Наиболее общий подход к построению в рамках теории относительности моделей сплошных сред, в том числе для поляризующихся и намагничивающихся сред, разработан в трудах Л. И. Седова. В основе этого метода лежит вариационное уравнение [112]:

$$\delta \int_{V_4} \Lambda dV_4 + \delta W^* + \delta W = 0, \quad (2.4)$$

где Λ – плотность функции Лагранжа, δW^* – некоторый функционал, характеризующий внешние объемные силы в четырехмерном объеме V_4 взаимодействия данной среды с внешними полями и телами, δW – функционал, определяемый заданием Λ и δW^* .

Если задать

$$\Lambda = \frac{\rho V^2}{2} - \rho V - \frac{1}{2} F_{ik} \Phi^{ik} - \frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik},$$

$$\delta W^* = \int_{V_4} \{ \rho T dS + J^k \delta A_k + J^k A_i \nabla_k \delta x^i - F_i \delta x_i \} dV_4,$$

то из (2.4) следуют уравнения движения, в которые входит функция внутренней энергии U для сред с поляризацией и намагничиванием (здесь: F_{ik} – компоненты тензора электромагнитного поля, Φ_{ik} – компоненты тензора поляризации, $\vec{A}$ – электромагнитный потенциал, $J^\alpha = c^{-1} j^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $J^4 = \rho_e c^{-1}$; F_i – массовая сила).

Выбирая в качестве U квадратичную форму относительно компонент тензора $\pi_{ik} = \rho^{-1} \Phi_{ij}$, можно получить модель среды с уравнениями в виде $\vec{B} = \mu(\rho, T)\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon(\rho, T)\vec{E}$.

В диссертации И. Е. Тарапова внимание в основном сосредоточено на нерелятивистской модели сред с произвольными изотропными законами намагничивания и поляризации, а также на основных задачах гидромеханики таких сред. При анализе задач, рассмотренных в диссертации, использовались для случая слабых полей формулы Клазиуса-Мосотти

$$\mu = \mu(\rho, T) \quad (2.5)$$

и аналогичного вида зависимости для $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ известной как формулы Лоренц–Лорентца.

В случае магнитного насыщения среды принималась линейная зависимость намагничивания от температуры $M(\rho, T) = K(\rho)(\theta - T)$, $(\theta > T)$. Эти формулы достаточно хорошо подтверждены экспериментами как для газообразных, так и для жидких сред. В более общих выводах при учете нелинейной зависимости M от H принималось, что для парамагнетиков выполнены неравенства $\frac{\partial M}{\partial H} \geq 0, \frac{\partial^2 M}{\partial^2 H} \leq 0$, а для диамагнетиков – $\frac{\partial M}{\partial H} \leq 0, \frac{\partial^2 M}{\partial^2 H} \geq 0$; этим неравенствам удовлетворяет подавляющее большинство кривых намагничивания.

Исходя из общей системы уравнений (2.1), в диссертации получено выражение для силы $\vec{F}^{\circ}$ электромагнитного происхождения (при $E = H = 0$ сила $\vec{F}^{\circ} = 0$), действующей на тело, движущееся произвольным образом в среде с намагничиванием и поляризацией:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\circ} = & \int_{\Omega} \{ \rho_e \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) - \frac{1}{c^2} (\vec{j} \times (\vec{V} \times \vec{E})) + M^* \nabla H^* + P^* \nabla E^* \} d\Omega + \\ & + \int_{S_{\Omega}} \{ \mathcal{G}^* \vec{E}_{\tau}^* + \frac{1}{c} (\vec{i} \times B_n^* \vec{n}) \} dS_{\Omega} + \int_{S_{\Omega}} R \vec{n} dS_{\Omega}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$(R = \mathcal{G}^* D_n^* + \frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{i}^*) \vec{H}_{\tau} - \psi^{(\rho)*} - \chi^{(\rho)*} - 2\pi [M_n^{*2} + P_n^{*2}]).$$

Здесь: Ω – область, занимаемая телом в данный момент времени, S_{Ω} – поверхность тела; $\vec{n}$ – орт внешней нормали к S_{Ω} ; $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ – скорость точки $\vec{r}$ тела, $\mathcal{G}^*, \vec{i}^*$ – поверхностная плотность зарядов и поверхностный ток на поверхности тела; индексом * отмечены значения величин в собственной системе координат, имеющей скорость $\vec{V}$ относительно системы наблюдателя; индексом (+) отмечены значения величин на поверхности со стороны окружающей тело среды, а (-) – со стороны тела;

$$\vec{a} = \frac{1}{2} (a^+ + a^-); [a] = a^+ - a^-.$$

Если тело и среда не содержат свободных зарядов и не проводят тока, то сила $\vec{F}^{\circ}$ возникает исключительно за счет свойств поляризации и намагничивания как самого тела, так и окружающей среды. В этом случае выражение для $\vec{F}^{\circ}$ получается из (2.6), если в нем положить $\rho_e = \vec{j} = \mathcal{G}^* = \vec{i}^* = 0$.

Если неподвижное тело обтекается стационарным потоком среды, то сила $\vec{F}^{\circ}$ может быть выражена через интеграл по контрольной поверхности S_0 следующим образом:

$$\vec{F}^y = - \int_{S_0} (\{\psi^{(\rho)} + \chi^{(\rho)} + \frac{H^2 + E^2}{8\pi}\} \vec{n} - \frac{1}{4\pi} (B_n \vec{H} + D_n \vec{E})) dS_0.$$

Исходя из этого выражения, получено, что $\vec{F}^y = 0$, если: тело не содержит свободных зарядов, в среде μ, ε постоянны, а поля $\vec{H}$ и $\vec{E}$ на бесконечности постоянны. В диссертации доказано, что и в случае произвольного движения тела $\vec{F}^y$ обращается в нуль, если тело и среда не проводят тока, не содержат зарядов, $\nabla \mu = \nabla \varepsilon = 0$ в теле и среде, а поля $\vec{H}$ и $\vec{E}$ однородны на бесконечности.

Выражения, связывающие $\vec{H}$ и $\vec{E}$ с $\vec{j}, \vec{M}, \vec{P}$, которые получены с помощью некоторых обобщений формулы Грина, примененных для представления электромагнитного поля в движущейся намагничивающейся и поляризующейся среде, могут быть весьма полезны [38] в решении конкретных задач. Так, с помощью соотношения, связывающего индуцированное поле $\vec{H}_i$ с токами и вектором намагниченности в некоторой области Ω и на ее границе S_Ω

$$\vec{H}_i(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} (\vec{j} \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|}) d\Omega - \int_{\Omega} (\text{div} \vec{M}) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} d\Omega + \int_{S_\Omega} M_n^+ \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} dS_\Omega$$

В диссертации И. Е. Тарапова получено также решение задачи [25] об определении индуцированного поля внутри бесконечной полосы насыщенного магнетика при произвольном законе намагничивания; это решение имеет вид:

$$\vec{H}_i = -\vec{i}_y \frac{4\pi H_{0y}}{H_0} \left\{ \frac{\partial M}{\partial y} \left(y - \frac{h(x)}{2} \right) + \frac{M(x, h) + M(x, 0)}{2} \right\} \quad (2.7)$$

где $\vec{H}_0$ – внешнее поле, слой магнетика расположен в области $0 \leq y \leq h(x), -\infty < x < +\infty$.

Большой интерес представляют те особенности, которые приносит способность среды к намагничиванию в условия на сильных скачках. Число этих условий для идеальной намагничивающейся среды, как и в случае среды с $\mu = 1$, равно восьми. На контактных разрывах ($V_n = 0, H_n \neq 0$) давление не является непрерывной величиной, как в среде с $\mu = 1$; его скачок оказывается равным

$$[p] = \left[\rho^2 \frac{\partial u_\mu}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi} \mu H_n^2 \right], \quad \left(u_\mu \equiv \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu H dH \right)$$

и определяется разностью магнитных проницаемостей на разрыве. Так, например, если μ постоянно в средах по обе стороны разрыва или $M = M(T)$, то давление всегда больше в среде с меньшей проницаемостью, а скачок давления определяется величиной как нормальной, так и касательной составляющих магнитного поля. Если парамагнитные среды намагничиваются по

закону (2.5), давление всегда больше в среде с большей магнитной проницаемостью, а скачок давления определяется только величиной касательной компоненты поля.

На тангенциальных разрывах ($V_n = 0$, $H_n = 0$) скачок давления имеет вид

$$[p] = \left[\rho^2 \frac{\partial u_\mu}{\partial \rho} \right]$$

и определяется не только разностью магнитных проницаемостей, но и касательных компонент поля $\vec{H}_\tau$. Таким образом, если в немагнитной среде ($\mu = 1$) при наличии на разрыве поверхностного тока всегда есть скачок давления, то в намагничивающейся среде магнитострикционные напряжения могут полностью компенсировать этот скачок (например, в средах с $\mu(\rho, T)\rho^{-1} = \text{const}$).

Разрывы альфвеновского типа ($V_n \neq 0$, $[\rho] = 0$), которые в немагнитной среде, как известно, всегда обладают свойством круговой поляризации, в намагничивающейся же среде могут быть как вращательными, так и плоско-поляризованными. Скорость движения плоско-поляризованного разрыва альфвеновского типа $\left(V_n \geq A_n \equiv \sqrt{\frac{\mu_1 H_n^2}{4\pi\rho}} \right)$, причем при знаке равенства может существовать как вращательный разрыв (например, если $\mu = \mu(\rho, T)$), как плоско-поляризованный разрыв.

Ударные волны ($V_n \neq 0$, $[\rho] \neq 0$) в намагничивающейся среде, как и в случае ($\mu = 1$), всегда плоско-поляризованы.

Уравнение ударной адиабаты для намагничивающейся среды имеет вид [38, 48]:

$$[W'] = \frac{1}{\rho} \left[p' - \frac{\mu H_n^2}{4\pi} \right] - \frac{1}{4\pi} \frac{\mu H_\tau}{\rho} [H_\tau],$$

где $p' = p + p^\gamma = p - \rho^2 \frac{\partial u_\mu}{\partial \rho}$ – полное давление в среде;

$W' = W + U^\gamma + \frac{p^\gamma}{\rho} - \frac{HB}{4\pi\rho} = W - u_\mu - \rho \frac{\partial u_\mu}{\partial \rho} + T \frac{\partial u_\mu}{\partial T}$ – полная энтальпия в среде $\left(W = U + \frac{p}{\rho} \right)$; черта

сверху, как и в (2.6), означает среднее значение, а прямые скобки – интенсивность скачка.

В случае $[H_\tau] = 0$ из предыдущей формулы имеем уравнение ударной адиабаты для непроводящей намагничивающейся среды.

Условия на сильных скачках в поляризующихся и намагничивающихся средах рассмотрены в § 2.4 диссертации.

II. При анализе волн в проводящей намагничивающейся среде [35, 44], рассматриваемой в МГД-приближении, исходной является система, полученная линеаризацией (2) относительно некоторого невозмущенного состояния. Эта линеаризованная система имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + x_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} = d_{ik} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, 7), \quad (2.8)$$

где u_i – возмущения магнитогидродинамических переменных $\rho, S, V_x, V_y, V_z, B_y, \mathbf{B}_z$ (волны распространяются вдоль оси x); d_{ik} – коэффициенты, определяющие диссипацию.

Из свойств матрицы $\|x_{ik}\|$, как показано в § 3.1, следует, что среди ее семи собственных значений есть одно нулевое, а остальные шесть составляют пары чисел, одинаковых по величине и разных по знаку. Таким образом, в намагничивающейся по произвольному закону $\mu = \mu(\rho, T, H)$ среде, как и в случае ($\mu = 1$), существует так называемая энтропийная волна с нулевой фазовой скоростью и наряду с волнами, распространяющимися в положительном направлении оси x - ов, существуют волны, распространяющиеся в обратном направлении с той же фазовой скоростью.

Энтропийная волна в намагничивающейся среде, как оказывается, не является чисто продольной, ибо в ней испытывает возмущение поперечная компонента поля; таким образом, любое малое возмущение плотности, перемещающееся вместе со средой, обязательно вызовет изменение поля в этом месте. Альфеновские же волны в намагничивающейся среде имеют фазовую скорость $\pm B_x (4\pi\rho\mu(\rho, T, H))^{-1/2}$

Существенной особенностью магнитозвуковых волн в намагничивающейся среде является то, что их фазовые скорости независимо от величины волнового вектора ($k > 0$) могут приобретать комплексные значения, так что система (2.8) перестает быть гиперболической, а состояние среды становится неустойчивым (этот результат содержится в § 3.3, см. также [35, 40]). Характерно, что явление неустойчивости намагничивающейся среды наступает в результате магнитострикционных и магнитокалорических эффектов: при $\mu = \mu(H)$, т.е. при $\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu}{\partial T} = 0$ все фазовые скорости действительны. Для идеального газа, намагничивающегося по закону (2.5), неустойчивость наступает при

$$A^2 \equiv B^2 (4\pi\rho\mu)^{-1} > a^2 n (\mu - 1)^{-2},$$

$$n = n(\varpi, \mu) \sim 1, \quad \varpi = \frac{C_p}{C_v}, \quad a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.9)$$

Далее, зависимость магнитной проницаемости от ρ и T может существенно сказаться на диаграммах фазовых скоростей, особенно при значениях параметров, близких к тем, когда наступает неустойчивость. Например, при намагничивании по закону (2.5) могут быть случаи,

когда при всевозможных направлениях распространения скорость медленных магнитозвуковых волн больше скорости альфвеновских волн.

При рассмотрении влияния диссипативных процессов на распространение волн малой амплитуды в диссертации получено, что намагниченность среды при самом общем законе $\mu = \mu(\rho, T, H)$ не сказывается на выражении коэффициента поглощения альфвеновских волн. Однако вид коэффициентов поглощения магнитозвуковых волн существенно зависит от намагничивания среды. Так, например, в приближении $\eta_1 = \eta_2 = \lambda = 0$, $A \gg a$ коэффициент поглощения быстрых магнитозвуковых волн в газе, намагничивающему по закону (2.5), даже при $|\mu - 1| \ll 1$ зависит от направления распространения волны: в волне распространяющейся поперек поля, этот коэффициент совпадает (с точностью до членов порядка $|\mu - 1|$) с коэффициентом немагнитного газа, а в волне, распространяющейся вдоль поля, он равен нулю. Этот пример из § 3.1 может служить иллюстрацией высказанного ранее утверждения о том, что в задачах магнитной гидродинамики с малым параметром следует, вообще говоря, учитывать намагниченность, даже если $|\mu - 1| \ll 1$.

В последующем разложении рассматривается распространение волн малой амплитуды в непроводящей среде [40], которая может намагничиваться и поляризоваться по произвольным законам вида $\mu = \mu(\rho, T, H)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, E)$. В такой среде существует три типа волн малой амплитуды: 1) энтропийная волна с нулевой фазовой скоростью; 2) две электромагнитозвуковых волн с фазовой скоростью при $\mu, \varepsilon = const$ переходит в скорость звука $\pm a$; 3) четыре электромагнитные волны с фазовыми скоростями, которые при $\mu, \varepsilon = const$ обращаются в $\pm c(\mu\varepsilon)^{-1/2}$.

Электромагнитозвуковые и электромагнитные волны обладают анизотропией, т.е. скорость их распространения зависит от ориентации фронта волны по отношению к векторам $\vec{H}$ и $\vec{E}$. При $\varepsilon_{E \leq 0}$, $\mu_H \leq 0$ две электромагнитные волны имеют положительные фазовые скорости, а две — отрицательные, причем величины скоростей волн, распространяющихся в противоположных направлениях, вообще говоря, различны и только при $\mu = \mu(H)$ (или $\varepsilon = \varepsilon(E)$) совпадают.

Энтропийная и электромагнитозвуковые волны плоско-поляризованы. Электромагнитные волны становятся плоско-поляризованными в среде, неоднородностью намагничивания или поляризации которой можно пренебречь, т.е. считать либо $\mu = const$, либо $\varepsilon = const$.

