ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

АЛГЕБРА, ЯВЛЯЮЩАЯСЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРЯМОЙ СУММОЙ КОЛЕЦ

А. К. Сушкевич

(Харьков)

§ 1. Пусть **К** данное коммутативное кольцо; элементы этого кольца будем обозначать малыми латинскими (а иногда и греческими) буквами — с индексами или без индексов; через ε обозначим единичный элемент в **К** (мы предполагаем, что он существует).

За объекты нашего исчисления мы берем ряды, составленные из элементов из **К**, или бесконечные последовательности вида: $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{in inf.}]$. Мы обозначаем такие последовательности большими латинскими буквами; совокупность всевозможных таких последовательностей (если $a_1, a_2 \ldots$ пробегают независимо друг от друга все элементы из **К**) мы обозначим через **А**. Для оперирования с такими последовательностями мы ставим следующие постулаты: обозначим еще $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots \text{in inf.}]$.

I. $A = B$ тогда и только тогда, если при всяком λ $b_\lambda = a_\lambda$.

II. $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \text{in inf.}]$.

III. Умножение на скалар: $cA = Ac = [a_1 c, a_2 c, \ldots \text{in inf.}]$.

IV. $AB = [a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots \text{in inf.}]$.

Из этих постулатов следует, что **А** — ассоциативная и коммутативная алгебра. Последовательность $[0, 0, 0, \ldots \text{in inf.}]$ будем обозначать через 0 („нуль"). Определим еще: $-A = [-a_1, -a_2, -a_3, \ldots \text{in inf.}]$. Естественно определить вычитание формулой:

$$A - B = A + (-B) = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \ldots \text{in inf.}].$$

Далее, из поставленных постулатов следует верность дистрибутивного закона для сложения и умножения (а также для сложения и умножения на скалар) и др. основные законы сложения и умножения.

§ 2. Рассмотрим теперь бесконечные последовательности, составленные из наших последовательностей. Дадим определение:

Последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots \text{in inf.}$ стремится к нулю: $A_m \to 0$ или $\lim\limits_{m \to \infty} A_m = 0$, если, взяв произвольное натуральное число n, мы всегда найдем соответственно ему такое число $M > 0$, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов равны нулю.

Далее: последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots \text{in inf.}$ стремится к пределу B: $\lim\limits_{m \to \infty} A_m = B$, если последовательность:

$$A_1 - B, A_2 - B, A_3 - B, \ldots \text{in inf.}$$

стремится к нулю. Иначе последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots \text{in inf.}$ стремится к пределу B, если при всяком натуральном n можно найти такое $M > 0$, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов будут такие же как и в B. Из этого определения следует:

Последовательность не может иметь двух различных пределов. Если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = B$,

то

$$\lim_{m\to\infty}(A_m \pm B_m) = A \pm B.$$

Это же верно и для алгебраической суммы нескольких слагаемых. Если

$$\lim_{m\to\infty} A_m = A, \quad \lim_{m\to\infty} B_m = B,$$

то

$$\lim_{m\to\infty} A_m B_m = AB.$$

Это же верно и для произведения нескольких сомножителей. Обозначим, как обычно, степень последовательности A:

$$A^k = [a_1^k, a_2^k, a_3^k, ..\text{in inf.}] = \underbrace{A\cdot A...A}_{k\text{раз}}$$

(k — натуральное число).

Из предыдущего следует:

Если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, то $\lim\limits_{m\to\infty}(A_m^k) = A^k$ — для всякого натурального k.

Далее, если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, а B какая-либо постоянная последовательность, то: $\lim\limits_{m\to\infty}(A_m B) = AB$.

Заметим, что при умножении всякий скалар c можно рассматривать, как частный случай последовательности:

$$C = [c, c, c, ...\text{in inf.}]; \text{ при любом } A: Ac = AC.$$

Последовательность: $E = [\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, ...\text{ in inf.}]$ является единицей для нашего умножения последовательностей. $C = cE$.

Из предыдущего следует: если $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m = B$... (конечное число) и $f(A_m, B_m, ...)$ целая рациональная функция от A_m, B_m,.. с любыми коэффициентами из наших последовательностей или из скаляров, то $\lim\limits_{m\to\infty} f(A_m, B_m, ...) = f(A, B, ...)$.

