КУРСЪ ТЕОРІИ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Отдѣлъ первый.

ГЛАВА I.

Общее понятіе о различныхъ видахъ дифференціальныхъ уравненій и ихъ происхожденіи.

1. Всякое уравненіе, выражающее отношеніе между перемѣнными независимыми, нѣкоторыми ихъ функціями и производными этихъ функцій, носитъ названіе *дифференціальнаго уравненія.* Въ частныхъ случаяхъ независимыя перемѣнныя и ихъ функціи могутъ и не входить непосредственно въ дифференціальное уравненіе, но производныя этихъ функцій составляютъ необходимый элементъ для образованія такихъ уравненій. Такъ, напримѣръ, если имѣемъ независимое перемѣнное x и его функцію y, то формула

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} + 7 = 0$$

будетъ представлять дифференціальное уравненіе, хотя x и y въ него непосредственно не входятъ.

2. Смотря по числу независимыхъ перемѣнныхъ, отъ которыхъ зависятъ функціи, входящія въ составъ дифференціальныхъ уравненій, эти послѣднія раздѣляются на уравненія, за-

висящія отъ одного независимаго перемѣннаго, и на такія, которыя зависятъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такъ, формула

$$2y\frac{d^2y}{dx^2}-x^2+1=0,$$

гдѣ x перемѣнное независимое, а y его функція, представляетъ дифференціальное уравненіе, зависящее отъ одного независимаго перемѣннаго; напротивъ, формула

$$\frac{dz}{dx}-3y\frac{dz}{dy}+2x^2+yz-1=0,$$

гдѣ x, y независимыя перемѣнныя, а z ихъ функція, представляетъ дифференціальное уравненіе, зависящее отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Общая форма дифференціальныхъ уравненій, зависящихъ отъ одного независимаго перемѣннаго, такова:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$$

гдѣ f означаетъ ту или другую совокупность аналитическихъ дѣйствій. Уравненія этого вида называются часто *обыкновенными дифференціальными уравненіями*.

Дифференціальныя уравненія, зависящія отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, бываютъ двухъ родовъ. Съ одной стороны, они могутъ представлять отношенія между независимыми перемѣнными, функціями ихъ и частными производными тѣхъ или другихъ порядковъ этихъ функцій: такія уравненія называются *уравненіями въ частныхъ производныхъ*. Съ другой стороны, дифференціальныя уравненія, зависящія отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, представляются въ видѣ отношеній между перемѣнными независимыми, функціями ихъ и полными дифференціалами этихъ функцій: такія уравненія именуются *уравненіями въ полныхъ дифференціалахъ*.

3. Дифференціальныя уравненія, зависящія какъ отъ одного, такъ и отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ, распредѣляются по *порядкамъ* и *степенямъ*. Порядокъ дифференціальнаго уравненія опредѣляется порядкомъ наивысшей изъ входящихъ въ него производныхъ зависимыхъ перемѣнныхъ, а степень — наивысшею степенью этой производной. Въ виду этого, уравненіе

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\frac{dy}{dx} - b = 0$$

представляетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка, но второй степени, а уравненіе

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + xy\frac{dz}{dy} - x^2\frac{dz}{dx} + by = 0$$

представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ втораго порядка, но первой степени.

О происхожденіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

4. Рѣшить дифференціальное уравненіе значитъ найдти для функцій, въ него входящихъ, такія выраженія, которыя, будучи подставлены въ это уравненіе, обратили бы его въ тождество. Такъ, если имѣемъ уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

и найдемъ какимъ бы то ни было образомъ, что значеніе

$$y = \Phi(x)$$

тождественно ему удовлетворяетъ, то $y = \Phi(x)$ будетъ рѣшеніемъ этого дифференціальнаго уравненія.

Нужно замѣтить, что одна и та-же функція можетъ быть рѣшеніемъ множества дифференціальныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ

$$y = F(x).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=F'(x).$$

Сочетая эти два равенства различнымъ образомъ между собою, будемъ получать различныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, которыя всѣ обратились бы въ тождества, еслибы въ нихъ y замѣнили чрезъ $F(x)$. Составивъ еще выраженіе

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F''(x)$$

и сочетая его съ выраженіями y и $\frac{dy}{dx}$, получали бы различныя дифференціальныя уравненія втораго порядка, которыя опять удовлетворялись бы тождественно значеніемъ $y=F(x)$. Точно такъ-же и далѣе.

Пусть, напримѣръ, имѣемъ

$$y=e^{2x}; \text{ въ такомъ случаѣ } \frac{dy}{dx}=2e^{2x}$$

и сочетая эти равенства между собою, находимъ послѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx}-2y=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+y-3e^{2x}=0,$$

$$y^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-5ye^{2x}=0, \text{ и т. д.}$$

Если въ этихъ уравненіяхъ разсматривать y какъ неизвѣстное, то всѣ они будутъ имѣть общее рѣшеніе $y=e^{2x}$; но каждое изъ нихъ, кромѣ этого, можетъ имѣть, и дѣйствительно имѣетъ, множество другихъ рѣшеній.

5. Изъ предыдущаго видно, что вопросъ — по данной функціи найдти дифференціальное уравненіе того или другого порядка, которому она удовлетворяла бы, имѣетъ, вообще, неопредѣленный характеръ и допускаетъ множество рѣшеній. Неопредѣленность эта исчезаетъ только въ томъ случаѣ, когда введемъ достаточное число новыхъ условій, опредѣляющихъ какое именно изъ рѣшеній имѣется въ виду. Такъ, напримѣръ, можно искать дифференціальное уравненіе, которому данная функція удовлетворяла бы тождественно и которое, въ то-же время, не содержало бы тѣхъ или другихъ количествъ — радикаловъ, экспонентныхъ функцій и т. п., входящихъ въ данную функцію. Если нужно исключить одно количество, то придемъ къ опредѣленному дифференціальному уравненію перваго порядка, если два, то получимъ опредѣленное дифференціальное уравненіе втораго порядка, и т. д.

Пусть, напримѣръ,

$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

и требуется составить дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяла бы эта функція, но которое не содержало бы радикала $\sqrt{1-x^2}$. Продифференцировавъ данную функцію, получимъ:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (2)$$

а исключивъ между уравненіями (1) и (2) радикалъ $\sqrt{1-x^2}$, найдемъ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{1-x^2},$$

т. е. совершенно опредѣленное дифференціальное уравненіе перваго порядка.