Фазовые скорости магнитозвуковых и электромагнитных волн, как показано в § 3.3, могут становиться комплексными, что свидетельствует о наступлении неустойчивости состояния среды. Для непроводящего газа, намагничивающегося по закону (2.5), критерий наступления неустойчивости имеет тот же вид (8). Если принять, что идеальный непроводящий газ находится в

состоянии магнитного насыщения с $M = \rho K_0(\theta - T)$ то неустойчивость наступает при

$$M > \frac{a(\theta - T)}{T} \sqrt{\frac{\rho}{4\pi\chi(\chi - 1)}}$$

III. Система основных уравнений одномерного движения намагничивающейся и поляризующейся среды квазилинейна. Поэтому в качестве волн конечной амплитуды в диссертации были рассмотрены в первую очередь простые волны, причем использовался метод, основанный на связи простых волн с волнами малой амплитуды.

Подробно проанализированы простые волны в проводящей намагничивающейся по закону $\mu = \mu(H)$ среде. Показано, что все соотношения в энтропийной и альфвеновской простых волнах имеют тот же вид, что и в немагнитной ($\mu = 1$) среде, с той лишь поправкой, что $\mu = \mu(H)$. Альфвеновская простая волна обладает круговой поляризацией, т.е. в ней $H = const$. Уравнения для простых магнитозвуковых волн при произвольном законе $\mu = \mu(H)$ не интегрируются в конечном виде. Соотношения между переменными в этих волнах могут быть получены из интеграла уравнения, полученного в § 4.2:

$$\frac{dr}{dq} = \frac{rq^2 - 1}{q^2(q - 1)} \cdot \frac{\chi(1 + f(q, r))}{2 - \chi(1 + f(q, r))} \quad (2.10)$$

$$\text{где } r = \frac{a^2}{\gamma A_x^2}, \quad q = \frac{\lambda^2}{a^2}, \quad A_x^2 = \frac{B_x^2}{4\pi\rho\mu(H)}, \quad \gamma = \frac{\mu^2 + \mu_H B_x^2 B^{-1}}{\mu^2 + \mu_H B}, \quad f(q, r) = \frac{r(q - 1)}{\chi B B_x^{-2}} \frac{d}{dB} \ln \frac{\mu}{\gamma}.$$

При некоторых $\mu(H)$ вид интегральных кривых уравнения (2.10) может значительно отличаться от случая $f = 0$ (напр. при $f = \frac{2 - \chi}{\chi}$ появляются новые особые точки).

Полное изменение скорости в автомодельной медленной магнитозвуковой волне, полученное при $A \ll a |\mu - 1| \ll 1$, существенно зависит, как показано в § 4.2, от соотношения между малыми параметрами A/a и при $|\mu - 1|$, что дает еще один пример необходимости учета намагниченности среды в некоторых задачах магнитной гидродинамики.

Плоские поперечные волны конечной амплитуды для общего случая $\mu = \mu(\rho, T, H)$, рассмотрены в диссертации [29, 39] с помощью решения системы (2.2), которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}(x, t), \quad T = T(x, t), \quad p = p(x, t), \quad \rho = const, \\ \vec{B} &= B_0(\vec{i}_x + \vec{b}(x, t)), \quad \vec{v} \cdot \vec{i}_x = \vec{b} \cdot \vec{i}_x = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае насыщенного магнетика ($M = K(\rho)(\theta - T)$) при некоторых ограничениях (напр. $B_0^2 \ll 4\pi\rho \cdot c_v \theta$, $T(x, 0) = T^0(x) = \text{const}$) исходная система допускает решение в форме простых волн вида:

$$\vec{v} = \lambda(b)\vec{b} \quad (2.12)$$

При этом возможны и автомодельные волны.

Профиль указанных волн меняется так, что они приводят к скачкам альфвеновского типа, в которых плотность ρ не меняется, а поперечная компонента поля меняется по величине. Более детальное рассмотрение скачков этого типа, приведено в § 4.5 для случая среды с $w = c_p T$ ($c_p = \text{const}$) при $B_n^2 \ll 4\pi\rho \cdot c_p \theta$, показывает, что эти скачки термодинамически возможны только при скоростях v_n , удовлетворяющих неравенству

$$1 < 4\pi\rho\mu_1 B_n^{-2} v_n^2 < \mu_1,$$

т.е. когда v_n больше альфвеновской скорости в среде перед скачками. При этом в зависимости от значения температуры T_1 и поля b_1 до скачка, эти скачки могут быть как размагничивающими ($b_1 > b_2$), так и намагничивающими ($b_1 < b_2$).

При $\mu = \text{const}$ рассмотренные простые волны становятся вырожденными, у которых профиль не меняется ($\frac{\partial \lambda}{\partial b} = 0$); вырожденность простых волн альфвеновского типа хорошо известна в магнитной гидродинамике.

В случае ненасыщенного магнетика при $B_0^2 \ll 4\pi\rho \cdot c_v T_0$ (волна не меняет начального распределения температуры $T_0(x)$) с помощью решения (2.11) рассмотрены поперечные волны, которые описываются следующей линейной системой

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (A^2(x) \vec{b}), \quad (2.13)$$

$$\text{где } A^2(x) \equiv A_0^2 \frac{T^0(x)}{m_0 + T_0(x)}, \quad A_0^2 \equiv \frac{B_0^2}{4\pi\rho}, \quad m_0 \equiv \frac{4\pi M_o}{B_0}$$

В случае $T^0(x) = m_0 (k_1 x + k_2)^4 \left\{ A_0^2 - (k_1 x + k_2)^2 \right\}^{-1}$ система (2.13) имеет решение вида

$$\vec{b}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_1 k_2}{2} (\xi + \eta) \right)^3 \left(\vec{b}_1(\xi) + \vec{b}_2(\eta) \right),$$

$$\vec{v}(\xi, \eta) = \frac{k_2^2}{2} \left(1 - \frac{k_1 k_2}{2} (\xi + \eta) \right) \left(\vec{b}_2(\xi) - \vec{b}_1(\eta) \right) + \frac{k_1 k_2^3}{2} \left\{ \int_{\eta}^{\xi} b_2(\zeta) d\zeta - \int_{\xi}^{\eta} b_1(\zeta) d\zeta \right\} \quad (2.14)$$

Здесь $\xi = \frac{x}{k_2(k_1x + k_2)} - t$, $\eta = \frac{x}{k_2(k_1x + k_2)} + t$, а произвольные функции

$\bar{b}_1(\xi)$, $\bar{b}_2(\eta)$ определяются из начальных условий. Исследование решения (2.14) показывает, что поперечные волны, распространяющиеся в ненасыщенном магнетике по направлению градиента температуры, замедляются, а их амплитуда возрастает, так что они становятся более концентрированными; наоборот, волны, которые идут из области с более низкой температурой в область более высоких температур, «размазываются», а их скорость возрастает.

В качестве примера использования решения (2.14) в диссертации рассмотрена задача о движении ненасыщенного магнетика у идеально-проводящей стенки, движущейся в своей плоскости со скоростью $\vec{u} = \vec{u}(t)$.

Интерес представляют волны конечной амплитуды в непроводящей, не содержащей свободных зарядов намагничивающейся и поляризующейся среде [40, 42]. Уравнения этих волн в наиболее общем виде получены в § 4.4 диссертации. Во всех этих волнах не меняются нормальные компоненты векторов $\vec{B}$ и $\vec{D}$ и касательная компонента скорости.

В энтропийной простой волне меняются касательные компоненты $\vec{B}_\tau$ и $\vec{D}_\tau$. В электромагнитных простых волнах не меняется плотность и скорость среды. Энтропийная и электромагнитозвуковые простые волны плоско-поляризованы; электромагнитные простые волны становятся плоско-поляризованными только в том случае, когда либо $\mu = const$, либо $\varepsilon = const$. Энтропийная и электромагнитозвуковая волны в среде с $\mu = const$ не меняют электрическое поле, а в среде с $\varepsilon = const$ – магнитное поле; в этих волнах, распространяющихся по идеальному газу с $\varepsilon = const$ и намагничивающемуся согласно закону (4), скорость v_2 и поперечное поле B_y увеличиваются в местах увеличения плотности.

Уравнения простых электромагнитных волн в идеальном газе, неоднородностью поляризации которого можно пренебречь и принять закон намагничивания (2.5), интегрируются в конечном виде:

$$B^2 = B_y^2 + B_{x1}^2 = B_1^2 \left(1 - \frac{2(S_1 - S)}{\chi \alpha_1 C_v} \right) \exp \left(- \frac{2(S_1 - S)}{C_v} \right),$$

$$E_z - E_{z1} = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{B_{y1}}^{B_y} \left(1 + \frac{\chi \alpha (\mu - 1) B_y^2}{(1 + \chi \alpha) B^2} \right)^{1/2} \frac{dB_y}{\sqrt{\mu}}, \quad \rho, E_y, v_x = const, B_z = 0,$$

$$\left(\alpha_1 \equiv \frac{(\mu_1 - 1)(\chi - 1) B_1^2}{4\pi \rho_1 \mu_1 \alpha_1^2}, \quad \alpha \equiv \alpha_1 \left(\frac{B}{B_1} \right)^2 \exp \frac{2(S - S_1)}{C_v} \right)$$

Результат интегрирования уравнений простых магнитозвуковых волн в приближении $|\mu - 1| \ll 1$, $\varepsilon = const$ приводит к выводу о том, что в парамагнитном идеальном газе,

намагничивающемся по закону (2.5), образование скачков может быть затянуто по времени в результате действия намагниченности.

Эволюционность разрывов в намагничивающейся и поляризующейся среде исследована в § 4.5. Определены области эволюционности сильных разрывов в проводящей среде. Характерно, что система уравнений для исследования эволюционности не распадается на независимые системы, как это имеет место в магнитной гидродинамике в связи с вырождением альфвеновских волн.

В конце четвертой главы рассмотрены ударные волны слабой интенсивности в идеальной намагничивающейся среде и влияние намагничивания среды на характер этих волн при некоторых частных законах $\mu = \mu(\rho, T, H)$.

Для случая $\mu = \mu(\rho)$ показано, что слабые скачки могут быть как скачками разряжения, так и скачками уплотнения; если $\mu\rho^{-1} = const$, то эти скачки не отличаются от скачков в среде с $\mu = const$. В случае $\mu = \mu(H)$ слабые скачки в непроводящей среде аналогичны скачкам в среде с $\mu = const$, а в проводящей среде быстрые магнитозвуковые волны в парамагнетике и медленные магнитозвуковые волны слабой интенсивности в диамагнетике могут быть только скачками уплотнения; что касается медленных волн в парамагнетике и быстрых волн в диамагнетике, то они могут быть как скачками уплотнения, так и скачками разряжения (в зависимости от соотношения между μ, μ_H, ρ и др. до скачка). В насыщенном проводящем магнетике ($M = const$) в касательном поле ($B_n = 0$) могут быть только скачки уплотнения. В насыщенном непроводящем магнетике ($M = \rho K(\theta - T)$) возможны как скачки уплотнения, так и скачки разрежения.

IV. Уравнения гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред следуют из системы (1) при $\vec{v} = 0$. Условие равновесия этих сред может быть представлено в виде

$$\rho \nabla \Phi' = \rho S' \nabla T + \rho \vec{g} + \rho_e \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2.15)$$

где $\Phi' = \Phi'(T, p', E, H)$ – химический потенциал, определенный формулой

$$\Phi' = U' - TS' + \frac{p'}{\rho'} - \frac{1}{4\pi\rho} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E})$$

(здесь, как в (2.1) и (2.2) p', S', U' – полные давления, энтропия и внутренняя энергия среды).

Из условия равновесия (2.15) следует, что среда может находиться в механическом равновесии при градиентах температуры отличных от нуля. Исходя из того, что при устойчивом равновесии сила, возникающая в результате виртуального смещения δx_k элемента среды,

стремится вернуть этот элемент в исходное состояние, в диссертации получено необходимое условие устойчивости неизотермического равновесия в виде

$$\sum_{k,i=1}^3 a_{ik} \cdot \delta x_i \cdot \delta x_k > 0$$

$$a_{ik} \equiv \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p \cdot \left(g_i + \frac{\partial f_i^y}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s \cdot \frac{\partial f_i^y}{\partial T} \right) + \frac{\partial f_i^y}{\partial T} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\rho \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{T}{\rho^2 C_p} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cdot (\rho g_k + f_k^y) \right\},$$

$$\vec{f}^y \equiv -\nabla(\psi^{(\rho)} + x^{(\rho)}) + \rho_e \vec{E} + \frac{1}{C} \cdot (\vec{j} \cdot \vec{B}) + M \nabla H + P \nabla E.$$

Отсюда, например, условие отсутствия конвекции в поле сил тяжести $\vec{g} = -\vec{i}_z g$ и температурном поле $T = T(z)$ для намагниченной до насыщения $M = K \cdot (\theta - T)$ среды имеет вид

$$\frac{dT}{dz} > \frac{gT}{\rho C_p} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \left\{ 1 - \frac{KTH}{C_p \rho^2} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right\}^{-1}$$

Все дальнейшее рассмотрение задач гидростатики в диссертации проведено в предположении изотермического равновесия.

Из равенства полных напряжений по обе стороны поверхности раздела фаз намагничивающихся и поляризующихся сред получены граничные условия на этой поверхности

$$\left[p + \psi^{(\rho)} + x^{(\rho)} + 2\pi M_n^2 + 2\pi P_n^2 \right] = \alpha \kappa + \mathcal{G} \bar{D}_n + \frac{1}{c} \bar{H}_\tau \cdot (\vec{n} \cdot \vec{i}),$$

$$\mathcal{G} \bar{E}_\tau + \frac{1}{c} \cdot (\vec{i} \cdot B_n \vec{n}) = 0. \quad (2.16)$$

Здесь: $\mathcal{G}, \vec{i}$ – поверхностные плотность зарядов и ток, α – коэффициент поверхностного натяжения, κ – удвоенная средняя кривизна поверхности раздела, $\vec{n}$ – орт нормали к поверхности раздела.

В § 5.2 рассмотрено равновесие конечного объема намагничивающейся непроводящей среды в магнитном поле. При наиболее общем законе намагничивания эта задача приводится к решению нелинейных уравнений относительно потенциалов ϕ^+, ϕ^- магнитного поля

$$\Delta \phi^\pm = -4\pi \operatorname{div} \left\{ \frac{\nabla \phi^\pm}{|\nabla \phi^\pm|} M^\pm(\rho^\pm, |\nabla \phi^\pm|) \right\} \quad (2.17)$$

соответственно в конечной области Ω^+ и в дополнительной области Ω^- , где находится окружающая среда, не смешивающиеся со средой из Ω^+ . Решения этих уравнений должны

сопрягаться на замкнутой поверхности S , ограничивающей область Ω^+ заданного объема, согласно условиям

$$\phi^+ = \phi^-, \mu^+ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \mu^- \frac{\partial \phi}{\partial n}; \left(\mu^\pm = 1 + \frac{4\pi M^\pm}{|\nabla \phi^\pm|} \right)$$

Форма поверхности S неизвестна и должна быть определена в процессе решения задачи; дополнительным уравнением для её определения является условие (15). Сформулированная выше задача решена в диссертации для случая $\mu^+, \mu^- = const$. При этом потенциалы $\phi^\pm$ представляют собой гармонические (в областях $\Omega^\pm$ соответственно) функции. В такой постановке задача определения функций $\phi^\pm$, $\frac{\partial \phi^\pm}{\partial n}$ на поверхности S и формы самой поверхности S , ограничивающей заданной объем, сведена к совместному решению двух интегральных уравнений Фредгольма и одного нелинейного дифференциального уравнения, которые имеют вид

$$\phi^+(\vec{r}_o) + 2 \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \int_S \phi^+(\vec{r}) \frac{\partial U}{\partial n} ds = \frac{2\mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \phi^o(\vec{r}_o) \quad (2.18)$$

$$-\frac{\partial \phi^+(\vec{r}_o)}{\partial n_o} + 2 \int_S \frac{\partial \phi^+(\vec{r})}{\partial n} \cdot \frac{\partial U}{\partial n_o} dS = 2 \frac{\partial}{\partial n_o} \int_S \phi^+(\vec{r}) \frac{\partial U}{\partial n} dS \quad (2.19)$$

$$\bar{K} - \delta'(\vec{g}_o \cdot \vec{r}) - \delta \left\{ (\nabla \phi^+)^2 + \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^-} \cdot \left(\frac{\partial \phi^+}{\partial n} \right)^2 \right\} = C \quad (2.20)$$

где $\int_S \vec{r} \cdot \vec{n} ds = 1$, $\phi^o(\vec{r}_o)$ – потенциал внешнего, заданного поля; $\vec{r}_o, \vec{r}$ – радиусы- векторы точек поверхности; $u = u(|\vec{r}_o - \vec{r}|) = \left\{ -(2\pi)^{-1} \ln |\vec{r} - \vec{r}_o| - \text{ для плоской задачи } \right\} = \left\{ (4\pi |\vec{r} - \vec{r}_o|)^{-1} - \text{ для пространственной задачи; } \right\}$; $\bar{K} \equiv R_o K$ – безразмерная удвоенная средняя кривизна поверхности S ; $\delta' \equiv \frac{R_o^2 g(\rho^+ - \rho^-)}{\alpha}$ $\delta \equiv \frac{(\mu^+ - \mu^-) R_o H_o^2}{8\pi\alpha}$ $C \equiv \frac{(P^+ - P^-) R_o}{\alpha} - \delta'(\vec{g}_o \cdot \vec{r}) = const$, $\vec{n}$ – орт внешней S нормали; $\vec{n}_o \equiv \vec{n}(\vec{r}_o)$; R_o, H_o – характерные размер и величина поля задачи.