§ 3. Можно доказать и теорему Коши-Больцано; но здесь необходимое и достаточное условие существования предела формулируется проще: последовательность $A_1, A_2, A_3, ...$in inf. имеет предел тогда и только тогда, если при всяком натуральном n можно найти такое натуральное число M, что при натуральном $m \geqslant M$ в $A_m - A_{m+1}$ первые n элементов будут равны нулю.

Доказательство. 1) Условие необходимо: Если существует $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m$, то, по определению, при данном n можно найти натуральное M, так, что в $A - A_m$, и в $A - A_{m+1}$, при $m \geqslant M$ первые n элементов будут $= 0$; а следовательно, и в

$$(A - A_{m+1}) - (A - A_m) = A_m - A_{m+1}$$

первые n элементов равны нулю.

2) Условие достаточно: Пусть оно исполнено. Найдем ряд натуральных чисел: $M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_3 \leqslant ...$in inf. так, чтобы в $A_{M_\alpha} - A_{M_\alpha+1}$, первые α элементов были $= 0$ ($\alpha = 1, 2, 3, ...$in inf.). Обозначим через a_α α-й элемент в A_{M_α} и пусть $A = [a_1, a_2, a_3, ...\text{in inf.}]$. Докажем, что $A = \lim A_m$. Пусть n данное натуральное число. Тогда в A_{M_n} 1-й элемент тот же, что и в A_{M_1}, т. е. a_1; 2-й элемент a_2 и т. д., наконец, n:й элемент a_n т. е. в $A - A_{M_n}$ первые n элементов $= 0$; с другой стороны при

$m > M_n$ в A_m первые n элементов те же что и в A_{M_n}, т. е. и в $A - A_m$ первые n элементов $= 0$, что и тр. док.

§ 4. Рассмотрим теперь бесконечный ряд (бесконечную сумму) наших последовательностей: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ in inf.

Обозначим: $S_m = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$; если существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$, то данный ряд — сходящийся, и S его сумма.

В противном случае ряд — расходящийся. Из теоремы § 3 следует необходимое и достаточное условие сходимости ряда. Ряд $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ сходящийся тогда и только тогда, если при произвольном натуральном n можно найти такое натуральное M, что при натуральном $m \geqslant M$ в совокупности A_{m+1} первые n элементов будут равны 0, т. е., другими словами:

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы общий его член стремился к нулю: $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = 0$.

Из теорем § 2 вытекает, что сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать и почленно умножать на данную последовательность. Наконец, теорема об умножении сходящихся рядов остается правильной. Пусть $S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ и $T = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots$ два сходящиеся ряда. Возьмем ряд: $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$, где: $C_1 = A_1B_1$, $C_2 = A_1B_2 + A_2B_1$, вообще: $C_m = A_1B_m + A_2B_{m-1} + \ldots + A_mB_1$.

Рассмотрим случаи, когда $m = 2k$ четное и $m = 2k + 1$ нечетное.

$$C_{2k} = A_1B_{2k} + A_2B_{2k-1} + \ldots + A_kB_{k+1} + A_{k+1}B_k + \ldots + A_{2k}B_1;$$

$$C_{2k+1} = A_1B_{2k+1} + A_2B_{2k} + \ldots + A_{k+1}B_{k+1} + \ldots + A_{2k+1}B_1.$$

Но так как ряды S и T сходящиеся, то при данном n и при достаточно большом k в A_k, A_{k+1}, $\ldots$ B_k, B_{k+1} $\ldots$ будут равны нулю первые n элементов; но тогда и в C_{2k} и в C_{2k+1} первые n элементов будут $= 0$; след. ряд $C_1 + C_2 + \ldots$ сходящийся. Но $C_1 + C_2 + \ldots + C_m - S_mT_m$ (где $S_m = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$, $T_m = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$) при достаточно большом m есть сумма произведений вида $A_\varkappa B_\lambda$ где $\varkappa$ или $\lambda \geqslant k$, т. е. в такой сумме все первые n элементов $= 0$. Следовательно: $(C_1 + C_2 + \ldots + C_m) - S_mT_m \to 0$, т. е. $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$ in. inf. $= ST$.