Еслибы требовалось исключить не одно, а два различныхъ между собою количества, то пришли бы уже къ дифференціальному уравненію не перваго, а втораго порядка. Пусть, напримѣръ, требуется составить дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяла бы функція

$$y=e^x-\sqrt{x} \qquad (3)$$

и которое не содержало бы ни e^x, ни $\sqrt{x}$. Составляемъ выраженія:

$$\frac{dy}{dx}=e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x+\frac{1}{x\sqrt{x}}. \tag{5}$$

Исключенiе между уравненiями (3), (4) и (5) количествъ e^x и $\sqrt{x}$ доставитъ теперь уравненiе

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y^2+\frac{2x-1}{2\left(\frac{dy}{dx}-y\right)}+2\,\frac{\left(\frac{dy}{dx}-y\right)}{2x^2-x},$$

которое представляетъ совершенно опредѣленное дифференцiальное уравненiе втораго порядка.

6. Изъ предыдущаго видно, что одна и та-же функцiя можетъ удовлетворять не одному, а множеству различныхъ дифференцiальныхъ уравненiй. Теперь постараемся доказать, что каждое дифференцiальное уравненiе имѣетъ множество рѣшенiй. Имѣя это въ виду, мы въ то-же время изслѣдуемъ и самый способъ происхожденiя дифференцiальныхъ уравненiй.

Пусть имѣемъ какое бы то ни было уравненiе вида

$$F(x, y, c)=0, \tag{1}$$

гдѣ c постоянное количество. Уравненiе это опредѣляетъ y какъ функцiю x и c, такъ что, сообщая c различныя численныя значенiя, мы будемъ получать для y различныя между собою функцiи независимаго перемѣннаго x. Всѣ эти различныя функцiональныя значенiя y будутъ опредѣляться уравненiемъ (1), когда постоянное количество c примемъ въ немъ за произвольную величину.

Каково бы ни было значенiе постояннаго c, дифференцированiе формулы (1) доставляетъ:

$$\frac{\partial F(x,y,c)}{dx}+\frac{\partial F(x,y,c)}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \tag{2}$$

а исключенiе c между уравненiями (1) и (2) приводитъ къ уравненію, зависящему отъ x, y и $\frac{dy}{dx}$, т. е. къ дифференціальному уравненію перваго порядка, вовсе не содержащему c. Уравненіе это, будучи неминуемымъ слѣдствіемъ уравненія (1), непремѣнно будетъ тождественно удовлетворяться всѣми значеніями y, опредѣляемыми этимъ послѣднимъ.

Нужно замѣтить при этомъ, что можно различными путями переходить отъ уравненія (1) къ дифференціальному уравненію перваго порядка, не содержащему c и удовлетворяемому тождественно всѣми значеніями y изъ уравненія (1). Можно, напримѣръ, рѣшить уравненіе (1) относительно c и привести его такимъ образомъ къ формѣ

$$\Phi(x, y) = c;$$

послѣ этого дифференцированіе прямо доставитъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{dx} + \frac{\partial \Phi(x, y)}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

не содержащее уже постояннаго c. Можно, точно такъ-же, уравненію (1) дать предварительно какую-либо иную форму и потомъ уже продифференцировать его и исключить c. Это указываетъ на большое разнообразіе пріемовъ вычисленія, служащихъ для вывода дифференціальнаго уравненія, соотвѣтствующаго данному уравненію (1); но можно доказать, что это разнообразіе пріемовъ не имѣетъ никакого вліянія на конечный результатъ, т. е. что во всѣхъ случаяхъ дифференціальное уравненіе получается одно и то-же.

Въ самомъ дѣлѣ, когда имѣемъ уравненіе

$$F(x, y, c) = 0,$$

гдѣ c неопредѣленная величина, тогда можно по произволу выбрать значеніе x и значеніе y; но послѣ этого изъ уравненія (1) для c получимъ совершенно опредѣленное значеніе, соотвѣтствующее выбраннымъ значеніямъ x, y. Съ другой стороны, y

представляется, вообще, въ видѣ опредѣленной функціи x и c; поэтому, въ настоящемъ случаѣ, когда c опредѣлилось, y выразится опредѣленнымъ образомъ въ x; слѣдовательно и значеніе производной $\frac{dy}{dx}$ также будетъ совершенно опредѣленное. Значитъ, $\frac{dy}{dx}$ получаетъ совершенно опредѣленное значеніе, когда x и y въ уравненіи (1) сообщимъ опредѣленныя значенія; а если такъ, то $\frac{dy}{dx}$ должно представлять опредѣленную функцію двухъ этихъ количествъ и между x, y, $\frac{dy}{dx}$ должно существовать одно уравненіе, опредѣляющее эту функцію. Уравненіе это во всякомъ случаѣ должно оставаться однимъ и тѣмъ-же и не можетъ измѣняться отъ измѣненія пріемовъ его разысканія.

И такъ, каждому уравненію вида

$$F(x, y, c) = 0, \tag{1}$$

гдѣ c произвольное постоянное количество, можетъ соотвѣтствовать только одно дифференціальное уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

удовлетворяемое всѣми значеніями y изъ уравненія (1). Это дифференціальное уравненіе можемъ разсматривать какъ выраженіе условія, которому подчинены всѣ функціональныя значенія y, опредѣляемыя уравненіемъ (1).

Уравненіе (1), по отношенію къ выводимому изъ него дифференціальному уравненію перваго порядка, носитъ названіе *полнаго первообразнаго уравненія* или *полнаго интеграла.*

7. Когда уравненіе, зависящее отъ двухъ перемѣнныхъ x, y, содержитъ нѣсколько произвольныхъ постоянныхъ, тогда исключеніе ихъ приводитъ точно такъ-же къ опредѣленному дифференціальному уравненію порядка равнаго числу произвольныхъ постоянныхъ количествъ, входящихъ въ данное уравненіе.