Система (2.18)–(2.20) была решена численно для случая $\nabla \phi^o = \vec{H}_o = const$ и $\delta' = 0$. Результаты вычислений показали, что силы намагничивания за счет разности магнитных проницаемостей μ^+ и μ^- приводят к вытягиванию взвешенного сферического объема в направлении силовых линий поля. При возрастании разности $|\mu^+ - \mu^-|$ и возрастании параметра δ эта деформация увеличивается и образуется характерная шейка деления, в результате чего объем в конце концов, делится на две равные части. Характер деформации не зависит от знака разности

$\mu^+ - \mu^-$, так что деформация намагниченной капли в немагнитной среде и немагнитной капли в намагниченной среде будут качественно одинаковы.

Деформация влечет за собой изменение статического давления внутри объема. Это обстоятельство было рассмотрено в диссертации в применении к задаче о схлопывании сферической каверны в намагничивающейся среде. Получено, что с точностью до членов порядка $|\mu^+ - \mu^-|$ включительно намагниченность среды уменьшает время схлопывания каверны и повышает интенсивность возрастания максимального давления при этом.

Линейные поверхностные волны на плоской поверхности раздела намагничивающихся сред и устойчивость этой поверхности при произвольном законе намагничивания рассмотрены в конце пятой главы диссертации [49, 53].

Показано, что поверхностные волны на границе раздела непроводящих сред, изотермически намагничивающихся по произвольному закону, сопровождаются поперечными волнами поля, так что потенциалы поля имеют вид

$$\Phi^\pm = \Phi_0^\pm \exp\{\mp k^\pm y + i\omega t + i(\vec{k} \cdot \vec{r})\},$$

причем $k^\pm \equiv k \frac{\sqrt{A^\pm \pm iC_\infty^\pm H_\pm H_k}}{1 + C_\infty^\pm H_\pm^2}$.

$$\text{Здесь } A^\pm \equiv 1 + C_\infty^\pm (H_\infty^\pm)^2 = 1 + \frac{H_\infty^\pm}{\mu_\infty^\pm} \left(\frac{\partial \mu^\pm}{\partial H} \right)_y = \pm \infty \quad \vec{H}_\infty = (H_{ox}, \mu_\infty^{-1} H_{oy}, H_{oz}), \quad H_\pm \equiv \frac{H_{oy}}{\mu_\infty^\pm} = H_{\infty y}^\pm,$$

$$H_k = \frac{\vec{H}_o \vec{k}}{k}, \quad \mu_\infty^\pm \equiv \mu(\rho^\pm, H_\infty^\pm), \quad \vec{H}_o - \text{внешнее поле, } \vec{k} = (k_x, k_z) - \text{волновой вектор, индексы (+), (-)}$$

относятся соответственно к областям $y > F(t, x, z)$ и $y < F(t, x, z)$, где $y = F(t, x, z)$ – уравнение поверхности раздела.

При $\mu = \mu(\rho)$ величины $k^\pm$ становятся действительными, так что поперечные волны исчезают и остается только затухание поверхностных волн при удалении вглубь от поверхности раздела. Заметим, что для парамагнетиков $C_\infty^\pm < 0$, так что, чем сильнее выражена нелинейность намагничивания, тем в нормальном поле тоньше поверхностный слой у границы раздела, где сосредоточены возмущения поля, не нарушающие устойчивости; в касательном поле – картина обратная.

Получено, что касательное к поверхности раздела магнитное поле повышает фазовую скорость поверхностных волн (если $\vec{H}_o \vec{k} \neq 0$), а нормальное поле, наоборот, уменьшает. В связи с этим плоская поверхность раздела может считаться устойчивой лишь при $H_{oy} < H_*$, где при произвольном законе намагничивания сред H_* имеет выражение.

$$H_* = \frac{8\pi\mu_\infty^+\mu_\infty^-\sqrt{\alpha g(\rho^- - \rho^+)}(\mu_\infty^+\sqrt{A^+} + \mu_\infty^-\sqrt{A^-})}{\sqrt{A^+A^-}(\mu_\infty^+ - \mu_\infty^-)^2} \quad (2.21)$$

Эффект дестабилизации поверхности раздела подтверждается рядом экспериментов с ферромагнитными и диэлектрическими жидкостями [22]. Полученное в диссертации выражение (2.21) для критического нормального поля показывает, что нелинейность закона намагничивания не меняет основного вывода о дестабилизации плоской поверхности раздела нормальным полем.

В диссертации рассмотрена устойчивость плоской поверхности раздела между проводящей (в области $y < F$) и непроводящей (в области $y > F$) намагничивающимися средами. Дисперсионное уравнение этой задачи было исследовано для двух характерных случаев задания внешнего поля:

а) если внешнее магнитное поле направлено по нормали к невозмущенной поверхности раздела, то в случае очень хорошо проводящей среды в области $y < F$ условия устойчивости имеют вид

$$\mu_\infty^- > \mu_\infty^+; \quad \sqrt{\alpha(\rho^- g^- - \rho^+ g^+)} > \frac{H_- H_+ (\mu_\infty^- - \mu_\infty^+)^2}{8\pi(\mu_\infty^- \gamma^+ + \mu_\infty^+ \gamma_1 \gamma_0)},$$

$$\text{где } g^+ \equiv -\vec{g}_y^+; \quad g^- \equiv -\vec{i}_y \cdot \left(\vec{g} + \frac{1}{c\rho^-} (\vec{j}_\infty^- \times \vec{B}_\infty^-) \right); \quad \gamma_0 \equiv -\frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 \right)^{1/2}, \quad a_1 \equiv \frac{\gamma^+ \mu_\infty^-}{\gamma_1 \mu_\infty^+}; \quad a_2 \equiv \frac{\mu_\infty^+ - \mu_\infty^-}{\gamma_1^2 \mu_\infty^+};$$

$$\gamma_1 \equiv (1 + C_\infty^- H_-^2)^{-1/2}; \quad \gamma^+ \equiv (1 + C_\infty^+ H_+^2)^{-1/2}$$

В противоположном случае – в случае плохо проводящей среды в области $y < F$ – имеем

$$\sqrt{\alpha(\rho^- g^- - \rho^+ g^+)} > \frac{H_- H_+ (\mu_\infty^- - \mu_\infty^+)^2}{8\pi(\mu_\infty^- \gamma^+ + \mu_\infty^+ \gamma_1)};$$

б) если внешнее поле лежит в плоскости (невозмущенной) раздела, то в случае хорошо проводящей среды поверхность раздела неустойчива, а в случае плохо проводящей в области $y < F$ среды условием устойчивости является $g^- \rho^- > g^+ \rho^+$.

Теоретическое исследование влияния электрического поля на равновесие жидких диэлектриков со свободной поверхностью проведено в работе И.И.Иевлева и И.Е.Тарапова [71]. Задачи гидростатики поляризующихся сред рассматривались также в кандидатской диссертации И.И.Иевлева. Приведена вариационная формулировка задачи о равновесии поляризующейся капиллярной жидкости в частично заполненном сосуде. На основе принципа минимума потенциальной (свободной) энергии получены условия устойчивости равновесных состояний жидкости. Исследована устойчивость поверхности раздела двух несмешивающихся поляризующихся жидкостей, расположенных между двумя коаксиальными цилиндрическими

электродами. Рассмотрена аналогичная задача об устойчивости равновесных состояний поляризуемой жидкости, расположенной в зазоре между двумя сферическими электродами. Полученные результаты имеют большой практический интерес, поскольку в различных технических устройствах (электрические насосы, дегазаторы, стабилизаторы) появляется возможность стабилизировать или дестабилизировать равновесие (например, для интенсификации перемешивания).

В работах Л. Н. Поповой [113-116] исследованы формы границы раздела жидкостей и газов и их устойчивость, рассмотрено влияние электрического и магнитного полей на поведение свободных поверхностей поляризуемых и намагничиваемых сред. Решена задача численного определения двусвязной осесимметричной границы раздела двух поляризуемых жидкостей в сосуде, образованном двумя твердыми поверхностями. Рассмотрены неосесимметричные свободные поверхности жидкости, при малых значениях числа Бонда найдено множество равновесных форм жидкой капли на наклонной плоскости в условиях гистерезиса смачивания. Исследована устойчивость равновесия диэлектрической капли в электрическом поле и капли намагничиваемой жидкости в магнитном поле в условиях невесомости [95]. На плоскости параметров ε, E (ε – диэлектрическая проницаемость, E – напряженность электрического поля) в случае диэлектрической жидкости и параметров μ, H (μ – магнитная проницаемость, H – напряженность магнитного поля) в случае намагничиваемой жидкости построена граница области устойчивости капли. В [58, 59] рассмотрен аналог задачи Рэлея о схлопывании кавитационного пузырька в неограниченном объеме жидкости. Численно исследовано изменение формы поверхности первоначально сферического пузырька в несжимаемой невязкой непроводящей намагничиваемой жидкости под действием приложенного в начальный момент времени давления p_∞ и магнитного поля H_∞ , однородного на бесконечности. Было показано, что слабое магнитное поле не оказывает заметного влияния на форму пузырька. Но в достаточно сильном магнитном поле при $N = H_\infty^2 / p_\infty \geq 20$ и $\mu \geq 2$, где μ – магнитная проницаемость жидкости, изменяется сам процесс схлопывания пузырька, а именно: происходит дробление его на два новых одинаковых пузырька. При этом давление в жидкости существенно возрастает. Чем больше число Стюарта N и магнитная проницаемость жидкости, тем быстрее протекает процесс дробления пузырька, тем сильнее концентрируется давление в жидкости вблизи его поверхности.

Задачи электрогидростатики рассматривались в кандидатской диссертации В.И.Ермакова [Д5], выполненной под руководством И.Е.Тарапова. Подробно исследована устойчивость двух плоских слоев несмешивающихся проводящих вязких жидкостей, заключенных между двумя горизонтальными пластинами-электродами. Исследованы равновесные формы поверхности раздела идеально проводящей и диэлектрической жидкостей, ответвляющиеся от горизонтальной плоскости. Показано, что в этом случае определение равновесных форм сводится к задаче в точности аналогичной задаче гидродинамики о стационарных волнах на поверхности невязкой

жидкости. С использованием известных формул М.А.Лаврентьева для конформных отображений близких областей получено уравнения Кортевега – де Вриза, описывающее формы поверхности раздела. Выписаны решения полученного уравнения – аналоги кноидальных и уединенных волн. Показано, что формы равновесия вида уединенной волны всегда неустойчивы. Для форм равновесия типа кноидальных волн определена область устойчивости в пространстве безразмерных параметров рассматриваемой задачи.

V. Типичные задачи течения намагничивающейся среды в каналах, которые могут представить интерес с точки зрения непосредственного использования в технических устройствах, рассмотрены в заключительной главе диссертации.

Чтобы выяснить, как влияет намагниченность проводящей среды на характеристики потока в длинных каналах, проанализирована схема идеального генератора [25] с намагниченным до насыщения ($M = \rho K(\theta - T)$) рабочим телом при малых числах магнитного числа Рейнольдса. Учет размагничивающего действия индуцированного магнитного поля (6) приводит к выводу о том, что влияние намагниченности среды сказывается наиболее существенно, если внешнее поле направлено вдоль длинных стенок поперечного прямоугольного сечения канала (принято, что высота канала значительно меньше его ширины и длины). В этом случае задача сводится к системе уравнений

$$v'' = -1 + jHa(1 + m - m\tau); \quad \tau'' = -\alpha(j^2 + (v')^2); \quad 1 + r = Haj^{-1} \int_0^1 v(1 + m - m\tau) dy \quad (2.22)$$

где $j \equiv -j_0 \left(h \frac{dp}{dx} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta_1}} \right)^{-1}$; $Ha = \frac{H_0 h}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta_1}}$; $r \equiv \sigma R l_x l_z h^{-1}$; j_0 – плотность тока в генераторе высотой h , R – сопротивление внешней цепи; l_x, l_z – длина и ширина канала соответственно; σ – проводимость рабочего тела;

$$m \equiv 4\pi\rho K\theta H_0^{-1}; \quad \tau \equiv \frac{T(y)}{\theta}; \quad v \equiv \frac{v_x(y)}{v_0}; \quad \alpha \equiv \frac{h^4}{\eta_1 \lambda^0 \theta} \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 = \frac{\eta_1 v_0^2}{\lambda_0 \theta}.$$

В диссертации подробно проанализировано решение системы (21) при граничных условиях:

$$v(0) = v(1) = 0; \quad \tau(0) = \tau_0; \quad \tau(1) = \tau_1. \quad (2.23)$$

Если канал работает в режиме расходомера, то его чувствительность может быть увеличена за счет намагниченности среды. Если рассматривается схема генератора, то (при $\alpha \ll 1$) намагниченность рабочего тела не влияет на к. п. д. генератора, но его токовая характеристика смещается влево, что видно из полученного выражения:

$$J = fHa \left\{ 12(1+r) + H^2 a \left(f^2 + \frac{m^2}{60} (\tau_1 - \tau_0)^2 \right) \right\}^{-1}, \quad \left(f \equiv 1 + m \left(1 - \frac{\tau_1 + \tau_0}{2} \right) \right)$$

Таким образом, при малых числах Гартмана ($Ha < 1$) ток у генератора с магнетиком ($f \neq 1$) может оказаться значительно большим, чем у генератора с немагнитным рабочим телом: например, при $Ha = 0,2$ и $f = 1,5$ приращение тока составляет около 40 %.