§ 5. Рассмотрим совокупность особого типа: пусть E_n совокупность, в которой все элементы, кроме n-го, равны нулю, а n-й элемент равен ε. Тогда, очевидно:

$E_mE_n = 0$ при $m \neq n$; $E_mE_n = E_n$. И всякая совокупность A представляется в виде бесконечного ряда:

$$A = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + \ldots \text{ in. inf.}$$

Этот ряд сходящийся, ибо $\lim\limits_{m\to\infty} E_m = 0$. Это представление A — однозначно.

Заметим, что все элементы вида x_nE_n — при данном n — составляют кольцо, если x_n пробегает все элементы кольца $\mathbf{K}$; это кольцо элементов x_nE_n есть субалгебра для $\mathbf{A}$, и при этом — инвариантная субалгебра (идеал). Мы его обозначим через $\mathbf{A}_n$. Сумма нескольких и даже бесчисленного множества таких субалгебр $\mathbf{A}_n$ — тоже инвариантная субалгебра для $\mathbf{A}$. Две таких субалгебры $\sum\limits_{\varkappa} \mathbf{A}_\varkappa$ и $\sum\limits_{\lambda} \mathbf{A}_\lambda$ взаимно-простые, если никакое $\varkappa$ не равно никакому λ. В частности, при всяком данном n $\mathbf{A}_n$ взаимно-простое с суммою остальных субалгебр

$\mathbf{A}_m$. Мы можем сказать, что $\mathbf{A}$ есть прямая сумма всех субалгебр $\mathbf{A}_m$; будем обозначать:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \dot{+} \mathbf{A}_2 \dot{+} \mathbf{A}_3 \dot{+} \ldots \text{ in. inf.}$$

Заметим, что это понятие о прямой сумме алгебр с бесчисленным множеством слагаемых отличается от понятия прямого произведения групп с бесчисленным множеством сомножителей тем, что каждый элемент такого прямого произведения групп представляется в виде произведения конечного числа компонентов, тогда как у нас каждый объект („совокупность“) алгебры $\mathbf{A}$ представляется, как бесконечная сумма элементов из алгебр $\mathbf{A}_\alpha$.

Заметим, что алгебра $\mathbf{A}_n$ при всяком n просто изоморфна кольцу $\mathbf{K}$.

§ 6. Введем теперь понятие о бесконечном произведении наших совокупностей (которые мы в дальнейшем будем называть „объектами“). Пусть дана бесконечная последовательность объектов: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf.; возьмем: $P_m = A_1 A_2 \ldots A_m$ и выясним, существует ли $\lim\limits_{m\to\infty} P_m = P$; если этот предел существует и (как нам и здесь выгодно считать) отличен от нуля, то мы назовем наше бесконечное произведение сходящимся, а значение $P = A_1 A_2 A_3 \ldots$ in inf. — его произведением. Предположим сначала, что в P ни один элемент не равен нулю и не есть нулевой делитель.

По определению предела, взяв любое натуральное n, можно найти натуральное M так, что для всякого натурального $m \geqslant M$ в $P - A_1 A_2 \ldots A_m$ первые n элементов будут $= 0$; т. е. в $A_1 A_2 \ldots A_m$ первые n элементов такие же, как и в P, и по условию они $\neq 0$; но тогда, след., в A_{m+1} в A_{m+2} и т. д. in inf. первые n элементов равны ε, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = E$.

Обратно, пусть $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = E$; след., взяв любое натуральное n, можно так найти M, что при $m \geqslant M$ во всех A_m первые n элементов будут равны ε; если обозначить через $a_1, a_2, \ldots a_n$ первые n элементов в произведении $A_1 A_2 \ldots A_m$ и затем, увеличивая n беспредельно, определить: $P = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ in inf.}]$, то легко видеть, что $P = \lim\limits_{m\to\infty} (A_1 A_2 \ldots A_m)$, т. е. произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots$ in inf. — сходящееся. Правда, еще следует поставить условие, что во всех A_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ in inf.) нет элементов, равных нулю. В этом случае можно положить:

$$A_\lambda = E + B_\lambda, \quad \lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda = 0 \text{ и } P = \overset{\infty}{\underset{\lambda=\lambda}{\Pi}} (E + B_\lambda).$$