Для большей опредѣленности сужденій возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0, \tag{1}$$

содержащее три постоянныхъ. Дифференцированіе этого уравненія доставляетъ послѣдовательно

$$\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{dx^2} + 2\frac{\partial^2 F}{dxdy}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{dy}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^3 F}{dx^3} + 3\frac{\partial^3 F}{dx^2 dy}\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 F}{dxd^2 y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 F}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+ 3\frac{\partial^2 F}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{dxdy}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial F}{dy}\frac{d^3 y}{dx^3} = 0. \tag{4}$$

Теперь имѣемъ четыре уравненія, существующихъ совмѣстно, а потому и можемъ исключить между ними всѣ три количества c_1, c_2, c_3; въ результатѣ получится одно уравненіе между $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$, т. е. дифференціальное уравненіе третьяго порядка. При этомъ, однако, самый способъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ можетъ разнообразиться до-нельзя, потому что уравненію (1) и каждому изъ послѣдующихъ уравненій до дифференцированія можемъ давать ту или иную форму; слѣдовательно нужно еще доказать, что всѣ способы исключенія всегда приводятъ къ одному и тому-же конечному дифференціальному уравненію.

Такъ-какъ уравненія (1), (2) и (3), въ какой бы формѣ они ни были представлены, всегда содержатъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ и постоянныя c_1, c_2, c_3, то можемъ по произволу выбрать значенія $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; но послѣ этого c_1, c_2, c_3 тотчасъ же опредѣлятся. Въ такомъ случаѣ изъ уравненія (1) для y получится совершенно опредѣленное выраженіе въ x, а слѣдовательно и $\frac{d^3y}{dx^3}$

также совершенно опредѣлится. Значитъ, $\frac{d^3y}{dx^3}$ вполнѣ опредѣляется, когда x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ сообщаются опредѣленныя значенія, т. е. $\frac{d^3y}{dx^3}$ представляетъ опредѣленную функцію x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; но если такъ, то отношеніе, связывающее $\frac{d^3y}{dx^3}$ съ x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, не должно заключать въ себѣ ничего произвольнаго и должно оставаться однимъ и тѣмъ-же, какимъ бы путемъ ни пришли къ нему.

И такъ, видимъ, что уравненіе

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0,$$

содержащее три постоянныхъ произвольныхъ количества, приводитъ всегда къ опредѣленному дифференціальному уравненію третьяго порядка, удовлетворяемому всѣми значеніями y, опредѣляемыми даннымъ уравненіемъ.

Къ подобному же выводу мы пришли бы и въ случаѣ, еслибы взяли уравненіе, содержащее вообще n постоянныхъ количествъ.

8. Для поясненія высказаннаго въ двухъ послѣднихъ нумерахъ возьмемъ примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$y = cx + \frac{m}{c}, \tag{1}$$

гдѣ c постоянное произвольное; отсюда

$$\frac{dy}{dx} = c. \tag{2}$$

Для исключенія c въ уравненіе (1) подставляемъ вмѣсто c его выраженіе изъ уравненія (2); получаемъ:

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{m}{\frac{dy}{dx}},$$

или

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + m = 0,$$

т. е. искомое дифференціальное уравненіе.

2) Возьмемъ уравненіе

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0, \qquad (1)$$

гдѣ a, b произвольныя постоянныя. Дифференцированіе доставитъ:

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (2)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (3)$$

Изъ уравненія (3) найдемъ:

$$y-b = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad (4)$$

и подставивъ это выраженіе въ уравненіе (2), получимъ:

$$x-a = \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (5)$$

Внеся наконецъ въ уравненіе (3) вмѣсто $(x-a)$ и $(x-b)$ ихъ выраженія изъ формулъ (4) и (5), придемъ окончательно къ дифференціальному уравненію втораго порядка

$$r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

О происхожденіи уравненій въ частныхъ производныхъ.

9. Возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

зависящее отъ трехъ перемѣнныхъ x, y, z и содержащее два произвольныхъ постоянныхъ количества a, b. Это уравненіе опредѣляетъ z какъ функцію независимыхъ перемѣнныхъ x, y и постоянныхъ a, b. Сообщая въ выраженіи z обоимъ постояннымъ различныя численныя значенія, получали бы различныя функціи x, y.

Дифференцированіе уравненія (1) доставляетъ:

$$\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{dy} + \frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dy} = 0. \tag{3}$$

Изъ этихъ уравненій и уравненія (1) всегда можно исключить оба постоянныя a, b; въ результатѣ получается, очевидно, уравненіе между $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, вида

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Еслибы мы имѣли уравненіе вида

$$F(x, y, z, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = 0,$$

содержащее пять произвольныхъ постоянныхъ, то для исключенія ихъ пришлось бы воспользоваться не только двумя уравненіями

$$\frac{\partial F}{dx} + \frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{dy} + \frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

но еще и слѣдующими тремя:

$$\frac{\partial^2 F}{dx^2} + 2\frac{\partial^2 F}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{dz}\frac{\partial^2 z}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{dxdy} + \frac{\partial^2 F}{dxdz}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial^2 F}{dydz}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 F}{dz^2}\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial F}{dz}\frac{\partial^2 z}{dxdy} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{dy^2} + 2\frac{\partial^2 F}{dydz}\frac{dz}{dy} + \frac{\partial^2 F}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{\partial F}{dz}\frac{\partial^2 z}{dy^2} = 0;$$

въ результатѣ получилось бы, очевидно, уравненіе вида

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{dx}, \frac{\partial z}{dy}, \frac{\partial^2 z}{dx^2}, \frac{\partial^2 z}{dxdy}, \frac{\partial^2 z}{dy^2}\right) = 0,$$

т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ втораго порядка.

Еслибы въ исходномъ уравненіи содержалось девять произвольныхъ постоянныхъ количествъ, то исключеніе ихъ привело бы къ уравненію въ частныхъ производныхъ третьяго порядка, и т. д.

10. Дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ обладаютъ тою особенностію, что могутъ быть выводимы изъ уравненій, содержащихъ не только произвольныя постоянныя количества, но и *произвольныя функціи.*

Пусть дано уравненіе

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

исключеніе изъ котораго произвольныхъ постоянныхъ a, b приводитъ, какъ мы видѣли, къ уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Допустимъ теперь, что a не постоянное, а перемѣнное количество, и что $b = \varphi(a)$, гдѣ φ произвольная совокупность дѣйствій; уравненіе (1) приметъ видъ:

$$F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0. \tag{2}$$

Если допустить, сверхъ того, что

$$\frac{dF(x, y, z, a, \varphi(a))}{da} = 0, \tag{3}$$

то легко будетъ показать, что исключеніе a между уравненіями (2) и (3) приведетъ къ результату, изъ котораго уже можно будетъ всегда вывести то-же уравненіе въ частныхъ производныхъ, къ которому приходятъ чрезъ исключеніе a, b изъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ a изъ уравненія (3), мы нашли бы для этого количества нѣкоторую функцію x, y, z. Если бы затѣмъ это выраженіе a подставили въ уравненіе (2) и результатъ продифференцировали, то получили бы:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{dF}{da}\frac{da}{dy}=0;$$

но, въ силу (3), $\frac{dF}{da}=0$, а потому эти послѣднія уравненія сведутся на

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dy}=0.$$

Эти два уравненія и уравненіе (1) дадутъ возможность исключить функціональныя количества a и $\Phi(a)$ и получить въ результатѣ опредѣленное уравненіе между $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$. Что это уравненіе будетъ тождественно съ тѣмъ, которое выводится изъ уравненія (1), очевидно само собою, такъ-какъ уравненія (2) и (4) отличаются отъ уравненія (1) и тѣхъ двухъ, которыя изъ него выводятся, только тѣмъ, что въ нихъ вмѣсто b стоитъ $\Phi(a)$, а вмѣсто постояннаго a стоитъ перемѣнное количество.

11. Предыдущія сужденія могутъ быть обобщены. Если возьмемъ уравненіе, содержащее n независимыхъ перемѣнныхъ, функцію этихъ перемѣнныхъ и n постоянныхъ произвольныхъ количествъ, то можно будетъ исключить всѣ n постоянныхъ между даннымъ уравненіемъ и его n первыми частными производными. Такимъ образомъ составимъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, удовлетворяемое, независимо отъ значеній постоянныхъ, тою функціею, которая опредѣляется даннымъ уравненіемъ и еще множествомъ другихъ функцій, извѣстнымъ образомъ связанныхъ съ первою.

Пусть дано уравненіе

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, u, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0. \qquad (1)$$

Допустимъ, что между n постоянными $c_1, c_2, \ldots c_n$ находится p такихъ, которыя представляютъ произвольныя функціи остальныхъ, обращающихся въ перемѣнныя количества. Если продифференцировать въ такомъ случаѣ уравненіе (1) по-очередно относительно $n-p$ количествъ, сдѣлавшихся перемѣнными, то получится $n-p$ уравненій, по присоединеніи къ которымъ даннаго уравненія можно будетъ исключить всѣ эти количества. Результатомъ исключенія будетъ уравненіе между $x_1, x_2, \ldots x_n$ и u, опредѣляющее функцію u, которая будетъ удовлетворять тому-же уравненію въ частныхъ производныхъ, къ которому приводитъ исключеніе постоянныхъ изъ уравненія (1).

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, $c_1, c_2, \ldots c_p$ представляютъ произвольныя функціи остальныхъ количествъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$ и продифференцируемъ по-очередно относительно каждаго изъ этихъ послѣднихъ уравненіе (1); получимъ $n-p$ уравненій, изъ которыхъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$ опредѣлятся въ $x_1, x_2, \ldots x_n, u$. Подставивъ эти выраженія $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$ въ уравненіе (1), получимъ уравненіе, зависящее только отъ $u, x_1, x_2, \ldots x_n$ и не трудно будетъ видѣть, что выраженія производныхъ $\frac{du}{dx_1}$, $\frac{du}{dx_2}, \ldots \frac{du}{dx_n}$ и самой функціи u, получающіяся изъ этого уравненія, будутъ тѣ-же, какъ и въ томъ случаѣ, когда имѣли уравненіе (1), гдѣ $c_1, c_2, \ldots c_n$ разсматривались постоянными величинами. Дѣйствительно, если, послѣ замѣны въ уравненіи (1) $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$ ихъ значеніями, продифференцировать его для разысканія $\frac{du}{dx_1}$, то нужно будетъ принять во вниманіе, что $c_1, c_2, \ldots c_p$ означаютъ уже не постоянныя количества, а функціи $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$, зависящихъ въ свою очередь отъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Уравненіе, полученное отъ дифференцированія по x_1, будетъ теперь

$$\frac{dF}{dx_1}+\frac{dF}{du}\frac{du}{dx_1}+\frac{dF}{dc_{p+1}}\frac{dc_{p+1}}{dx_1}+\ldots+\frac{dF}{dc_n}\frac{dc_n}{dx_1}=0;$$

но, по положенію, выраженія количествъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$ въ перемѣнныхъ таковы, что имѣемъ тождественно

$$\frac{dF}{dc_{p+1}}=0, \frac{dF}{dc_{p+2}}=0, \ldots \frac{dF}{dc_n}=0;$$

поэтому предыдущее уравненіе сведется на

$$\frac{dF}{dx_1}+\frac{dF}{du}\frac{du}{dx_1}=0,$$

точно такъ-же, какъ и въ случаѣ, когда $c_1, c_2, \ldots c_n$ разсматриваются постоянными количествами.

Въ силу этого ясно, что отношенія между $u, x_1, x_2, \ldots x_n$, $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots \frac{du}{dx_n}, c_1, c_2, \ldots c_n$ въ обоихъ случаяхъ будутъ одни и тѣ-же, а потому, будутъ ли $c_1, c_2, \ldots c_p$ постоянными количествами или произвольными функціями отъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots c_n$, всегда можно исключить ихъ и въ результатѣ получить во всѣхъ случаяхъ одно и то-же уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Высшей степени общности достигнемъ въ томъ случаѣ, когда произвольное число p допустимъ равнымъ $n-1$.