Задача о движении намагниченной непроводящей среды между параллельными пластинами [33] рассмотрена в предположении:

$$M = \rho K(\theta - T), \quad \frac{dH(x)}{dx} = const, \quad \frac{dp(x)}{dx} = const.$$

Тогда безразмерная скорость $v(x)$ и безразмерная температура $\tau(x)$ определяются из системы:

$$\begin{aligned} v'' + \beta + \gamma - \beta\tau &= 0, \\ \tau'' + \alpha(v')^2 + \alpha\beta v\tau &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$\alpha \equiv \frac{\eta_1 v_0^2}{\lambda^0 \theta}; \beta \equiv \frac{4\pi\rho K \theta h^2}{\eta_1 v_0} \frac{dH}{dx}; \gamma \equiv -\frac{h^2}{\eta_1 v_0} \frac{dp}{dx}; \tau(y) \equiv \frac{T}{\theta}; v(y) \equiv \frac{v_x(y)}{v_0}; 0 \leq y \equiv \frac{y'}{h} \leq 1; v_0 - \text{характерная скорость потока выбирается так, что } \gamma = 1 \text{ при } \frac{dp}{dx} \neq 0 \text{ и } \beta = \text{sign} \frac{dH}{dx} \text{ в случае } \frac{dp}{dx} = 0 \text{ (принято } \frac{dp}{dx} \geq 0).$$

Система (2.24) проанализирована при граничных условиях (2.23) и получено ее численное решение для разных значений α, β, γ . Из уравнений движения следует, что действие на скорость потока градиентов магнитного поля и давления всегда противоположно. В то же время, как показало численное решение системы (2.24), при увеличении градиента магнитного поля, противоположного по знаку градиенту давления, скорости в потоке увеличиваются до некоторого предела, а при дальнейшем увеличении $\left| \frac{dH}{dx} \right|$ начинают уменьшаться. Этот эффект, по-видимому, связан с уменьшением намагниченности за счет повышения температуры T вследствие вязкой диссипации. Путем регулирования соотношения между β и γ рассматриваемую схему можно заставить работать в режиме насоса ($\beta > 0, \gamma = 1$), тормоза ($\beta < 0, \gamma = 1$) и уплотнителя (полный расход равен нулю). С увеличением температуры на пластинах скорость разгона потока магнитным полем и прирост температуры в нем уменьшаются.

Из аналитического решения системы (2.24), полученного при $\alpha \ll 1$, следует, что как только $-(1 - \tau_0)^{-1} < \beta < -2(2 + 3\tau_0)^{-1}$, то в области

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{A}) < y < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{A}), \left(A \equiv \frac{3\beta\tau_0 + 2(1 + \beta)}{3\beta\tau_0 - 2(1 + \beta)} \right) \quad (2.25)$$

температура τ понижается, так что $\tau < \tau_0 (= \tau_1)$. Эта зона охлаждения при $\beta = -1$ распространяется на всю ширину канала. Как показывают численные расчеты, соотношение (2.25) хорошо выполняется вплоть до $\alpha \sim 10^2$. Охлаждение намагниченной среды внутри канала является следствием термомагнитного эффекта (парамагнитная среда при движении в сторону уменьшения магнитного поля охлаждается).

В диссертации проведена оценка эффективности работы некоторого устройства, в основу которого положена рассмотренная задача, в качестве насоса или тепловой установки. Соответствующие коэффициенты эффективности, рассматриваемые как функции β при фиксированном значении α , как показывает численный расчет, имеют экстремумы.

При анализе задачи о чисто продольном движении намагниченной непроводящей жидкости по длинным трубам [50, 57] (концевые эффекты не учитываются) получено, что дополнительный к гидродинамическому поток за счет взаимодействия с магнитным полем может быть получен только при $(\partial M / \partial T)_{\rho, H} \neq 0$ (принято, что величина поля может изменяться вдоль оси трубы и одной из координатных линий в поперечном сечении). Тогда возможны два варианта получения дополнительного расхода по трубе:

- 1) внешнее поле меняется только по сечению трубы, а температура имеет постоянный градиент вдоль оси трубы;
- 2) внешнее поле изменяется вдоль оси трубы.

Эти два случая рассмотрены в диссертации в применении к течению насыщенного и ненасыщенного парамагнетика ($M = \rho K_{(n)}(\theta - T)H^n, n = 0; 1$) по трубе с поперечным сечением в виде области между двумя эксцентрично расположенными окружностями.

В первом случае дополнительный поток в трубе появляется за счет термомагнитного эффекта при изменении вдоль оси трубы намагниченности среды. Расход этого потока в круглой трубе, внутри которой вдоль ее оси расположен круглый провод с током $I = \pi r_1^2 J$, пропорционален пятой и шестой степени наружного радиуса трубы для насыщенного и ненасыщенного магнетика соответственно. Так, например, при концентрическом расположении провода дополнительный расход равен:

$$Q_M = \frac{\rho K_{(n)} A \pi r_2^4}{2\eta_1} \left(\frac{\pi J r_2}{c} \right)^{n+1} \frac{R-1}{R^3} \left(\frac{R^2 + 4R + 1}{3R^2} - \frac{R^2 - 1}{R^2 \ln R} \right),$$

где $A \equiv \frac{dT}{dz} = \text{const}$, $R = \frac{r_2}{r_1} > 1$.

Во втором случае, когда вдоль оси трубы создан градиент внешнего магнитного поля, показано, что увеличение расхода происходит при разных по знаку градиентах поля и давления и при температуре наружного цилиндра большей температуры концентрически расположенного внутреннего. Дополнительный расход пропорционален четвертой степени радиуса трубы. Так, в случае сплошной трубы он равен:

$$Q_M = \frac{\rho K(n)}{n+1} \frac{dH}{dz}^{n+1} (e - T_2) \frac{\pi r_2^4}{8\eta_1},$$

T_2 – температура стенки трубы.

В последнем параграфе 6-й главы автореферата рассмотрена гидродинамическая теория смазки намагничивающейся жидкостью [24]. Задача рассмотрена в обычных предположениях малого зазора, малых числах Рейнольдса и при $\alpha \equiv \eta_1 v_0^2 / \lambda^0 \theta \ll 1$ для подшипников бесконечной длины.

Получены формулы для распределения давления, подъемной силы и силы трения в плоском и цилиндрическом подшипниках бесконечной длины. Проведенный анализ решения задачи (для насыщенного и ненасыщенного магнетика) показал, что в подшипниках с намагничивающейся смазкой можно получить дополнительную подъемную силу за счет «втягивания» смазки в область клина магнитным полем. Этот эффект пропадает, если магнитное поле не меняется вдоль смазочного слоя. Можно найти наивыгоднейший характер изменения магнитного поля по смазочному слою: так, например, в цилиндрическом подшипнике наибольший эффект получается, когда магнитное поле охватывает половину подшипника со стороны, противоположной нагрузке. Численные оценки показывают, что заметного эффекта в технически приемлемых полях ($B \sim 10^{-2}$ тл) можно достичь в тихоходных подшипниках со сравнительно большим зазором, если в качестве смазки использовать ферромагнитные жидкости с намагниченностью $M/H \sim 10^{-1}$.

3. Волновые движения намагничивающихся и поляризующихся сред.

В работе [41] И. Е. Тарапов получил простые формулы для скорости λ_s и коэффициента поглощения δ_s звуковых волн в следующем виде

$$\lambda_s^2 = L_0 - \frac{L_1 \sin^2 \theta}{1 + L_2 \sin^2 \theta} = f_1(\sin^2 \theta);$$

$$\delta_s = \sqrt{\frac{a_{01} + a_{02} \sin^2 \theta}{a_{11} + a_{12} \sin^2 \theta} \frac{s_0 + s_1 \sin^2 \theta + s_2 \sin^4 \theta}{(a_{11} + a_{12} \sin^2 \theta)^2}} = f_2(\sin^2 \theta)$$

Коэффициенты L_i, s_i, a_{ik} зависят от значений параметров среды в равновесном состоянии. Как коэффициент поглощения, так и скорость распространения волн зависят от угла θ между

направлением распространения волны и внешним магнитным полем $\vec{H}$ (рис.3), причем эти зависимости – π – периодические функции угла. В 1978–1984 гг. английские ученые Chung D. Y., Isler W. E. в своих экспериментальных работах [117–119] по распространению ультразвука частоты 2.25 МГц в феррожидкости на основе воды в магнитном поле напряженности 920 Гс подтвердили эти зависимости для коэффициента поглощения и пришли к выводу [119]: «Становится понятным, что основные уравнения Тарапова наиболее приемлемы для описания результатов эксперимента по сравнению с другими теориями...»

Впоследствии в лаборатории электродинамики сплошных сред Харьковского государственного университета аналогичные эксперименты были выполнены для феррожидкостей на различных основах и различной дисперсности феррочастиц при различных напряженностях магнитного поля и частоты ультразвуковых колебаний (рис. 4) [69, 76, 77], подтвердившие эффективность модели феррожидкости, как среды с равновесной неоднородной намагниченностью. Эти результаты стимулировали последующие исследования по структурированию магнитных жидкостей и изучению в них возможных фазовых переходов.

Математическая модель намагничивающейся и поляризующейся среды, разработанная и исследованная И. Е. Тараповым, впоследствии использовалась при исследовании проблемных вопросов теории сплошных сред с усложненными свойствами его учениками.

В цикле работ, выполненных совместно с Н. Ф. Пацегоном [62, 64], установлены закономерности влияния магнитных полей на волновые движения проводящих намагничивающихся сред, представляющие интерес для прикладных вопросов феррогидродинамики и электродинамики сплошных сред. Исследованы свойства слабых разрывов в проводящей изотропно намагничивающейся среде и в проводящей магнитной жидкости. При этом установлено, что при устойчивых состояниях намагничивающейся среды возможны значения магнитогидродинамических параметров, при которых нарушаются обычные для магнитной гидродинамики соотношения между скоростями распространения слабых разрывов, а именно: скорость медленного разрыва может быть больше альфвеновской. В неоднородно намагничивающихся средах это обуславливает существование дополнительных по сравнению со случаем постоянной магнитной проницаемости областей гиперболичности стационарных течений. Эти области сохраняются и в предельном случае несжимаемой проводящей жидкости. Показано, что в несжимаемой намагничивающейся жидкости, кроме энтропийного и вращательного разрывов, существует плоскополяризованный магнитозвуковой разрыв (рис. 5). В парамагнитной жидкости его скорость больше альфвеновской, а в диамагнитной – меньше.

Исследованы одномерные простые волны в проводящей несжимаемой жидкости, намагничивающейся по произвольному изотропному закону: энтропийная, альфвеновская и магнитозвуковая. Скорости их распространения соответственно определяются выражениями:

$$\lambda_s = 0, \quad \lambda_A = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho\mu}}, \quad \lambda_M = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho\mu}} \sqrt{\frac{\mu^2 B + \mu_H B_x^2 + N\mu^2 \mu_T T m (B_y^2 + B_z^2)}{\mu^2 B + \mu_H B^2}}$$

$$N^{-1} = 1 + T_s (s_T^e - \mu_T^2 m B^2), \quad m^{-1} = 4\pi\rho\mu(\mu^2 + \mu_H B)$$

Интегрирование уравнений, описывающих одномерные простые волны, сведено к квадратурам в случае произвольного изотропного закона намагничивания. Показано, что при деформировании профилей простых магнитозвуковых волн в несжимаемой жидкости возникает плоско-поляризованная магнитозвуковая ударная волна. Исследована структура таких ударных волн малой интенсивности. Показано, что, в отличие от альфвеновских разрывов, такие волны имеют стационарную структуру. Получена оценка ширины магнитозвуковой ударной волны и исследованы условия ее устойчивости по отношению к малым возмущениям.

Необходимо отметить, что указанное новое решение для магнитозвуковой простой волны существует при значениях магнитной проницаемости сколь угодно мало отклоняющейся от единицы. Оно возникает только в случае неоднородного намагничивания; в предельном случае $\mu = const$ магнитозвуковая простая волна вырождается в альфвеновскую, сохраняя свою плоскую поляризацию.

Исследованы характеристики плоских стационарных течений несжимаемой проводящей жидкости и установлена их связь с диаграммами Фридрихса. Получены новые решения в виде стационарных магнитных волн, существующих в областях гиперболичности течения несжимаемой жидкости. Эти области определяются значениями скорости течения и термодинамических параметров жидкости, удовлетворяющих неравенствам:

$$\mu^2 + \mu_H B \leq \frac{v^2}{mB^2} \leq \mu^2 + N\mu^2 \mu_T T_s m B^2 \quad (3.1)$$

Показано, что в случае произвольной ориентации магнитного поля задача исследования стационарных волн сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Следует обратить внимание, что в случае стационарных течений такой жидкости вдоль силовых линий магнитного ($\vec{B} = C\vec{v}$) поля простым преобразованием плотности и скорости потока основную систему уравнений (2.2) можно привести к газодинамической форме.

Это преобразование имеет следующий вид [71, 77]:

$$\rho_1 = \rho(1 - \frac{c_1}{\mu})^{-1}; \quad \vec{v}_1 = \vec{v}(1 - \frac{c_1}{\mu}); \quad c_1 = \frac{C^2}{4\pi\rho}$$

Оно возможно в связи с наличием таких первых интегралов уравнений (2.2) во всей области течения идеальной несжимаемой жидкости:

$$s + s^e = const, \quad p + \frac{\rho v^2}{2} + \psi^p - \Psi = const, \quad \Psi = \int_0^H M(\rho, T(\rho, H), H) dH$$

Уравнения (2.2) при этом записываются в виде

$$\begin{aligned} \rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}) \vec{v}_1 &= -a^2(\rho_1) \vec{v} \rho_1, \\ \operatorname{div} \rho_1 \vec{v}_1 &= 0, \\ a^2(\rho_1) &= \frac{B(\mu - c_1)}{4\pi \rho c_1} \frac{[\mu - c_1 + (\mu_H + \mu_T T_H)H]}{\mu_H + \mu_T T_H} \end{aligned}$$

При этом новая плотность ρ_1 зависит от магнитной проницаемости жидкости. Таким образом, несмотря на несжимаемость проводящей жидкости, в ней появляется эффект искусственной сжимаемости, поскольку магнитная проницаемость может изменяться в зависимости от температуры и напряженности магнитного поля. В области определяющих параметров, удовлетворяющих неравенствам (3.1), система уравнений становится гиперболической, поскольку $a^2(\rho_1) > 0$, и допускает новые решения в виде стационарных магнитных волн [66,74]. В случае закона намагничивания Ланжевена соответствующие стационарные волны являются волнами размагничивания: при возрастании угловой координаты в них монотонно уменьшаются намагниченность, магнитная индукция, напряженность магнитного поля, температура и скорость. Давление и магнитная проницаемость возрастают с увеличением угловой координаты. Подобного рода решения описывают течение жидкости возле вершины идеально проводящего выпуклого угла. Очевидно, что при обтекании вогнутого угла при параметрах, соответствующих гиперболичности потока, возникает ударная волна, отходящая от вершины угла. В отличие от альфвеновской волны, эта волна обладает постоянной шириной и имеет стационарную структуру. Аналогичные волны описывают и течение вдоль криволинейной стенки.

В работах [86, 87] проанализированы течения микрополярной магнитной жидкости постоянной микроструктуры с прямыми линиями тока. Показано, что моментные напряжения в такой жидкости играют определяющую роль в построении единственного решения при возникновении в течении разрывов внутреннего момента количества движения и намагниченности. Изучена структура таких разрывов и получены решения задач о течениях Куэтта и Пуазейля.

Вязкопластические и магнитопластические течения намагничивающихся жидкостей были исследованы в диссертации Н.Д. Слатински, выполненной под руководством И.Е. Тарапова. Было получено общее магнитореологическое соотношение для вязкопластического тела, вид критерия пластичности и уравнений текучести, построена модель намагничивающегося жесткопластического тела. Рассмотрена задача о полосах Людерса и получено общее условие для их угла

наклона при растяжении образцов в продольном магнитном поле. Рассмотрена задача о течении Гартмана проводящего вязкопластического тела и непроводящего тела Бингама, а также задача о течении Куэтта проводящего тела Бингама. Получены основные характеристики МГД-генератора, расходомера и насоса.

В серии работ с А. И. Жакиным были намечены пути решения общей проблемы управления движением поляризующейся жидкости электрическим полем не только за счет поляризационных сил, но и с учетом различных механизмов проводимости жидкости, обуславливающих объемные и поверхностные кулоновские силы. Проведенные теоретические исследования выявили, что при различных физико-химических процессах, определяющих закон проводимости, возможны существенные различия возникновения электрогидродинамической неустойчивости и электроконвекции слабопроводящих жидкостей, которые заключаются в разнообразии форм критических и закритических течений.