Мы должны во всех этих заключениях поставить специальное условие: во всех A_λ (и в P) нет элементов, которые были бы нулевыми делителями, ибо нулевой делитель может иметь единицу, отличную от ε и даже наверное имеет ее: пусть $ab = 0$, $\varepsilon - b = \delta$; тогда:

$$a\delta = a\varepsilon - ab = a\varepsilon = a.$$

§ 7. Рассмотрим вопрос о делении наших объектов. Если $C = AB$, то C „делится“ на A (и на B); если $A = [a_1, a_2, \ldots]$, $B = [b_1, b_2, \ldots]$, $C = [c_1, c_2, \ldots]$, то при всяком m $c_m = a_m b_m$, т. е. c_m делится на a_m; это условие и достаточно для делимости C на A.

Если объект A делит всякий другой объект, то он делит и единицу E; т. е. всякий его элемент a_m есть делитель единицы ε, т. е. является „алгебраической единицей". Это условие очевидно и достаточно. Назовем и здесь A — „алгебраической единицей". В этом случае существует и $A^{-1} = E : A$.

Очевидно, что произведения, частные и степени алгебраических единиц — тоже алгебраические единицы. Т. е. все алгебраические единицы из **A** составляют группу (бесконечную).

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ идемпотентный тогда и только тогда, если все a_n — идемпотентные элементы* из **K**. Произведение идемпотентных объектов — тоже идемпотентный объект (как следует из коммутативного закона для умножения). Следовательно, все идемпотентные объекты из **A** составляют обобщенную ассоциативную группу с единицей** (ибо E — тоже идемпотент).

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ — нулевой делитель в **A** тогда и только тогда, если хоть один из элементов a_n есть нулевой делитель в **K** (или равен нулю), ибо, если a_m — нулевой делитель (или $= 0$) и $a_m b_m = 0$ ($b_m \neq 0$), то, обозначив: $B = (0, 0, \ldots b_m, 0, \ldots)$ (b_m стоит на m-м месте), получим: $AB = 0$, и $B \neq 0$.

Таким образом, в **A** всегда имеются нулевые делители, даже, если **K** — область целости.

Объект $A = [a_1, a_2, \ldots]$ нильпотентный тогда и только тогда, если все a_n — нильпотентные элементы в **K**. Но здесь необходима оговорка: если α_n — индекс нильпотентности элемента a_n ($n = 1, 2, \ldots$ in. inf.), и все α_n ограничены: $\alpha_n \leqslant M$, то $A^M = 0$, M — индекс нильпотентности для A. Но если α_n — неограничены, то мы можем только утверждать, что $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$. В этом случае мы считаем объект A нильпотентным с бесконечным индексом нильпотентности.

Вследствие верности коммутативного закона для умножения всякий нильпотентный объект A есть и собственно-нильпотентный, ибо AB — тоже нильпотентный объект при любом объекте B. Таким образом, совокупность нильпотентных объектов из **A** (и обычных, и в нашем обобщенном смысле) есть инвариантная субалгебра для **A**, которую мы и здесь назовем „радикалом".

Мы должны сделать еще одно дополнение: если A и B нильпотентны, то их сумма $A + B$ нильпотентна, если индексы нильпотентности конечны; но мы докажем, что $A + B$ нильпотентна и тогда, если один или оба индекса нильпотентности (у A и B) бесконечны. По определению предела, при данном n можно найти M так, что при $m \geqslant M$ в A^m и в B^m первые n элементов будут равны нулю. Возьмем:

$$(A + B)^{2m} = A^{2m} + 2mA^{2m-1}B + \frac{2m\,(2m-1)}{2} A^{2m-2}B^2 + \ldots + B^{2m}$$

(умножение на натуральное число есть просто повторение столько раз слагаемым); мы имеем сумму, в каждом слагаемом которой первые n элементов равны нулю; следовательно, и в сумме тоже первые n элементов равны нулю, и $\lim\limits_{k \to \infty} (A + B)^k = 0$.