Пусть, напримѣръ, имѣемъ уравненіе

$$u=c_1 x_1+c_2 x_2+c_3 x_3 \ldots \tag{1}$$

Исключеніе постоянныхъ между этимъ равенствомъ и частными его производными доставитъ:

$$u=x_1\frac{du}{dx_1}+x_1\frac{du}{dx_2}+x_3\frac{du}{dx_3}, \tag{2}$$

т. е. опредѣленное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Положимъ теперь

$$c_2 = \varphi(c_1)\,,\ c_3 = \psi(c_1).$$

Исключивъ c_1 между уравненіями

$$\left.\begin{aligned} u &= c_1 x_1 + x_2\varphi(c_1) + x_3\psi(c_1), \\ 0 &= x_1 + x_2\varphi'(c_1) + x_3\psi'(c_1), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

получимъ уравненіе между x_1, x_2, x_3 и u, содержащее двѣ произвольныхъ функціи φ и ψ и притомъ такое, что доставляемое имъ выраженіе u удовлетворяетъ уравненію (2).

Изъ уравненій (3), каковы бы ни были φ и ψ, получится

$$c_1 = F\left(\frac{x_2}{x_1}\,,\ \frac{x_2}{x_1}\right);$$

слѣдовательно u представляетъ однородную функцію первой степени, вида

$$u = x_1 \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}\,,\ \frac{x_3}{x_1}\right),$$

и легко доказать, что она удовлетворяетъ уравненію (2).

12. Изъ высказаннаго въ предыдущихъ нумерахъ слѣдуетъ, что уравненія въ частныхъ производныхъ происходятъ отъ уравненій, содержащихъ или произвольныя постоянныя, или произвольныя функціи; въ томъ и другомъ случаѣ уравненіе въ частныхъ производныхъ выводится чрезъ исключеніе произвольныхъ количествъ. Исключеніе постоянныхъ количествъ, какъ мы уже видѣли, не представляетъ никакихъ теоретическихъ затрудненій, а потому остается только разсмотрѣть еще — какимъ образомъ исключаютъ, вообще, произвольныя функціи.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$F(x, y, z, \varphi(u)) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ u извѣстная функція x, y, z, а φ означаетъ *произвольную* совокупность дѣйствій. Дифференцированіе уравненій (1) доставитъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial F}{d\varphi}\varphi'(u)\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,\\ \frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial F}{d\varphi}\varphi'(u)\left(\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Въ три уравненія, которыя теперь имѣемъ, входитъ всего два произвольныхъ количества $\varphi(u)$ и $\varphi'(u)$, а потому, по исключеніи ихъ, придемъ къ совершенно опредѣленному уравненію между $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$.

И такъ, исключеніе одной произвольной функціи приводитъ, вообще, къ уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Приведемъ примѣръ.

Пусть дано уравненіе

$$y-nz=\varphi(x-mz),$$

въ которомъ φ произвольная функція и которое, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, представляетъ общую форму уравненія цилиндрическихъ поверхностей. Дифференцированіе доставляетъ:

$$-n\frac{dz}{dx}=\left(1-m\frac{dz}{dx}\right)\varphi'(x-mz),$$

$$1-n\frac{dz}{dy}=-m\frac{dz}{dy}\varphi'(x-mz).$$

Такъ-какъ эти послѣднія уравненія не содержатъ уже φ, а входитъ въ нихъ только φ', то остается исключить только это послѣднее количество. Сдѣлавъ это, находимъ:

$$m\frac{dz}{dx}+n\frac{dz}{dy}=1,$$

т. е. опредѣленное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

13. Если возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, z, \varphi(u), \psi(v))=0,\qquad(1)$$

содержащее двѣ произвольныхъ функціи φ и ψ, то исключеніе ихъ приведетъ насъ къ уравненію въ частныхъ производныхъ втораго порядка. Дѣйствительно, дифференцируя уравненіе (1), получаемъ:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial F}{d\varphi}\varphi'(u)\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{d\psi}\psi'(v)\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{\partial F}{dy}+\frac{\partial F}{dz}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial F}{d\varphi}\varphi'(u)\left(\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dz}{du}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{d\psi}\psi'(v)\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Эти уравненія содержатъ, кромѣ φ, ψ, еще φ', ψ', а потому нужно исключить четыре количества, чего изъ трехъ уравненій сдѣлать нельзя. Дифференцированіе двухъ послѣднихъ уравненій доставитъ еще три уравненія, но введетъ и два произвольныхъ количества φ'', ψ''; уравненій и подлежащихъ исключенію количествъ будетъ, слѣдовательно, по шести. Исключеніе произвольныхъ функцій вообще еще невозможно; но при выводѣ производныхъ уравненій третьяго порядка число уравненій всегда сдѣлается уже болѣе числа подлежащихъ исключенію количествъ.

14. Для поясненія только-что сказаннаго разсмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1) Пусть имѣемъ уравненіе коническихъ поверхностей

$$\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

гдѣ φ произвольная функція. Дифференцируя его, находимъ:

$$\frac{-(y-b)\dfrac{dz}{dx}}{(z-c)^2}=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left(\frac{(z-c)-(x-a)\dfrac{dz}{dx}}{(z-c)^2}\right),$$

$$\frac{(z-c)-(y-b)\dfrac{dz}{dy}}{(z-c)^2}=\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left(\frac{-(x-a)\dfrac{dz}{dy}}{(z-c)^2}\right),$$

а по раздѣленіи одного изъ этихъ равенствъ на другое получимъ:

$$\frac{(y-b)\frac{dz}{dx}}{(z-c)-(y-b)\frac{dz}{dy}}=\frac{(z-c)-(x-a)\frac{dz}{dx}}{(x-a)\frac{dz}{dy}},$$

откуда уже непосредственно найдемъ:

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c.$$

2) Пусть имѣемъ уравненіе цилиндроидовъ

$$z=x\Phi(z)+y\psi(z),$$

гдѣ Φ, ψ произвольныя функціи. Дифференцированіе его доставляетъ:

$$\frac{dz}{dx}=\Phi(z)+x\Phi'(z)\frac{dz}{dx}+y\psi'(z)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy}=\psi(z)+y\psi'(z)\frac{dz}{dy}+x\Phi'(z)\frac{dz}{dy},$$

или

$$\frac{dz}{dx}\left[1-x\Phi'(z)-y\psi'(z)\right]=\Phi(z),$$

$$\frac{dz}{dy}\left[1-x\Phi'(z)-y\psi'(z)\right]=\psi(z),$$

откуда

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}=\frac{\Phi(x)}{\psi(x)}=\Phi(z),$$

Продифференцировавъ это послѣднее выраженіе, найдемъ:

$$\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dx\,dy}=\Phi'(z)\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

$$\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dx\,dy}-\frac{dz}{dx}\frac{d^2z}{dy^2}=\Phi'(z)\left(\frac{dz}{dy}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \frac{d^2z}{dy^2} = 0.$$

3) Пусть имѣемъ уравненіе

$$z = \varphi(x^2 + y^2)\psi(x^2 - y^2),$$

гдѣ φ, ψ произвольныя функціи. Для исключенія ихъ выгодно употребить слѣдующій частный пріемъ.