Задачи электрогидродинамики были затем исследованы в кандидатской диссертации А.А. Тропиной, выполненной под руководством И.Е. Тарапова. На основе диссоционно-инжекционной модели проводимости жидких диэлектриков было исследовано влияние электрического поля и физико-химических параметров жидкости на закономерности электроконвекционных течений в диэлектрических жидкостях. Было показано, что как в сильно, так и в слабонеоднородных полях инжекционный механизм образования зарядов является основным, если заряды генерируются на поверхности электродов в соответствии с линейным законом инжекции. Для диэлектрических жидкостей с достаточно большой концентрацией примеси и низкой диэлектрической проницаемостью необходимо более детально учитывать образование комплексных ионов. Была предложена методика расчета поля скоростей и теплопереноса при больших числах Прандтля. Показано, что изменение содержания примеси и подвижности ионов может привести к изменению направления движения жидкости. Был проведен анализ системы уравнений электрогидродинамики при униполярной инжекционной проводимости слабопроводящей жидкости в приграничном слое с неавтономным режимом инжекции.

4. Вариационные принципы гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред.

Вариационные принципы гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред рассматривались в работах И. Е. Тарапова [33, 82, 83]. В [33], как уже отмечалось, было показано, что общая система уравнений гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред может быть получена на основе вариационного принципа Л. И. Седова. В [82] вариационный принцип Херивела–Лина, хорошо известный в классической гидродинамике, был обобщен на случай адиабатических течений намагничивающейся идеально проводящей среды. В работе [83] (выполненной с соавторами) принцип Херивела–Линя распространен на адиабатические течения

изотропно поляризующейся невязкой среды с «вмороженным» электрическим зарядом. Отметим также, что вариационным принципам механики сплошных сред посвящен большой раздел книги И. Е. Тарапова [110].

Остановимся более подробно на работе [82]. В МГД-приближении движение намагничивающейся среды описывается системой уравнений (2.2). В случае адиабатических течений идеально проводящей среды эта система принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0; \quad \frac{d S'}{d t} \equiv \frac{d}{d t} (S + S^e) = 0; \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) = 0; \\
 \rho \frac{d \vec{v}}{d t} &= -\nabla(p + \psi^{(\rho)}) + M \nabla H + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B}; \\
 p &= p(\rho, S), \quad T = T(\rho, S), \quad \vec{M} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} - \vec{H}) = \frac{1}{4\pi} (\mu(\rho, T, H) - 1) \vec{H}; \\
 \psi^{(\rho)} &\equiv -\frac{1}{\rho} \int_0^H \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{M}{\rho} \right) dH = -\frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - \rho \mu_\rho) dH, \\
 S^e &\equiv \frac{1}{4\pi \rho} \int_0^H \mu_T H dH, \quad \mu_\rho \equiv \frac{\partial \mu}{\partial \rho}, \quad \mu_T \equiv \frac{\partial \mu}{\partial T}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Внутренняя энергия U' и энтальпия w' единицы массы среды представляются в виде:

$$U' = U + U^e, \quad w' = w + w^e = U + \frac{p}{\rho} + w^e,$$

где U, w предполагаются заданными функциями термодинамических параметров ρ и S , а U^e, w^e определены следующими равенствами:

$$U^e = \frac{BH}{4\pi\rho} - \frac{H^2}{8\pi\rho} - \frac{\psi^{(T)}}{\rho}, \quad w^e = U^e + \frac{H^2}{8\pi\rho} + \frac{\psi^{(\rho)}}{\rho}$$

С использованием известных термодинамических соотношений уравнение импульсов намагничивающейся среды (пятое уравнение системы (4.1)) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} &= -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(T)}}{\rho} \right) + T \nabla S' + \frac{1}{4\pi \rho} \left(\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} \right) \times \vec{B}, \\
 w &= U + \frac{p}{\rho}, \quad \psi^{(T)} = -\int_0^H T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{M}{T} \right) dH,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В [82] показано, что рассматриваемым движениям намагничивающейся среды отвечают стационарные значения функционала

$$I = \int_Q \Lambda(\vec{v}, \rho, S, \vec{B}, \alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_4, \bar{\lambda}_5) dQ,$$

$$\Lambda \equiv \frac{\rho v^2}{2} - \rho U' + \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial(\rho S')}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S' \vec{v} \right) +$$

$$+ \lambda_3 \left(\frac{\partial(\rho \alpha)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \alpha \vec{v} \right) + \lambda_4 \operatorname{div} \vec{B} + \bar{\lambda}_5 \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) \right), \quad (4.3)$$

где $Q = \Omega \times (t_0, t_1)$ – четырехмерный цилиндр в пространстве $(\vec{x}, t)$, Ω – фиксированная область в $\vec{x}$ – пространстве, занятая движущейся средой; (t_0, t_1) – рассматриваемый интервал времени. Иными словами, на решениях системы уравнений (4.1) $\delta I = 0$ (δI – вариация функционала I) для любых допустимых вариаций функций, указанных в качестве аргументов лагранжиана Λ ; допустимыми считаются вариации, обращающиеся в нуль на границе четырехмерного цилиндра Q .

При $\lambda_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, 5$ становится очевидной связь сформулированного вариационного принципа $\delta I = 0$ с классическим принципом Гамильтона–Остроградского. Проясняется также смысл функций $\lambda_k = \lambda_k(\vec{x}, t)$ как множителей Лагранжа для ограничений, накладываемых первыми четырьмя уравнениями системы (4.1) и дополнительным условием идентификации частиц среды:

$$\frac{d\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \alpha = 0, \quad (4.4)$$

где $\alpha = \alpha(\vec{x}, t)$ – некоторая переменная Лагранжа. Условие (4.4), как и в классической гидродинамике, обеспечивает общность полученного ниже представления поля скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t)$.

Варьирование функционала I и приравнивание нулю его вариационных производных по $\vec{v}, \vec{B}, S, \alpha$ и ρ приводит к следующей системе уравнений:

$$\vec{v} = \nabla \lambda_1 + S \nabla \lambda_2 + \alpha \nabla \lambda_3 + \frac{1}{\rho} [\vec{B}, \operatorname{rot} \bar{\lambda}_5];$$

$$\frac{\partial \lambda_5}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \bar{\lambda}_5 + \nabla \lambda_4 + \frac{\vec{H}}{4\pi} = 0; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} + T = 0; \quad (4.5)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = 0; \quad w - \frac{v^2}{2} + \frac{d\lambda_1}{dt} + S \frac{d\lambda_2}{dt} + \alpha \frac{d\lambda_3}{dt} + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(\tau)}}{\rho} = 0.$$

Полная система вариационных уравнений наряду с (4.5) включает в себя также первые четыре уравнения исходной системы (4.1) и условие идентификации частиц среды (4.4), легко вытекающие из условий равенства нулю вариационных производных функционала I по $\lambda_k, k = 1, \dots, 5$.

В [82] показано, что исходная система уравнений (4.1) эквивалентна системе вариационных уравнений. Это означает, что любое решение исходной системы (4.1) является одновременно решением полной системы вариационных уравнений и, наоборот, любое решение системы вариационных уравнений удовлетворяет исходной системе уравнений.

Первое уравнение системы (4.5) является обобщением известного в гидродинамике представления Клебша поля скоростей $\vec{v}(\vec{x}, t)$; функции $\alpha(t, \vec{x})$, $\lambda_k(t, \vec{x})$ в этом представлении принято называть потенциалами Клебша. Предположим, что потенциалы Клебша $\alpha(t, \vec{x})$, $\lambda_3(t, \vec{x})$ в (4.5) свободны от ограничений, накладываемых на них уравнением (4.4), (4.10). В этом случае, подставляя представление Клебша в уравнение (4.2), будем иметь:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \nabla \lambda_1 + S \nabla \lambda_2 + \alpha \nabla \lambda_3 + \frac{1}{\rho} [\vec{B}, \text{rot} \vec{\lambda}_5]; \\ \nabla h - \left(T + \frac{d\lambda_2}{dt} \right) \nabla S - \frac{d\lambda_3}{dt} \nabla \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \nabla \lambda_3 &= 0, \\ h &\equiv \frac{v^2}{2} + w + \frac{\psi^{(\rho)} - \psi^{(T)}}{\rho} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\vec{B} \times \text{rot} \vec{\lambda}_5).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Отсюда, учитывая третье уравнение системы (4.5), получим:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial \lambda_3}, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \quad h = h(t, \alpha, \lambda_3).\tag{4.7}$$

Таким образом, уравнение движения намагничивающейся жидкости (4.2) представляется в виде системы уравнений (4.7), напоминающих канонические уравнения Гамильтона в механике систем с конечным числом степеней свободы.

Из (4.7) легко вытекает первый интеграл уравнения движения намагничивающейся среды: $h = f(t)$, где $f(t)$ – произвольная функция времени, а потенциалы Клебша α, λ_k подчинены условиям (4.4), (4.5). В случае обычной газовой динамики этот интеграл приобретает вид:

$$\frac{v^2}{2} + w + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} = f(t),$$

а в случае магнитной гидродинамики ($\mu = 1$) имеем:

$$\frac{v^2}{2} + w + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\vec{B} \times \text{rot} \vec{\lambda}_5) = f(t).$$

Интересна модифицированная формулировка принципа Херивела–Лина, указанная в [82]. В этой формулировке в качестве лагранжиана в (4.3) вместо Λ необходимо принять

$$\Lambda_1 = \frac{\rho v^2}{2} - \rho U' - \rho \frac{d\lambda_1}{dt} - \rho S' \frac{d\lambda_2}{dt} - \rho \alpha \frac{d\lambda_3}{dt} - \vec{B} \cdot \nabla \lambda_4 - \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\lambda}_5}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{\lambda}_5 \right) \quad (4.8)$$

Учитывая (4.5) и приведенные выше выражения для U' , w' , получим

$$\Lambda_1 = p + \frac{H^2}{8\pi} + \psi^{(\rho)} = p + p^e = p'.$$

Согласно модифицированной формулировке принципа Херивела – Лина действительным движениям намагничивающейся идеально проводящей среды отвечают стационарные значения функционала

$$I_1 = \int_Q p'(w, S, H) dQ. \quad (4.9)$$

где p' – полное давление в среде, рассматриваемое как функция аргументов w, S, H . При варьировании функционала (4.9) необходимо использовать соотношения (4.5).

Приведенные выше формулировки вариационного принципа относятся к сжимаемой намагничивающейся среде. Для несжимаемой жидкости, как показано в [82], соответствующий функционал имеет вид:

$$I_2 = \int_Q \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + S^e \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) - \mu \vec{v} \cdot (\text{rot} \vec{\lambda}_5 \times \vec{H}) - \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - \mu_T T) dH \right] dQ, \quad (4.10)$$

а условия стационарности этого функционала – $\delta I_2 = 0$ – приводят к системе вариационных уравнений:

$$\vec{v} = \nabla \lambda_1 + S^e \nabla \lambda_2 + \alpha \nabla \lambda_3 + \frac{\mu}{\rho} \text{rot} \vec{\lambda}_5 \times \vec{H}; \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T; \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = 0;$$

$$S^e \equiv \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H \mu_T H dH, \quad \mu \equiv \mu(\rho, T, H).$$

Перейдем к изложению результатов работы [83], где вариационный принцип Херивела–Лина обобщен на течения поляризующейся среды. Адиабатические течения изотропно поляризующейся невязкой жидкости с «вмороженным» электрическим зарядом в ЭГД-приближении описывается системой уравнений:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \nabla \chi^{(\rho)} + P \nabla E - \rho \nabla \Pi + q \vec{E}; \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0; \quad \frac{dS'}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(S + S^e) = 0; \\
\frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div} q \vec{v} &= 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = q; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \\
\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} &= \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T, E), \quad p = p(\rho, S), \quad T = T(\rho, S); \\
\chi^{(\rho)} &\equiv - \int_0^E \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{P}{\rho} \right) dE = \varepsilon_0 \int_0^E (\varepsilon - \rho \varepsilon_\rho) E dE - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}; \\
S^{(e)} &\equiv \frac{\varepsilon_0}{\rho} \int_0^E \varepsilon_T E dE, \quad \varepsilon_\rho \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_T \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.
\end{aligned}$$

Здесь Π – потенциал внешнего поля массовых сил; $\vec{E}$, $\vec{D}$ – напряженность и индукция электрического поля; $\vec{P}$ – диэлектрическая поляризация среды; ε_0 – электрическая постоянная; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; q – объемная плотность электрического заряда; S' – полная энтропия единицы массы среды; T – температура.

Отметим, что уравнения (4.11), как и в [83], записаны в системе измерения физических величин СИ.

Энтропия и энтальпия единицы массы поляризующейся среды аналогично рассмотренному выше случаю намагничивающейся среды представляются в виде: $U' = U + U^e$, $w' = w + w^e$, где $U = U(\rho, S)$, $w = w(\rho, S)$ – заданные функции параметров ρ, S , а функции U^e , w^e определены следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
U^{(e)} &= \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{\rho} + TS^e - \frac{\varepsilon_0}{\rho} \int_0^E \varepsilon E dE = \frac{1}{\rho} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} - \chi^{(T)} \right), \\
w^e &= U^e + \frac{p^e}{\rho}, \quad p^e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \chi^{(\rho)}, \\
\chi^{(T)} &\equiv - \int_0^E T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P}{T} \right) dE = \varepsilon_0 \int_0^E (\varepsilon - T \varepsilon_T) E dE - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.
\end{aligned}$$

Уравнение импульсов поляризующейся среды (первое уравнение системы (4.11)) преобразуется к виду:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \left(p + \Pi + \frac{\chi^{(\rho)} - \chi^{(T)}}{\rho} \right) + T \nabla S' + \frac{q}{\rho} \vec{E}. \quad (4.12)$$

В [83] показано, что действительным движениям поляризующейся среды отвечают стационарные значения функционала

$$I^e = \int_Q \Lambda^e(\vec{v}, \rho, S, \vec{D}, q, \alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_5) dQ, \quad (4.13)$$

где лагранжиан Λ^e имеет вид:

$$\begin{aligned} \Lambda^e \equiv & \frac{\rho v^2}{2} - \rho(U' + \Pi) + \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) + \\ & + \lambda_3 \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} q \vec{v} \right) + \lambda_4 (\operatorname{div} \vec{D} - q) + \lambda_5 \left(\frac{\partial(\rho \alpha)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \alpha \vec{v} \right). \end{aligned}$$

Условие стационарности функционала I^e приводит к следующей системе вариационных уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \nabla \lambda_1 + S' \nabla \lambda_2 + \frac{q}{\rho} \nabla \lambda_3 + \alpha \nabla \lambda_5, \\ h^e &\equiv w + \Pi - \frac{v^2}{2} + \frac{\chi^{(\rho)} - \chi^{(T)}}{\rho} + \frac{d\lambda_1}{dt} + S' \frac{d\lambda_2}{dt} + \alpha \frac{d\lambda_5}{dt} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho S')}{\partial t} + \operatorname{div} \rho S' \vec{v} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0, \quad \frac{\partial(\rho \alpha)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \alpha \vec{v} = 0, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -T, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\lambda_4, \quad \frac{d\lambda_5}{dt} = 0, \\ \vec{E} &= -\nabla \lambda_4, \quad \operatorname{div} \vec{D} = q; \end{aligned} \tag{4.14}$$

В [83] показано, что исходная система уравнений (4.11) эквивалентна системе вариационных уравнений (4.14). Показано также, что уравнение движения поляризующейся среды может быть записано в виде (4.7), где под h следует понимать функцию h^e , определенную в (4.14); потенциалы Клебша α, λ_k ($k=1, \dots, 4$) при этом должны удовлетворять системе вариационных уравнений (4.14). Получены первые интегралы уравнений движения, обобщающие известные интегралы Бернули и Коши–Лагранжа на случай поляризующейся среды.

5. Динамика сплошных сред с источниками массы, импульса и энергии.