Таким образом, радикал **P** алгебры **A** образуется всеми объектами $A = [a_1, a_2, \ldots]$, где элементы a_n берутся всевозможными способами

---

* Элемент 0 тоже входит в число идемпотентных элементов.

** Частный случай так наз. „сверхгруппы" Раутера; её „регулярная область" состоит из одного только объекта E.

из радикала R кольца $\mathbf{K}$. Если кольцо $\mathbf{K}$ полупростое (т. е. в данном случае — без нильпотентов), то и $\mathbf{A}$ — полупростая алгебра.

§ 8. Рассмотрим теперь вопрос об идеалах (инвариантных субалгебрах) в $\mathbf{A}$; пусть $\mathbf{B}$ — такой идеал, и $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots] \in \mathbf{B}$, $B' = [b_1', b_2', b_3', \ldots] \in \mathbf{B}$; тогда и $B \pm B' = [b_1 \pm b_1', b_2 \pm b_2', \ldots] \in \mathbf{B}$; если $A = [a_1, a_2, \ldots]$ — любой объект из $\mathbf{A}$, то и $AB = [a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots] \in \mathbf{B}$, т. е. при всяком n n-е элементы всех объектов из $\mathbf{B}$ пробегают некоторый идеал Λ_n из $\mathbf{K}$ (при некоторых n может быть $\Lambda_n = 0$ или $\Lambda_n = \mathbf{K}$). Очевидно и обратное: если в $B = [b_1, b_2, b_3, \ldots]$ при всяком n b_n пробегает некоторый идеал $\Lambda_n \in \mathbf{K}$, то B пробегает некоторый идеал $\mathbf{B} \in \mathbf{A}$.

Пусть каждый из идеалов Λ_n порождается конечным числом образующих: $a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nk_n}$. Пусть, далее:

$$A_\lambda' = [a_{1\lambda}, 0, 0, 0, \ldots] (\lambda = 1,2, \ldots k_1); \quad A_\lambda'' = [0, a_{2\lambda}, 0, 0, \ldots] (\lambda = 1,2, \ldots k_2)$$

и т. д. Тогда для всякого объекта $B \in \mathbf{B}$ имеем:

$$B = \sum_{\lambda=1}^{k_1} x_{1\lambda} A_\lambda' + \sum_{\lambda=1}^{k_2} x_{2\lambda} A_\lambda'' + \ldots \text{ in. inf. (ряд сходящийся).}$$

Можно объединить: $[x_{1\lambda}, x_{2\lambda}, \ldots] = x_\lambda$ (здесь, например, при $\lambda > k_1$ заменяем $x_{1\lambda}$ нулем и т. д.); $A_\lambda' + A_\lambda'' + \ldots = A_\lambda$ (здесь тоже, например, при $\lambda > k_1$ заменяем A_λ' нулем); тогда:

$$B = \sum_\lambda X_\lambda A_\lambda; \tag{1}$$

эта сумма или конечна или бесконечна (если числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ неограничены); во всяком случае, такая сумма представляет сходящийся ряд со значением B. Следовательно, если в кольце $\mathbf{K}$ всякий идеал имеет конечный базис, то в $\mathbf{A}$ всякий идеал имеет конечный или счетный базис.

Пусть, в частном случае, все $k_n = 1$, т. е. все идеалы Λ_k — главные; пусть идеал Λ_n порождается элементом a_n, и $[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A$; тогда по (1): $B = XA$, где X — любой объект из $\mathbf{A}$; т. е. и идеал $\mathbf{B}$ — главный. Легко видеть и обратное: если $\mathbf{B}$ — главный идеал, то и все идеалы Λ_n главные идеалы кольца $\mathbf{K}$.

Если $\mathbf{B} = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \ldots$ и $\mathbf{B}' = \Lambda_1' + \Lambda_2' + \Lambda_3' + \ldots$ два идеала в $\mathbf{A}$, и $\mathbf{B} \supset \mathbf{B}'$ то, очевидно, при всяком n: $\Lambda_n \supset \Lambda_n'$; и обратно.

Для алгебры $\mathbf{A}$ неверна теорема о конечности возрастающей цепи идеалов, равно как и теорема конечности убывающей цепи идеалов. Так (обозначения, как и в § 5): $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \subset \ldots$ in. inf. $\subset \mathbf{A}$ с другой стороны $\mathbf{A} \supset \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots$ in. inf. $\supset \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4 + \ldots$ in. inf. $\supset \bigcap \ldots$ in inf.