Взявъ гиперболическій логариѳмъ отъ обѣихъ частей даннаго уравненія, получимъ:

$$\log z = \log[\varphi(x^2 + y^2)] + \log[\psi(x^2 - y^2)];$$

но логариѳмъ отъ произвольной функціи самъ произвольная функція, а потому послѣднее уравненіе пишемъ еще такъ:

$$\log z = \Phi(x^2 + y^2) + \Psi(x^2 - y^2), \qquad \text{(a)}$$

гдѣ Φ, Ψ опять произвольныя функціи. Эти послѣднія произвольныя функціи и исключимъ теперь.

Дифференцированіе послѣдней формулы дастъ:

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = 2x[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)],$$

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dy} = 2y[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)],$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= 2xz[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)], \\ \frac{dz}{dy} &= 2yz[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Вторичное дифференцированіе доставитъ теперь:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2z[\Phi'(x^2+y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)] + 2x\frac{dz}{dx}[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)] + 4x^2z[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)],$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = 2z[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x - y^2)] + 2y\frac{dz}{dy}[\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)] + 4y^2z[\Phi''(x^2 + y^2) + \Psi''(x^2 - y^2)].$$

Исключеніе изъ этихъ формулъ выраженія $\Phi''(x^2 + y^2) - \Psi''(x^2 - y^2)$ приведетъ къ уравненію

$$\Phi'(x^2+y^2)+\Psi'(x^2-y^2)=\frac{\frac{\partial^2 z}{dx^2}y^2-\frac{\partial^2 z}{dy^2}x^2}{2\left[z(x^2-y^2)+xy\left[\frac{dz}{dy}x-\frac{dz}{dx}y\right]\right]}$$

а въ то-же время первое изъ уравненій (b) доставитъ

$$\Phi'(x^2+y^2)+\Psi'(x^2-y^2)=\frac{1}{2xz}\frac{dz}{dx},$$

слѣдовательно получимъ въ окончательномъ результатѣ

$$\left(\frac{\partial^2 z}{dx^2}y^2-\frac{\partial^2 z}{dy^2}x^2\right)xz+\left(\frac{dz}{dx}y-\frac{dz}{dy}x\right)\frac{dz}{dx}xy=z\frac{dz}{dx}(x^2-y^2).$$

15. Произвольныя функціи, которыя мы до сихъ поръ исключали изъ данныхъ уравненій, непосредственно зависѣли отъ опредѣленныхъ функцій перемѣнныхъ; такъ, имѣя произвольную функцію $\varphi(u)$, мы полагали u извѣстною функціею перемѣнныхъ. Можетъ случиться однако, что данное уравненіе содержитъ произвольныя функціи такихъ количествъ, выраженія которыхъ въ перемѣнныхъ измѣняются съ измѣненіемъ самыхъ произвольныхъ функцій, потому что количества эти опредѣляются уравненіями, въ которыя входятъ опять тѣ-же произвольныя функціи и ихъ производныя. Случай этотъ представляется, напримѣръ, уравненіемъ

$$z=(x+\alpha)(y+\varphi(\alpha)),$$

гдѣ $\varphi(\alpha)$ произвольная функція, а количество α само опредѣляется уравненіемъ

$$x+\varphi(\alpha)+(y+\alpha)\varphi'(\alpha)=0.$$

Здѣсь α дѣлается опредѣленною функціею перемѣнныхъ x, y, z только тогда, когда для φ изберемъ опредѣленную функцію. Если допустимъ $\varphi(\alpha)=\alpha$, то найдемъ

$$\alpha=-\frac{x+y}{2};$$

если, напротивъ, положимъ $\varphi(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$, то будетъ

$$\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}}, \text{ и т. д.}$$

Указанный теперь случай вообще сложнѣе разсмотрѣннаго въ предыдущихъ нумерахъ, потому что произвольными представляются уже не только нѣкоторыя функціи, какъ это было прежде, но и тѣ количества, отъ которыхъ онѣ зависятъ. Такъ, имѣя уравненіе

$$F(x, y, z, \varphi(\alpha)) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ самое количество α опредѣляется уравненіемъ вида

$$f(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha) \ldots .) = 0,$$

и дифференцируя уравненіе (1) для исключенія изъ него произвольной функціи $\varphi(\alpha)$, мы будемъ получать выраженія, въ которыя войдутъ $\varphi(\alpha)$, производныя этой функціи и производныя количества α. Когда количество α представляло опредѣленную функцію перемѣнныхъ, тогда исключать его производныя не было никакой надобности, но теперь производныя эти сами выраженія неопредѣленныя и потому ихъ также нужно исключить. Слѣдовательно число подлежащихъ исключенію количествъ теперь больше, чѣмъ прежде, и хотя произвести это исключеніе всегда оказывается возможнымъ при помощи уравненія, опредѣляющаго α, но нельзя уже ручаться за то, что окончательное уравненіе въ частныхъ производныхъ будетъ непремѣнно перваго порядка.

Возьмемъ примѣры.