Цикл работ И. Е. Тарапова посвящен механике сплошных сред с источниками массы, импульса и энергии [96-101, 103-105]. Полученные новые результаты использовались им в курсе лекций по механике сплошных сред, а также были изданы в виде учебного пособия [102]. Источники или стоки массы могут быть как непрерывно распределены по объему, занятому средой, так и дискретным образом. В последнем случае они могут задаваться в виде δ -функций. Задачи о движении сплошных сред при наличии источников рассматривались до этого, например, в плоских задачах подземной гидромеханики, при исследовании течений жидкостей и газов в пластах при наличии колодцев, нефтяных скважин и других дискретных источников/стоков. Модель гипотетической среды с распределенными источниками импульсов давления

$p(t, \vec{r}) = \delta(t - \tau)\theta(\tau, \vec{r})$ оказалась полезной для механической интерпретации потенциала движения среды и для ряда практических применений в технологии направленных взрывов [102].

И. Е. Тарапов рассмотрел случай сплошной среды с источниками, независимо от природы источников, включая горение, химические реакции, протекающие с выделением или поглощением энергии. Наиболее важные приложения развитой И. Е. Тараповым теории относятся к $(n-1)$ -мерным задачам, в которых приток/отток массы, импульса и энергии происходит вдоль n -й координаты, а также к многофазным средам, о чем будет сказано дальше. В теории плоских безвихревых течений идеальной несжимаемой жидкости полезным является подход, связанный с введением определенной системы источников/стоков. При течении жидкости по тонким длинным трубам или каналам с проницаемыми стенками описание течения на основе одномерной модели сопровождается введением системы распределенных источников/стоков вдоль стенок канала. Подобный подход используют при моделировании работы оксигенаторов, теплообменников, очистителей жидкости и разделителей смесей.

В дифференциальной форме законы сохранения массы, импульсов и энергии при условии отсутствия внутреннего момента импульса, распределенных объемных и поверхностных пар сил получены И. Е. Тараповым в виде [102]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = q, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \vec{p}_{;k}^k + \vec{\gamma} - q\vec{v}, \quad (5.2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{p}^k \cdot \vec{v}_{;k} + \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \varepsilon - qe, \quad (5.3)$$

где $q(t, \vec{r})$, $\vec{\gamma}(t, \vec{r})$, $\varepsilon(t, \vec{r})$ – объемная плотность источников массы, импульсов и энергии, $\vec{p}^k$ – напряжение на k -ой координатной площадке, $\lambda (\geq 0)$ – коэффициент теплопроводности. Импульс $\vec{\gamma}$ является аналогом импульса Мещерского для тела (точки) переменной массы, а величина $\vec{\gamma} - q\vec{v}$ – реактивная сила, возникающая из-за различия импульса инфинитезимального объема сплошной среды и импульса поступающих в него частиц.

Замыкание системы (5.1)-(5.3) производится реологическим соотношением

$$p_{ik} = p_{ki} = -p\delta_{ik} + 2\mu v_{ik} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)v_{||}\delta_{ik}, \quad (5.4)$$

где μ, ζ – коэффициенты вязкости.

Граница области среды в общем случае предполагается проницаемой, так что вещество может поступать в систему или выводиться из нее.

Система уравнений (5.1)–(5.3) для однофазной сплошной среды с источниками получена на основе модели открытой термодинамической системы. При этом изменение внутренней энергии системы есть

$$dE = TdS - pdV + \mu dM,$$

где dM – изменение массы системы, $\mu = (\partial E / \partial M)_{S,V}$ – химический потенциал системы. Для однокомпонентной среды химический потенциал равен удельной свободной энергии Гиббса (G)

$$g = e + \frac{p}{\rho} - Ts, \quad g = \frac{G}{M}, \quad e = \frac{E}{M}, \quad s = \frac{S}{M}$$

Из (5.3) и соотношения Гиббса получено уравнение баланса энтропии, а из условия неотрицательности производства энтропии – ограничения на коэффициенты модели:

$$\mu \geq 0, \quad \varsigma \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \varepsilon \geq qg.$$

И. Е. Тарапов получил обобщение известных формул и теорем механики сплошной среды на случай сред с источниками: теоремы Фридмана о сохраняемости векторных линий и интенсивностей векторных трубок, теоремы Кельвина о циркуляции по замкнутому контуру, интегралы уравнения движения, а также выражение для силы, действующей на замкнутый контур. Последний случай есть обобщение формулы Жуковского, которая была получена И. Е. Тараповым в виде:

$$\vec{R} = \rho \vec{v}_\infty \times \vec{\Gamma} + \vec{J} - Q \vec{v}_\infty, \quad \vec{J} = \int_L \vec{\gamma} dL, \quad Q = \int_L q dL$$

где $\vec{v}_\infty$ – скорость набегающего потока, $\vec{\Gamma}$ – циркуляция скорости по контуру L , а дополнительные слагаемые связаны с наличием источников массы и импульсов.

С использованием модели (5.1)–(5.4) И. Е. Тараповым было исследовано распространение звука в сжимаемой сплошной среде, находящейся как в равновесном, так и в неравновесном состоянии. Уравнения, описывающие распространение волн, получены в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = f(c, q, \gamma) \frac{\partial}{\partial t} u$$

где u – амплитуда, c – скорость волны. Для случая $\vec{\gamma} = \gamma_0 q \vec{v}$ было проведено более подробное исследование особенностей распространения волн и возможного развития неустойчивости.

Кроме того, получены решения ряда задач о стационарных течениях несжимаемых сред с источниками: движение вязкой жидкости в бесконечном канале с постоянным сечением, задача Куэтта о движении жидкости между бесконечными параллельными пластинами, в зазоре между двумя движущимися вдоль оси коаксиальными цилиндрами с проницаемыми или непроницаемыми стенками, движение жидкости по трубе произвольного сечения для случаев постоянной и переменной вдоль трубы плотности источников. Исследованы физические эффекты, обусловленные наличием источников. Рассмотрены задачи о течении жидкости в канале с проницаемыми стенками при наличии дискретных источников. Решен также ряд задач обтекания

тел несжимаемой жидкостью с переменной массой: обтекание бесконечного цилиндра в приближении Озеена и обтекание сферы в приближении Стокса.

В последней главе работы [102] выписаны уравнения сплошной среды с источниками массы, импульса и энергии в электромагнитном поле. Среда предполагается проводящей, изотропно намагничивающейся и поляризующейся. Из уравнений баланса массы, импульса, момента импульса и энергии и из соотношения Гиббса И. Е. Тараповым была получена следующая система уравнений (МГД-приближение):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \psi^\rho) + \frac{1}{4\pi}[\text{rot}\vec{H}, \vec{B}] + \vec{M}\nabla\vec{H} + \text{div}\hat{\tau} + \vec{\gamma} - q\vec{v}, \quad (5.5)$$

$$\rho T \frac{ds_e}{dt} = \text{div}(\lambda \nabla T) + \tau_j^i \nabla_i v^j + \frac{v_m}{4\pi} (\text{rot}\vec{H})^2 - qTs_e, \quad (5.6)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}[\vec{v}, \vec{B}] - \frac{1}{4\pi\sigma} \text{rot} \text{rot}\vec{H}, \quad (5.7)$$

где

$$s_e = s(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial t} \right)_{\rho, H} dH, \quad \psi^\rho = -\rho^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{M}{\rho} \right) dH, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

$\hat{\tau}$ – тензор вязких напряжений, $\vec{H}$ и $\vec{B}$ – напряженность и индукция магнитного поля, $\vec{M}(\rho, T, \vec{H}) = (\vec{B} - \vec{H})/(4\pi)$, c – скорость света, σ – электрическая проводимость. При отсутствии распределенных источников момента импульса $\hat{\tau}$ – симметричный тензор. Закон сохранения массы в этом случае имеет вид (5.1).

На основе модели (5.1), (5.5)–(5.7) И. Е. Тараповым совместно с его учеником Д. В. Легейдой было исследовано распространение плоских волн в идеальной непроводящей среде [101]. Получены выражения для скоростей быстрой и медленной магнитозвуковых волн. Показано, что в среде переменной массы не существует энтропийных волн. Исследовано движение проводящей несжимаемой жидкости с источниками между параллельными пластинами; получено выражение для силы, действующей на тело с распределенными на его поверхности источниками/стоками массы в электромагнитном поле. Рассмотрена задача о стационарном течении проводящей жидкости между параллельными проницаемыми пластинами с непрерывно распределенными внутренними источниками массы. Установлен характер зависимости скорости течения, распределения силовых линий магнитного поля, силы трения на пластинах от интенсивности источников/стоков массы. Было показано, что сила трения на пластине пропорциональна скорости продува и квадрату интенсивности источников q , когда интенсивность вдува на одной пластине совпадает с интенсивностью отсоса на другой, [100]. Исследованы характеристики МГД-подшипника, в котором в качестве смазочного слоя используется жидкость с непрерывно распределенными внутренними источниками массы [103]. Получено точное

аналитическое решение этой задачи и выявлена зависимость коэффициента эффективности подшипника от скорости вдува на стенках и от интенсивности источников/стоков массы.

По этой теме под руководством И. Е. Тарапова выполнен ряд дипломных работ и опубликованы совместные статьи со студентами и аспирантами [97, 100, 101, 103, 104], а также защищена кандидатская диссертация Д.В. Легейдой.

Модели многофазных и многокомпонентных сред в ряде случаев сводятся к модели однофазной (однокомпонентной) среды, в которой влияние остальных фаз и компонент учитывается в источниках массы, импульса и энергии. Это позволяет упростить решение ряда прикладных задачи и лучше понять физический смысл источников. Например, рост биологических тканей и организмов связан с доставкой вещества и распределением его по объему растущего тела. В тканях животных доставка производится с потоком крови, распределяющимся по системе сосудов вплоть до капилляров, число которых порядка 10^4 – 10^6 на 1 см^2 ткани. Поэтому можно считать, что в каждом инфинитезимальном объеме растущей среды есть источник массы (капилляр). В тканях растений аналогичная доставка производится потоком растительного сока, движущегося по сложной проводящей системе растений. Простейшая однофазная модель биологического роста [120] основана на уравнении баланса массы (5.1). Обычно при проведении экспериментов полагают, что $\rho = \text{const}$ и уравнение (5.1) используют, чтобы по результатам измерений скоростей роста $\vec{v}$ (скоростей перемещений точек растущей среды в ходе ростовых деформаций) вычислить распределение массопродукции $q(t, \vec{r})$. Физический смысл источника массы проясняется, если рассмотреть двухфазную модель растущей среды, состоящей из твердого каркаса (фаза 1) и доставляющей жидкости (фаза 2), которая обеспечивает приток вещества для приращения массы каркаса. Уравнения баланса масс имеют вид:

$$\frac{\partial \rho^1}{\partial t} + \text{div}(\rho^1 \vec{v}^1) = q^{12}, \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial t} + \text{div}(\rho^2 \vec{v}^2) = q^{21}, \quad (5.8)$$

где $\rho^{1,2}$, $\vec{v}^{1,2}$ – плотности и скорости фаз, $q^{21} = -q^{12}$ – межфазный массообмен.

Складывая уравнения (5.8) и вводя плотность среды $\rho = \rho^1 + \rho^2$, получим закон сохранения массы для квазиодномерной модели в виде [120]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = q,$$

где $\vec{v} = \vec{v}^1$, поскольку рост материала определяются по ростовым деформациям твердого каркаса, а

$$q = \text{div}(\rho^2 (\vec{v}^2 - \vec{v}^1)), \quad (5.9)$$

т. е. источники массы для твердого каркаса связаны с относительным движением жидкой фазы и переносом растворенного в ней вещества. Конкретизируя геометрию транспортной системы,

скорости течения доставляющей жидкости и дополняя уравнения законами сохранения импульса и энергии, можно получить новые содержательные модели растущих биологических материалов. Подход, основанный на уравнениях модели И. Е. Тарапова сплошной среды с источниками, был впоследствии развит в большом цикле работ представителей школы Тарапова для случая растущих двумерных континуумов, однослойных и многослойных пластин, при свободном росте и механическом ограничении роста, при неоднородном росте под действием внешних нагрузок и др. [121-126].

Интересным объектом для применения модели среды с распределенными источниками являются листья растений. Малая толщина листа по сравнению с его продольными размерами позволяет моделировать его как двумерный объект (пластину). Наличие сложной ветвящейся проводящей системы (жилки листа), обеспечивающей приток растительного сока с растворенными веществами, может учитываться в рамках плоской задачи как распределенные источники массы (воды и растворенных веществ). Поскольку поверхность листа активно испаряет воду, этот процесс можно учесть, вводя распределенную систему стоков массы (воды). Интенсивность источников зависит от скорости течения доставляющей жидкости и ряда параметров сплошной среды (тканей листа), а интенсивность стоков – от температуры и других параметров окружающей среды, а также некоторых регуляторных процессов в листе. В результате можно получить интересные с математической точки зрения задачи, решения которых, в зависимости от параметров, описывают разные режимы «работы» листа как тепломассообменника [127-134].

В двумерной постановке такие задачи основаны на уравнении (5.1) и, поскольку течение жидкости в биологических тканях связано с фильтрацией по межклеточным промежуткам, различным каналам и трубкам, то вместо (5.2) используется закон Дарси:

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\frac{q(t, \vec{r})}{\rho}, \quad \vec{V} = -\frac{\hat{K}}{\mu} \nabla p \quad (5.10)$$

где $\hat{K}$ – тензор проницаемостей биологической сплошной среды (в общем случае анизотропной). В $q(t, \vec{r})$ входят как источники вида (5.9), так и стоки массы, обусловленные испарением воды.

В работе [128] уравнения (5.10) получены усреднением по площади листа соответствующих уравнений в трехмерной постановке и пояснен физический смысл источников. В результате усреднения уравнений (5.10) по всем пространственным координатам можно получить нульмерную модель [129], которая описывает различные колебательные режимы притока-испарения жидкости в листе как динамической системы [127]. Теоретические результаты хорошо соответствуют результатам многочисленных экспериментов на растениях [126].

Интересно, что транспортные задачи, связанные с притоком/оттоком вещества и энергии в биологических тканях и органах, тесно связаны с обсуждавшимися выше ростовыми задачами и

могут рассматриваться в рамках одной и той же модели (5.1)–(5.3), но на разных масштабах времени (более быстрые транспортные процессы, связанные с мгновенными упругими деформациями и более медленные – ростовые, связанные с ростовыми деформациями и релаксациями напряжений) [120-134].

Модель И. Е. Тарапова сплошной среды с внутренними источниками может также использоваться для описания роста сферических опухолей с учетом доставки к ним вещества по радиальной системе кровеносных сосудов. В двумерной постановке могут быть рассмотрены задачи тепломассообмена в легких с учетом доставки воздуха по системе бронхов и воздушных путей в коже и других тканях. В этом случае транспортные и ростовые процессы также тесно связаны, что позволяет изучать влияние внешних механических, химических, тепловых, электрических и магнитных воздействий на рост опухоли.

6. Механика кровообращения

Метод интегральных соотношений, развитый и использованный в работах И. Е. Тарапова по гидродинамической теории смазки, был им также применен для решения задачи о нестационарных течениях вязкой жидкости в длинных трубках переменного сечения в приложении к исследованию течений крови в артериях [106–108].

Результаты, полученные И. Е. Тараповым, его идеи и интерес к биологической механике – новому, интенсивно развивающемуся направлению современной механики, стимулировали его учеников–студентов, аспирантов и научных сотрудников. Так, под руководством И.Е. Тарапова проводились исследования электромагнитных свойств биологических тканей и возможные физические механизмы воздействия на них внешних полей с целью диагностики или лечения заболеваний. По этой тематике была защищена кандидатская диссертация Кизиловой Н.Н. Были исследованы вопросы влияния электромагнитных полей на реологию крови и ее течения по сосудам. В настоящее время механика кровообращения является одним из ведущих направлений научных исследований на кафедре [135-146]. Были исследованы различные режимы течения вязкой жидкости по тонкостенным, толстостенным и многослойным вязкоупругим трубкам. Показана возможность стабилизации течений жидкости у деформирующейся поверхности за счет вязкоупругого анизотропного покрытия. В кровеносных сосудах такие изменения свойств стенки можно отнести к адаптационным, направленным на поддержание устойчивости кровотока при наличии нарушений кровообращения. Были исследованы закономерности строения артериальных русел и разработана виртуальная компьютерная модель сердечно-сосудистой системы человека, позволяющая проводить анализ экспериментальных кривых, биомеханическую интерпретацию диагностически значимых параметров, моделировать нарушения в системе кровообращения, планировать хирургические операции, лечебные и реабилитационные мероприятия.

Труды И.Е. Тарапова и его учеников составили основу для изучения актуальных фундаментальных и прикладных задач современной механики.

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ И. Е. ТАРАПОВА

1. Тарапов И. Е. Вопросы газодинамической теории смазки и метод интегральных соотношений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1953. – 10 С.
2. Тарапов И. Е. Вопросы газодинамической теории смазки и метод интегральных соотношений: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1953. – 139 С.
3. Тарапов И. Е. Решение задачи о движении вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами с теплоотдачей // Прикл. мат. и мех. 1955. Т. 19, вып.3. С. 325-330.
4. Тарапов И. Е. Движение весомой пластины и вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями // Учен. зап. Харьк. ун-та. 1957. Т. 80: Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва. Т.25. С. 107-III.
5. Тарапов И. Е., Герман В. Л., К гидро- и газодинамической теории смазки // Учен. зап. Харьк. ун-та. 1957. Т.80: Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва. Т. 25. С. 101-106.
6. Тарапов И. Е., Борисенко А. И., Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1959. 238 С.
7. Тарапов И. Е. К задаче о смазке кольцевого подпятника // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 194-197.
8. Тарапов И. Е. К теории тонкого крыла конечного размаха // Учен. зап. Харьк. ун-та. 1960, Т.114: Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. и Харьк. мат. о-ва. Т.26. С. 247-254.
9. Тарапов И. Е. Свободная конвекция в трубе, вращающейся вокруг оси // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Энергетика и автоматика. 1960. № 3. С. 171-175.
10. Tarapov I. Ye. Application of integral momentum equation for the problem of fluid flow between two solid surfaces. // Proc. of the seventh congress on theoretical and applied mechanics. Bombay, December. 23 – 26, 1961. /Bombay, 1961/. P. 219-234.
11. Тарапов И. Е., Масалов С. А., Подольский Е. Н. Дифракция электромагнитных волн на периодических идеально проводящих решетках. // II Всесоюз. симпозиум по дифракции волн: Аннот. докл. Горький, 7-13 июня 1962. м., 1962. С. 100.
12. Тарапов И. Е. Задача смазки в магнитной гидродинамике // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы: Ч. 2. Доклады, прочит. на II совещ. по теорет. и приклад. магнит. гидродинамике в г. Риге, 27 июня – 2 июля 1960 г. Рига, 1962. С. 147-154.
13. Дикий Г. П., Тарапов И. Е. Некоторые автомодельные задачи магнитной гидродинамики с аксиальной симметрией. // Журн. эксперим. и техн. физики. 1962. Т.32, вып. II. С. 1302-1312.
14. Дикий Г. П., Тарапов И. Е. Некоторые стационарные задачи магнитной гидродинамики с аксиальной симметрией. – Журн. техн. физики. 1962. Т.32, вып. II. С. 1333-1341.

15. Tarapov I. Ye. Some recent development in Soviet Physics and Mathematics // ISCUS Quart. Journ. 1963. N 10. 17 p.
16. Tarapov I. Ye. The plastic flow of a Bingham solid between two approaching disks // Proc. Indian Acad. Sci. 1963. A 57, № 5. P. 294-304.
17. Масалов С. А., Тарапов И. Е. Дифракция электромагнитных волн на пространственной периодической решетке, составленной из брусьев прямоугольного поперечного сечения /С. А. Масалов, И. Е. Тарапов //Радиотехника и электроника. 1964. Т.9, вып.1. С. 53-60.
18. Тарапов И. Е. Задача дифракции на решетке из произвольных профилей //Журн. вычислит, мат. и мат. физики. 1965. Т.5, й 5. С. 883-893.
19. Тарапов И. Е. Задача о смазке цилиндрического подшипника проводящей жидкостью //Магнит. гидродинамика. 1969. Вып.2. С. 127-136.
20. Тарапов И. Е. К теории магнитогидродинамической смазки //Магнит. гидродинамика. 1969. Вып. 3. С. 101-108; РЖ Мех. 1970. 6615.
21. Тарапов И. Е., Терехов Л. П. К устойчивости движения вала в радиальном магнитогидродинамическом подшипнике //Магнит. гидродинамика, 1970. № 4. С. 132-138.
22. Тарапов И. Е. Движение проводящей жидкости между вращающимися соосными цилиндрами//Сб. материалов к 5 Таллин. совещ. по электромагнитным расходомерам и электротехнике жидких проводников. Таллин, 1971. Вып.4. С II.
23. Исерс А. Б., Тарапов И. Е. К задаче о течении проводящей жидкости в прямоугольном канале. //Магнит. гидродинамика. 1971. № 3. С. 61-66.
24. Тарапов И. Е. Об эффективности магнитогидродинамических опор //Магнит. гидродинамика. 1971. № 4. С. 63-74.
25. Тарапов И. Е. Движение намагничивающейся жидкости в смазочном слое цилиндрического подшипника //Магнит. гидродинамика. 1972. № 4. С. 19-24.
26. Тарапов И. Е. Движение намагниченной проводящей жидкости между двумя плоскими электродами в поперечном магнитном поле //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 6. С. 179-184.
27. Исерс А. Б., Тарапов И. Е. Движение намагничивающейся жидкости между параллельными пластинами //7-е совещание по магнитной гидродинамике. Рига, 1972. Т.І. С. 252-253.
28. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред //Магнит. гидродинамика. 1972. № 1. С. 3-11.
29. Ермаков В. И., Тарапов И. Е. Магнитогидродинамическая шаровая опора /Магнит. гидродинамика. 1972. № 2. С. 117-122.
30. Тарапов И. Е. Некоторые задачи гидродинамики намагничивающейся жидкости //7-е Совещание по магнитной гидродинамике. Рига, 1972. Т.І. С. 249-251.

31. Тарапов И. Е. Об одном точном решении в магнитной гидродинамике //Вестн. Харьк. ун-та. 1972. № 83: Математика и механика. Вып. 37. С. 85-93.
32. Легейда В. И., Тарапов И. Е. Обтекание профиля в магнитном поле, перпендикулярном плоскости потока. //Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 2. С. 232-238.
33. Тарапов И. Е. Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Харьков, 1973. –270 с. - (Автореф. дис. ...-Днепропетровск, 1974. – 39 с).
34. Исерс А. Б., Тарапов И. Е. Движение намагничивающейся жидкости между параллельными пластинами //Магнит. гидродинамика.1973. № 1. С. 73-78.
35. Тарапов И. Е. Движение проводящего газа с переменными свойствами между вращающимися цилиндрами //Прикл. механика. 1975. Т.9, № 2. С. 109-116.
36. Тарапов И. Е. Звуковые волны в намагничивающейся среде // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1973. № 1. С. 15-22.
37. Аль-Насан И. М., Тарапов И. Е. К гидродинамической теории смазки подшипника со втулкой // Прикл. механика. 1973. Т.9, № 6. С. 83-88.
38. Тарапов И. Е. Об интегралах уравнений энергии и движения намагничивающейся среды //Физика конденсир. состояния /ФТИНТ АН УССР. 1973. Вып. 23. С. 136-140.
39. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред //Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1973. Вып.17. С. 221-239.
40. Тарапов И. Е. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1973. №6. С. 116-124.
41. Тарапов И. Е. Простые волны в непроводящей намагничивающейся среде // Прикл. математика и механика. 1973. Т.37, № 5. С. 813-821.
42. Тарапов И. Е. Устойчивость поверхности раздела между средами, поляризующимися по произвольному закону //3 Всесоюз. науч.-техн. конф. по прикл. аэродинамике: Тез. докл. Киев, 1973. С. 156.
43. Ермаков В. И., Тарапов И. Е. Волны в поляризующейся и намагничивающейся среде. //Магнит. гидродинамика. 1974. № 2. С. 51-57.
44. Гидродинамика намагничивающихся и поляризующихся сред //Информ. бюл. Харьк.ун-та. 1974. Вып. I. С. 3-4.
45. Пацегон Н. Ф, Тарапов И. Е. Звуковые и простые волны в проводящей намагничивающейся среде //Укр. физ. журн. 1974. Т.19. № 6. С. 896-902.
46. Легейда В. И., Тарапов И. Е. МГД – обтекание профиля в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости потока //Информ. бюл. Харьк. ун-та. 1974. Вып. 1. С. 4.

47. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. №5. С. 141-144; РЖ Мех. 1975. №2. 2Б2.
48. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы равновесия и устойчивости равновесия намагничивающихся сред// Урал. конф. по применению магнитной гидродинамики в металлургии: Тез. докл. Пермь, 1974. Вып. 1. С. 140-141.
49. Тарапов И. Е. Поверхности разрыва в намагничивающейся среде// Журн. прикл. механики и техн. физики. 1974. № 4. С. 35-40.
50. Тарапов И. Е. Поверхностные волны и устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости //Журн. прикл. механики и техн. физики. 1974. № 4. С. 35-40.
51. Тарапов И. Е. Течение намагничивающейся жидкости по длинным трубам //Прикл. механика. 1974. Т.10, вып. 2. С.1 06-III; РЖ Мех. 1975. № 7. 7Б35.
52. Тарапов И. Е. Ударные волны слабой интенсивности в намагничивающейся среде //Магнит. гидродинамика. 1974. № 2. С. 47-50.
53. Тарапов И. Е., Исерс А. Б. Ускорение вязкого газа в коаксиальном канале. //Информ. бюл. Харьк. ун-та. 1974. Вып.1. С. 5.
54. Тарапов И. Е. Устойчивость поверхности раздела проводящих намагничивающихся сред //Гидромеханика. 1974. Вып.30. С. 79-86; РЖ Мех. 1975. № 5. 5Б28.
55. Тарапов И. Е., Ермаков В. И. Движение поляризующейся жидкости между параллельными пластинами //8-е Риж. совещ. по магнитной гидродинамике: Тез. докл. Рига, 1975. Вып. I: Общие и теорет. вопросы. С. 170-171.
56. Тарапов И. Е., Величко Л. Н. Поведение кавитационного пузырька в однородном магнитном поле //8-е Риж. совещ. по магнитной гидродинамике: Тез. докл. Рига, 1975. Вып. I: Общие и теорет. вопросы. С. 141-142.
57. Попова Л. Н., Тарапов И. Е. Действие магнитного поля на форму кавитационного пузырька в намагничивающейся жидкости //Магнит. гидродинамика, 1976. № 4. с. 33-37; РЖ Мех. 1977. № 7. 7Б277.
58. Тарапов И. Е., Ермаков В. И. Движение поляризующейся жидкости в каналах // Вестн. Харьк. ун-та. 1977. № 148: Прикл. мат. и мех. Вып.42. С. 89-92; РЖ Мех. 1977. № 6. 6Б734.
59. Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е. О слабых разрывах в проводящей намагничивающейся среде //Магнит. гидродинамика. 1979. №2. С. 2-9; РЖ Мех. 1979. № 10. 10Б536.
60. Жакин А. И., Надеборн В., Тарапов И. Е. Об электроконвективной устойчивости слабопроводящей жидкости //Магнит. гидродинамика. 1979. № 2. С. 63-68; РЖ Мех. 1979. №10. 10Б554.
61. Пацегон Н. Ф., Половин Р. В., Тарапов И. Е. Простые волны и сильные разрывы в намагничивающейся среде // Прикл. математика и механика. 1979. Т.43. №1. С. 57-64; РЖ Мех. 1979. №6. 6Б310.

62. Жакин А. И., Тарапов И. Е. Электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей жидкости между двумя цилиндрическими электродами при униполярной инжекции // Магнит. гидродинамика, 1979. № 4. С. 53-57; РЖ Мех. 1980. № 4. 4Б404.
63. Тарапов И. Е., Татарченко Э. Н. Основные законы механики сплошной среды: Учеб. пос. – Харьков, 1980. – 38 с.
64. Тарапов И. Е., Пацегон Н. Ф. Нелинейные волны в проводящей намагничивающейся жидкости. // Вестн. Харьк. ун-та. 1980. № 205: Прикл. метем, и механ., вып.45. С. 40-59; РЖ Мех. 1981. № 3. 3Б751.
65. Тарапов И. Е., Пацегон Н. Ф. Об одном автомодельном решении в гидродинамике намагничивающихся жидкостей // Всесоюз. симпозиум: Гидродинамика и теплофизика намагничивающихся жидкостей. Салоспилс, 1980. С. 34-36; РЖ. Мех. 1981. № 4. 4Б683.
66. Tarapov I. Ye., Patsegon N. F. Nonlinear waves in conductive magnetizable fluid // IEEE Transactions on Magnetics. 1980, Vol. 16, № 2. P. 309-316.
67. Жакин А. И., Тарапов И. Е. Неустойчивость и течение слабопроводящей жидкости при окислительно-восстановительных реакциях на электродах и рекомбинации // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 4. С. 20-26; РЖ. Мех. 1981, № 12. 12Б588.
68. Тарапов И. Е., Пацегон Н. Ф. Стационарные магнитные волны // 5 Всесоюз. съезд по теорет. и приклад. механике: Аннот. докл. Алма-Ата, 1981. С. 283.
69. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальные исследования ЭГД – неустойчивости и электроконвенции в цилиндрических конденсаторах // Магнит. гидродинамика. 1981. № 4. С. 139-142.
70. Тарапов И. Е., Якуба Е. И. На основе комплексного исследования /адаптации стажеров. Харьк. ун-та // Вестн. высш. школы. 1982. № 5. С. 36-37.
71. Тарапов И. Е., Иевлев И. И. Предельное уравнение баланса полной энергии на тангенциальном разрыве // Вестн. Харьк. ун-та. 1982. № 230. С. 3-7.
72. Механика, теория управления и математическая физика. Сб. ст. /Ред.: И. Е. Тарапов. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. – 89 С. – (Вестн. Харьк. ун-та; № 230).
73. Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Исследование физических свойств ФМЖ ультразвуковым методом // Магнит. гидродинамика. 1983. № 4. С. 53-59.
74. Слатинский Н. Д., Тарапов И. Е. Некоторые магнитопластические течения намагничивающихся сред // Математика. Вычислительная техника: Тез. докл. 6 науч. конф. болгар. аспирантов, обучающ. в СССР/. м., 1983. /ч.2/. С. 684-688. – В загл.: Исчислительная техника.
75. Тарапов И. Е. О газодинамической аналогии движения и равновесия намагничивающихся и поляризующихся сред // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 2. С. 136-141.
76. Жакин А. И., Тарапов И. Е. О диссоционной проводимости жидких диэлектриков // Электрон. обработка материалов. 1983. № 3. С. 46-50.