1) Пусть имѣемъ уравненіе

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)}, \qquad (a)$$

гдѣ φ произвольная функція, а α опредѣляется уравненіемъ

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}. \qquad (b)$$

Дифференцируя уравненіе (1), находимъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{-2[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha)^2-\varphi''(\alpha)\,[y-\varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)^2}\cdot\frac{d\alpha}{dx},\\ \frac{dz}{dy}&=\frac{2[y-\varphi(\alpha)]\left[1-\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}\right]\varphi'(\alpha)-[y-\varphi(\alpha)]^2\varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}}{\varphi'(\alpha)^2}\end{aligned}\right\}\quad (c)$$

Изъ формулъ (a), (c) нужно теперь исключить $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$, $\frac{d\alpha}{dx}$ и $\frac{d\alpha}{dy}$. Чтобы исключить $\frac{d\alpha}{dx}$ и $\frac{d\alpha}{dy}$ обращаемся къ уравненію (b) и дифференцируемъ его; находимъ:

$$1+\frac{d\alpha}{dx}=\frac{-\varphi'(\alpha)^2\frac{d\alpha}{dx}-\varphi''(\alpha)[y-\varphi(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx}}{\varphi'(\alpha)^2}$$

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{\left[1-\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}\right]\varphi'(\alpha)-\varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}[y-\varphi(\alpha)]}{\varphi'(\alpha)^2};$$

слѣдовательно

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{\varphi'(\alpha)^2}{-2\varphi'(\alpha)^2+[y-\varphi(\alpha)]\,\varphi''(\alpha)},$$

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{\varphi'(\alpha)}{2\varphi'(\alpha)^2+(y-\varphi(\alpha))\,\varphi''(\alpha)}.$$

Подстановка этихъ выраженій въ уравненія (c) даетъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=y-\varphi(\alpha),\\ \frac{dz}{dy}&=\frac{y-\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.\end{aligned}\right\}\quad (d)$$

Теперь изъ уравненій (a) и (d) остается исключить $\varphi(\alpha)$ и $\varphi'(\alpha)$, что доставитъ

$$\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+z=0,$$

т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

2) Пусть теперь дано уравненіе

$$z=x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha)+\vartheta(\alpha),\qquad (a)$$

гдѣ φ, ψ, ϑ, произвольныя функціи, а количество α опредѣляется уравненіемъ

$$x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)+\vartheta'(\alpha)=0.\qquad (b)$$

Дифференцированіе ур. (a) доставляетъ:

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(\alpha)+[x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)+\vartheta'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy}=\psi(\alpha)+[x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)+\vartheta'(\alpha)]\frac{d\alpha}{dy},$$

уравненія, которыя въ виду ур. (b) сводятся на

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(\alpha),\ \frac{dz}{dy}=\psi(\alpha).$$

Исключеніе изъ этихъ уравненій α приведетъ къ ур. вида

$$\frac{dz}{dx}=\Phi\left(\frac{dz}{dy}\right), \qquad (c)$$

гдѣ Φ произвольная функція. Послѣ этого остается исключить Φ, для чего дифференцируемъ формулу (c); получаемъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\Phi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{d^2z}{dxdy},$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\Phi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{dz^2}{dy^2},$$

откуда уже непосредственно находимъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2.$$

Происхожденіе уравненій въ полныхъ дифференціальныхъ.

16. Если возьмемъ уравненіе

$$F(x,y,z,c)=0, \qquad (1)$$

содержащее произвольное постоянное c и опредѣляющее z какъ функцію независимыхъ перемѣнныхъ x, y и постояннаго c, то можно будетъ продифференцировать его сполна и написать:

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dv+\frac{dF}{dz}dz=0, \qquad (2)$$

гдѣ dz означаетъ полный дифференціалъ отъ z. Постоянное произвольное z входитъ здѣсь только въ коэффиціенты $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$,

$\frac{\partial F}{dz}$, а потому, исключивъ это количество при помощи уравненія (1), непремѣнно придемъ къ уравненію вида:

$$P.dx+P.dy+R.dz=0, \qquad (3)$$

гдѣ P, Q, R опредѣленныя функціи x, y, z.

Формула (3) представляетъ отношеніе между дифференціалами независимыхъ перемѣнныхъ и *полнымъ* дифференціаломъ ихъ функціи; поэтому уравненія такого вида получаютъ названіе *уравненій въ полныхъ дифференціалахъ* и притомъ—перваго порядка. Уравненія эти и по формѣ своей, и по способу своего образованія существенно отличаются отъ выше разсмотрѣнныхъ нами уравненій въ частныхъ производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ то время, какъ уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка происходятъ отъ уравненій, содержащихъ не менѣе двухъ произвольныхъ постоянныхъ или одной произвольной функціи, уравненія перваго порядка въ полныхъ дифференціалахъ образуются отъ дифференцированія сполна уравненія, содержащаго одно постоянное произвольное количество, которое при этомъ исключается. Сверхъ того каждое уравненіе перваго порядка въ полныхъ дифференціалахъ немедленно опредѣляетъ и частныя производныя перваго порядка функціи, ему удовлетворяющей. Дѣйствительно, такъ-какъ z функція перемѣнныхъ x, y, то

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

почему формула (3) приметъ видъ:

$$\left(P+R\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(Q+R\frac{dz}{dq}\right)dy=0;$$

но здѣсь dx, dy, какъ дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ, представляютъ произвольныя величины, а потому, для существованія нашего уравненія, необходимо, чтобы коэффиціенты при dx и dy равнялись нулю, т. е. чтобы было

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{P}{R},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{Q}{R}.$$

17. Замѣчательную особенность представляютъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ еще и въ томъ отношеніи, что они не всегда устанавливаютъ функціональную зависимость между перемѣнными, въ нихъ входящими. Не трудно показать, въ самомъ дѣлѣ, что для того, чтобы формула

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{1}$$

удовлетворялась допущеніемъ z функціею x, y, коэффиціенты P, Q, R должны быть подчинены извѣстному, опредѣленному условію. Дѣйствительно, какъ только допустимъ z функціею x, y, непремѣнно будетъ

$$dz=\frac{dz}{dy}dx+\frac{dz}{dy}dy,$$

почему уравненіе (1) приметъ видъ

$$\left(P+R\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(Q+R\frac{dz}{dy}\right)dy=0$$

и приведетъ неминуемо къ равенствамъ

$$-\frac{P}{R}=\frac{dz}{dx},\ -\frac{Q}{R}=\frac{dz}{dy}. \tag{2}$$

Продифференцировавъ первое изъ нихъ по y, а второе по x и помня, что P, Q, R зависятъ отъ x, y, z, мы получимъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{dy}+\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}=-\frac{d^2z}{dxdy}.$$

$$\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{dx}+\frac{\partial\left(\frac{Q}{R}\right)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=-\frac{d^2z}{dxdy}.$$

Въ силу равенствъ (2) и этихъ послѣднихъ равенствъ получаемъ:

$$\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{dy}-\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{dz}\cdot\frac{Q}{R}=\frac{\partial\left(\frac{Q}{R}\right)}{dx}-\frac{\partial\left(\frac{Q}{R}\right)}{dz}\cdot\frac{P}{R},$$

равенство, которое, по совершеніи дифференцированій, приведенія и по перенесеніи всѣхъ членовъ въ одну сторону, приметъ видъ:

$$P\left(\frac{\partial Q}{dx}-\frac{\partial R}{dy}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{dx}-\frac{\partial P}{dz}\right)+R\left(\frac{\partial P}{dy}-\frac{\partial Q}{dx}\right)=0. \quad (3)$$

Это послѣднее равенство должно имѣть мѣсто для всѣхъ значеній x, y, z удовлетворяющихъ уравненію (1). При этомъ могутъ встрѣтиться два случая: или равенство (3) представляетъ тождество — тогда, очевидно, условіе, которому должны быть подчинены количества P, Q, R строго выполняется; или равенство это устанавливаетъ между x, y, z опредѣленное отношеніе — тогда это отношеніе должно доставлять для z какъ-разъ то выраженіе въ x y, которое тождественно удовлетворяетъ уравненію (1). Еслибы уравненіе (1) не составляло неминуемаго слѣдствія равенства (3), то слѣдовало бы заключить, что уравненіе это не можетъ удовлетворяться никакими значеніями z, представляющими функціи x, y.

Пусть, напримѣръ, имѣемъ уравненіе

$$(z-y)dx+xdy+(y-z)dz=0. \quad \text{(a)}$$

Въ этомъ случаѣ равенство (3) сводится на

$$z-x-y=0, \quad \text{(b)}$$

откуда

$$dz=dx+dy. \quad (c)$$

Подстановка значеній z и dz изъ формулъ (b), (c) въ уравненіе (a) обращаетъ его въ тождество; слѣдовательно

$$z=x+y$$

и представляетъ единственное рѣшеніе уравненія (a).

Пусть еще имѣемъ уравненіе

$$zdx-ydy+ydz=0;$$

условіе (3) сведется въ этомъ случаѣ на

$$-2z=0$$

и такъ-какъ $z=0$ не представляетъ рѣшенія даннаго уравненія, то заключаемъ, что уравненіе это не соотвѣтствуетъ никакому опредѣленному отношенію между x, y, z.

18. Предыдущія сужденія могутъ быть обобщены. Имѣя уравненіе:

$$F(x, y, z, u, c)=0, \qquad (1)$$

гдѣ c постоянное произвольное, продифференцировавъ его сполна и исключивъ c, мы получимъ опять уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ вида

$$Pdx+Qdy+Rdz+Sdu=0. \qquad (2)$$

гдѣ P, Q, R, S опредѣленныя функціи x, y, z, u.

Здѣсь опять можно доказать, что уравненіе (2) тогда только предполагаетъ существованіе функціональной зависимости между u, x, y, z, когда коэффиціенты P, Q, R, S удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ. Дѣйствительно, когда u представляетъ функцію отъ x, y, z, тогда

$$du=\frac{\partial u}{dx}dx+\frac{\partial u}{dy}dy+\frac{\partial u}{dz}dz.$$

Подставивъ это выраженіе въ уравненіе (1) и замѣтивъ, что dx, dy, dz величины произвольныя, увидимъ, что уравненіе (1) влечетъ за собою равенства

$$P+S\frac{\partial u}{dx}=0\ ,\ Q+S\frac{\partial u}{dy}=0\ ,\ R+S\frac{\partial u}{dz}=0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{dx}==\frac{P}{S},\ \frac{\partial u}{dy}=-\frac{Q}{S},\ \frac{\partial u}{dz}=-\frac{R}{S}.$$

Поступая съ этими равенствами точно такъ, какъ мы поступали съ равенствами (2) предыдущаго нумера, придемъ къ слѣдующимъ тремъ условіямъ:

$$S\left(\frac{\partial P}{dy}-\frac{\partial Q}{dx}\right)+Q\left(\frac{\partial S}{dx}-\frac{\partial P}{du}\right)+P\left(\frac{\partial Q}{du}-\frac{\partial S}{dy}\right)=0,$$

$$S\left(\frac{\partial Q}{dz}-\frac{\partial R}{dy}\right)+R\left(\frac{\partial S}{dy}-\frac{\partial Q}{du}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{du}-\frac{\partial S}{dz}\right)=0,$$

$$S\left(\frac{\partial R}{dx}-\frac{\partial P}{dz}\right)+P\left(\frac{\partial S}{dz}-\frac{\partial R}{du}\right)+R\left(\frac{\partial P}{du}-\frac{\partial S}{dx}\right)=0,$$

которыя непремѣнно должны удовлетворяться для того, чтобы уравненіе (1) выражало функціональную зависимость между x, y, z, u.

19. Еслибы мы взяли уравненіе вида

$$F(x, y, z, c_1, c_2)=0, \tag{1}$$

гдѣ c_1, c_2 произвольныя постоянныя, то, дифференцируя его сполна разъ и другой, получили бы:

$$\frac{\partial F}{dx}dx+\frac{\partial F}{dy}dy+\frac{\partial F}{dz}dz=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{dx^2}dx^2+2\frac{\partial F}{dxdy}dxdy+\frac{\partial^2 F}{dy^2}dy^2+2\frac{\partial^2 F}{dxdz}dxdz+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{dydz}dydz+\frac{\partial^2 F}{dz^2}dz^2+\frac{\partial F}{dz}d^2z=2=0. \tag{3}$$

Исключивъ изъ этихъ формулъ c_1, c_2 мы пришли бы къ уравненію втораго порядка въ полныхъ дифференціалахъ вида

$$Ldx^2+Mdy^2+Ndz^2+Pdxdy+Qdxdz+$$
$$+Rdydz+Sd^2z=0, \tag{4}$$

въ которомъ L, M, N, P, Q, R, S опредѣленныя функціи x, y, z. Здѣсь опять коэффиціенты должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, имѣющимъ сходство съ тѣми, которыя мы вывели для уравненій 1-го порядка. Выводить здѣсь эти условія считаю однако излишнимъ.