77. Жакин А. И., Тарапов И. Е. Об автомодельных решениях в теории электрогидродинамических струй //Магнит. гидродинамика. 1983. № 4. С. 104-110.
78. Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е. Стационарные магнитные волны //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983; № 3. С. 9-15.
79. Жакин А. И., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Экспериментальное изучение механизма проводимости полярных жидких диэлектриков // Электрон. обработка материалов. 1983. № 5. С. 37-41.
80. Tarapov I. Ye., Patsegon N. F., Phedonenko A. I. Some physical and mechanical phenomena in magnetizable fluids // Third International Conference on magnetic fluids. 28-30 june 1983. University College of North Wales Bangor. P. 1-15. – (Отд. Оттиск).
81. Tarapov I. Ye., Patsegon N. F., Phedonenko A. I. Some physical and mechanical phenomena in magnetizable fluids // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 1983. Vol. 39. P. 51-55.
82. Тарапов И. Е. Вариационный принцип в гидромеханике изотропно намагничивающейся среды //Приклад. математикаи механика. 1984. Т.48, вып. 3. С. 383-387.
83. Борисов И. Д., Лукина В. А, Тарапов И. Е. Вариационный принцип в гидродинамике поляризующихся сред. //Магнит. гидродинамика. 1984. № 4. С. 56-60.
84. Тарапов И. Е. Об интегралах уравнений движения намагничивающейся идеальной среды //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 2. С. 165-169.
85. Тарапов И. Е., Нижник П. А., Пацегон Н. Ф., Попова Л. Н., Федоненко А. И. А.С. 1121713 СССР, МКИЗНОИН29/24. Переключатель с сегментированным потоком жидкости. Гос. реестр изобрет. СССР. – № 3625956/07; Заявл. 1.07.84; Опубл. 30.10.84, Бюл. № 40. – 5 с.
86. Пацегон Н. Ф., Тарапов И. Е., Федоненко А. И. Исследование акустических свойств магнитных жидкостей //Тез.докл. 4 Всесоюз. конф. по магнитным жидкостям. (г.Плес. 14-16 мая 1985г.). Иваново, 1985. Т.2. С. 27-28.
87. Слатинский Н. Д., Тарапов И. Е., К магнитопластичности намагничивающихся сред // Журн. приклад. механики и техн. физики. 1985. № 1(149). С. 18-22.
88. Тарапов И. Е., Слатинский Н. Д. Распространение слабых разрывов в намагничивающемся упруго-пластическом теле //Вестн.Харьк.ун-та. 1985. № 277. С. 101-107.
89. Тарапов И. Е. Об одном новом интеграле вихревых движений // Шестой Всес. съезд по теор.и прикл.механике. – Ташкент.-1986.-С. 591-592.
90. Тарапов И. Е., Жакин А. И., Иевлев И. И., Попова Л. Н. Некоторые задачи устойчивости равновесия и конвективной устойчивости в механике сред, взаимодействующих с электромагнитным полем // Тез.докл. ВсеС. конф. "Метод функций Ляпунова в современной математике". – Харьков. 1986. – С. 9.
91. Тарапов И. Е., Федоненко А. И., Смирнов В. И., Ежов Н. И., Сливин Б. В., Шефтель Л. М. Способ получения электропроводного магнитного материала // А.С. № 1387747.-1986.

92. Patsegon N. F., Tarapov I. Ye. Thermodynamic description of ferrofluids: dissipated mechanisms in micropolar ferrohydrodynamics // *Rostocer Physicalische Manuscripte*. 1987, № 10.-P. 40-46.
93. Борисов И. Д., Попова Л. Н., Тарапов И. Е. Некоторые задачи гидростатики намагничивающейся капиллярной жидкости // XII Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. III, Саласпилс, 1987, С. 83-86
94. Patsegon N. F., Tarapov I. Ye. On the role of momentum tensions in micropolar ferrohydrodynamics // *J.de Physique France*. 1988.-Vol. 49. - P. 759-765.
95. Ермаков В. И., Тарапов И. Е. О простых электромагнитных волнах в нелинейных средах // Четвертый Всесоюзный Симпозиум "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики": Тез. докл. – Харьков, 1989. Часть 2. – С. 306-309.
96. Бурнаев Б. Е., Тарапов И. Е. Распространение плоских звуковых волн в среде с непрерывно распределенными источниками массы //Тез.докл. I междунар. конф. «Численные методы в гидравлике и гидродинамике». – Донецк.-1994.
97. Бурнаев Б. Е., Тарапов И. Е. Звуковые волны в среде переменной массы. – //Математическая физика, анализ, геометрия. – 1995. – Т.2. – №3/4. – С. 399-407.
98. Tarapov I. Ye. The motion of a continuum with sources of mass, impulse and energy continuously distributed // *Proceedings of the Fifth International Conference of Fluid Mechanics*. – Cairo, Egypt. – 1995. – P. 1286-1297.
99. Тарапов И. Е. Течение вязкой несжимаемой жидкости с распределенными источниками массы по бесконечно длинным каналам с проницаемыми стенками // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1997. – Т.4, № 3/4. – С. 1-16.
100. Тарапов И. Е., Легейда Д. В. Течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в каналах с проницаемыми стенками при наличии равномерно распределенных источников массы // 8 Украинская конф. «Моделирование и исследование устойчивости систем». Тез.докл. – Киев.-1997.
101. Легейда Д. В., Тарапов И. Е. Распространение малых возмущений в проводящей среде с источниками массы в электромагнитном поле // *Магнитная гидродинамика*. – 1998. – Т.34. – № 4. – С. 386-392.
102. Тарапов И. Е, Основы механики сплошных сред переменной массы. Учебное пособие для студентов специальности «механика». Харьков. – 1998. – 104 с.
103. Легейда Д. В., Тарапов И. Е. Плоский МГД-подшипник с вдувом или отсосом на стенках и распределенными источниками массы // *Вестник Харьковского университета. Сер. Математика, прикладная математика и механика*. – 1999, N458. – С. 185-193.
104. Легейда Д. В., Тарапов И. Е. Волновые движения в проводящей среде с распределенными источниками массы. // *Вестник Херсонского гос. технич. университета*. – 1999. Спецвыпуск. – С. 101-104.

105. Тарапов И. Е. О некоторых основных задачах механики сплошной среды переменной массы // Прикладная гидромеханика. – 1999. – Т.1(73), № 4. – С. 61-76.
106. Boitchuk I. P., Tarapov I. Ye. Application of a momentum integral model for study of unsteady viscous laminar motion in deformable tubes //Russian J.Biomechanics. – 2001. – V. 5, № 4. – P. 97-102.
107. Бойчук И. П., Тарапов И. Е. Применение метода интегральных соотношений для изучения движения вязкой жидкости по длинным деформирующимся трубам //Тез. докл. VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. – Пермь, 2001. – С.109.
108. Бойчук И. П., Тарапов И. Е. Применение метода интегральных соотношений для изучения движения вязкой жидкости по деформирующейся трубке //Вестник Харьковского национального университета. Сер. Математика, прикладная математика и механика.-2002. – № 542. – С. 13-18.
109. Механика сплошной среды: в 3 ч. Ч. 2. Общие законы кинематики и динамики. – Харьков: Золотые страницы, 2002. – 516 с.
110. Механика сплошной среды: в 3 ч. Ч. 3. Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.

Список дополнительной литературы, цитированной в тексте

111. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. Итоги науки и техники, т.18. М., ВИНТИ. – 1981. - С. 76-208.
112. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. // УМН, 1965. - т.20, № 5.
113. Попова Л. Н. Численное нахождение равновесной поверхности раздела жидкостей // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. – 1981. - № 5. - С.134-137.
114. Попова Л. Н., Федоненко А. И. Об устойчивости жидкой капли в электрическом поле // Магнит. Гидродинамика. – 1982. - № 3. - С.79-84.
115. Попова Л. Н. Неосесимметричные равновесные формы капли на плоскости // МЖГ, 1983, № 5, С. 164-167.
116. Иевлев И. И., Попова Л. Н. Численное определение поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом поле // Вестник ХГУ. Математика, механика и вопросы управления, 1987, № 298, С. 19-25.
117. Chung D. Y., Isler W. E. Ultrasonic Velocity Anisotropy In Ferrofluids Under the Influence of a Magnetic Field. // J.Appl.Phys. – 1978. - vol.49,N3. - P.1809-1811.
118. Gotoh K., Isler W. E., Chung D. Y. Theory of Ultrasound Attenuation in Magneti Fluids. IEEE Trans. on Magnetics, 1980, vol.16, № 2, pp. 211-213.
119. Kanefusa Gotoh and David Y.Chung. Ultrasonic Attenuation in Magnetic Fluids. J. Phys. Soc. Japan, 1984, vol.53, No 8, pp. 2521-2528.
120. Регирер С. А., Штейн А. А. Механические аспекты процессов роста, развития и перестройки биологических тканей // Итоги науки и техн. Компл. и спец. разделы механики. Т.1. – М.:ВИНТИ, – 1985. – С. 3-142.
121. Kizilova N. Stress-strain state of the plate form a growing biomaterial: load transfer from the fiber into the medium // ProC. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2007. – Vol. 56, 2. – P.162-169.
122. Кизилова Н.Н. Исследование устойчивости моделей растущих сплошных сред //Механика твердого тела. – 2006. № 35. – С. 204-211.
123. Кизилова Н. Н. Сравнительный анализ моделей роста биологических сплошных сред // Труды X Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону:Изд-во ООО «ЦВВР». – 2006. – С. 162-166.
124. Kizilova N. N., Egorova E. S. Modelling of laminated growing biological materials //J.Mech.Eng. – 2005. – V. 56, № 5. – P.306-318.
125. Кизилова Н. Н. О постановках задач механики растущих вязкоупругих сплошных сред //Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвященной

- 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР». – 2005. – С. 146-150.
126. Кизилова Н. Н. Транспортная система и рост листа //Современные проблемы биомеханики.Вып.10. Механика роста и морфогенеза.- М.:Изд-во Московского университета.- 2000. – Вып.10. С. 379-405.
127. Kizilova N. Long-distance liquid transport in plants //ProC. Estonian Acad. Sci. Ser. Phys. Math. – 2008. – Vol. 57, № 3. P. 179-203.
128. Kizilova N. N. Liquid Filtration in a Microcirculatory Cell of the Plant Leaf: A Lumped Parameter Model //Intern. J. Fluid Mech. Res. – 2007. – V. 34, № 6. – P. 572-588.
129. Кизилова Н. Н. Фильтрация жидкости в микроциркуляторной ячейке листа растения. Квазиодномерная модель //Прикл. гидромеханика. – 2005. – Т.7, № 2. – С. 33-43.
130. Кизилова Н. Н. Фильтрация жидкости в тканях листа растения: Модель с сосредоточенными параметрами //Динамич.системы. – 2005. – № 19. – С. 37-43.
131. Кізілова Н. М. Рух в'язкої рідини в мікроциркуляторній комірці листків рослин та параметри оптимальної комірки //Вісник Київського університету.Сер.Фізико-математичні науки. – 2003. – № 5. – С. 54-59.
132. Кизилова Н. Н. Исследование фильтрации жидкости в анизотропной пористой среде с источниками массы //Вычислительная и прикладная математика. Сб.тезисов междунар. конф., посвященной 80-летию акад.НАН Украины И. И. Ляшко. – Киев, 2002. – С. 53.
133. Кизилова Н. Н., Столкинер М. Г. Исследование транспорта жидкости и структуры оптимальной микроциркуляторной ячейки //Проблемы бионики. – 2002. – № 57. – С. 103-108.
134. Kizilova N. N. Transport of fluids in plant leaves: movement through the porous media with distributed sources //International conference "Physics of liquid matter: modern problems". – Kyiv, 2001. – P.182.
135. Кизилова Н. Н. Распространение волн в заполненных жидкостью вязкоупругих трубках: сравнение одномерной и двумерной моделей // Вестник ХНУ. Сер.Математика, прикладная математика, механика. – 2010. – № 931. – С. 113-131. 22 Kizilova N., Hamadiche M. Stabilization of the turbulent flows in anisotropic viscoelastic tubes // Advances in Turbulence XII. Series: Springer Proceedings in Physics, Vol. 132 Eckhardt, Bruno (Ed.). – 2010. – P. 899-904.
136. Кизилова Н. Н. Винтовые движения жидкости в трубках: обзор экспериментальных и теоретических результатов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы механики. – 2009. – С. 76-82.
137. Филиппова Е. Н., Кизилова Н. Н. Распространение и отражение волн в заполненных жидкостью вязкоупругих трубках при разных условиях нагружения // Сб.трудов XIII Междунар.конф. «Современные проблемы механики сплошных сред». Ростов-на-Дону. – 2009. – Т.2. – С. 181-185.

138. Кизилова Н. Н., Хамадиш М. Устойчивость течений жидкости у деформирующихся поверхностей, в схлопывающихся трубах и каналах //Вестник ХНУ. Сер. Математика, прикладная математика и механика. – 2007. – № 790. – С. 53-82.
139. Kizilova N. Novel methods of pulse wave diagnostics based on compression of a superficial artery //РАММ. – 2007. – V. 7, № 1. Р. 4020019-4020020.
140. Кизилова Н. Н. Спектральные характеристики и зависимости давление-расход при волновых течениях жидкости в системах вязкоупругих трубок //Акустический вестник. – 2005. – Т.8, № 1-2. – С. 54-63.
141. Кизилова Н. Н. Распространение волн давления в заполненных жидкостью трубках из вязкоупругого материала //Известия РАН. МЖГ. – 2006. N3. С.122-136.
142. Кизилова Н. Н. Распространение волн давления в многослойных анизотропных трубках и диагностический анализ пульсовых колебаний диаметра артерий //Труды X Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». – 2006. – С. 157-161.
143. Кизилова Н. Н. Исследование зависимостей давление-расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах //Акустический вестник. – 2004. – Т.7, № 1. – С. 50-61.
144. Кизилова Н. Н. Разложение волн давления, распространяющихся в податливых трубках, на падающую и отраженную компоненты // Вестник ХНУ. Сер. «Математика, прикладная математика и механика», Т.645, № 54. – 2004. – С. 85-92.
145. Кизилова Н. Н. Распространение и отражение волн в системах податливых трубок //Акустический вестник. – 2003. – Т.6, № 2. – С. 44-51.
146. Кизилова Н. Н. Распространение волн давления в толстостенной трубке конечной длины из вязкоупругого материала: приложение к распространению пульсовых волн в артериальных руслах // Вестник ХНУ. Сер. «Математика, прикладная математика и механика», Т. 602, № 53. – 2003. – С. 82-93.

Диссертации, выполненные под руководством И. Е. Тарапова

1. Аль-Насан И. М. Основные задачи теории смазки подшипника с плавающей втулкой. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков. – 1973. – 105 с.
2. Боева А. А. Поперечные магнитогазодинамические ударные волны в неоднородных плазменных средах. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков:ХГУ, 1999. – 116 с.
3. Дикий Г. П. Некоторые осесимметричные задачи магнитной гидродинамики жидкости конечной электропроводности. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1966.

4. Ермаков В. И. Волны и устойчивость в гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. – Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1992. – 178 с.
5. Жакин А. И. Некоторые вопросы электродинамической устойчивости и электроконвекции слабопроводящих жидкостей. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1980. – 136 с.
6. Жакин А. И. Теория электрических и электрогидродинамических явлений в жидких диэлектриках. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1988. – 385 с.
7. Иевлев И. И. Некоторые задачи гидростатики поляризующихся сред. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1978. – 136 С.
8. Кадер Абдул. Задачи движения жидкости и газа с распределенными источниками массы, импульса и энергии. – Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1994. – 93 с.
9. Кизилова Н. Н. Влияние некоторых физических полей на механические процессы в биологических тканях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1993. – 161 с.
10. Легейда Д. В. Течения проводящей среды с внутренними источниками массы в МГД-каналах с проницаемыми стенками. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 2001. – 132 с.
11. Легейда В. И. Некоторые задачи конвективного теплообмена в магнитной гидродинамике. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1983. – 136 с.
12. Пацегон Н. Ф. Некоторые разрывные течения намагничивающихся сред. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1979. – 163 с.
13. Пацегон Н. Ф. Волновые процессы в намагничивающихся средах с постоянной и изменяющейся микроструктурой. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1999. – 337 с.
14. Попова Л. Н. Равновесие и устойчивость поверхностей раздела сред в гравитационном, электрическом и магнитном полях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1985. – 181 с.
15. Слатински Н. Д. Некоторые задачи вязко-пластических и магнито-пластических течений намагничивающихся сред. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – 1986. – 176 с.
16. Терехов Л. П. Некоторые специальные задачи гидродинамической теории смазки. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1985.
17. Тропина А. А. Влияние электрического поля на процессы зарядообразования, конвекции и теплопереноса в слабопроводящих жидкостях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков: ХГУ, 1999. – 156 с.
18. Федоненко А. И. Экспериментальный анализ изотропной модели намагничивающихся и поляризующихся сред и некоторые методы получения проводящих ферромагнитных жидкостей. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1983.