Если $\mathbf{B} = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots$ и $\mathbf{B}' = \Lambda_1' + \Lambda_2' + \ldots$ два идеала из $\mathbf{A}$, и $\Gamma = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots$ их сумма, а $\Delta = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \ldots$ их пересечение, то, очевидно, что для всякого n: $\mathbf{M}_n = \Lambda_n + \Lambda_n'$, а $\mathbf{N}_n$ — пересечение Λ_n и Λ_n'. Это же верно и для случая нескольких (конечного числа) идеалов из $\mathbf{A}$. В случае же бесчисленного множества идеалов $\mathbf{B}, \mathbf{B}', \mathbf{B}'', \ldots$ из $\mathbf{A}$ эта теорема тоже остается правильной; только надо сделать оговорку относительно бесконечных сумм: $\mathbf{B} + \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots$ и $\Lambda_n + \Lambda_n' + \Lambda_n'' + \ldots$ (для всякого n); их следует понимать, как совокупности всевозможных конечных сумм их элементов. (Для суммы $\mathbf{B} + \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots$ in. inf.

это сводится к данному нами в § 4 определению суммы бесконечного ряда).

§ 9. Рассмотрим теперь частный случай, когда **K** есть абсолютная область целости, т. е. область обычных целых чисел. Пусть $A=[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ и $B=[b_1, b_2, b_3, \ldots]$ два любых объекта из **A**, неравных нулю и не нулевых делителей (т. е. все $a_n \neq 0$ и все $b_n \neq 0$). В таком случае при всяком n мы можем a_n разделить на b_n:

$$a_n = b_n q_n + r_n$$

где q_n — неполное частное, а r_n — остаток, причем: $0 \leqslant r_n < |b_n|$. Обозначим: $Q=[q_1, q_2, q_3, \ldots]$, $R=[r_1, r_2, r_3, \ldots]$; тогда:

$$A = BQ + R, \text{ где для всякого } n\text{: } 0 \leqslant r_n < |b_n|. \qquad (2).$$

Такой вид имеет в **A** теорема о делении с остатком. Заметим, что некоторые r_n могут быть $=0$, т. е. объект R может оказаться и нулевым делителем. Заметим также, что A может быть и нулевым делителем (и даже нулем), — формула (2) остается правильной; если, напр., $a_n=0$, то мы считаем $r_n=0$ и $q_n=0$ ибо $b_n \neq 0$.

Что касается случая, когда B — нулевой делитель, то формула (2) здесь остается верной, если в A равны нулю все элементы, стоящие на тех же местах, где и равные нулю элементы в B (т. е., если $b_n=0$, то и $a_n=0$); в этом случае и в R равны нулю элементы, стоящие на тех же местах, а Q — неопределенно, — именно на тех местах, на которых в B стоят нули, в Q могут стоять любые целые числа.

§ 10. Принимая и в дальнейшем **K** абсолютной областью целости, рассмотрим, возможен ли в **A** алгорифм Эвклида. Возьмем два объекта из **A**: $A=[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ и $B=[b_1, b_2, b_3, \ldots]$, неравных нулю и не являющихся нулевыми делителями. Делим A на B:

$A=BQ+R$; далее, делим B на R:

$B=RQ'+R'$; далее делим R на R':

$R=R'Q''+R''$ и т. д.

Но здесь необходимо еще много оговорок. Во-первых, напр., R (или какой-нибудь из дальнейших остатков) может оказаться нулевым делителем; это будет тогда, если при некотором n a_n разделится на b_n: $a_n=b_nq_n$; в таком случае пишем: $a_n=b_n(q_n-1)+b_n$ и возьмем в Q n-й элемент равным q_n-1, а в R n-й элемент равным b_n. В процессе дальнейших делений этот случай представится для всякого значка n. Пусть, например, $D(a_1,b_1)=r_1^{(s)}$; тогда для $(s+1)$-го деления: $R^{(s-1)}=R^{(s)}Q^{(s+1)}+R^{(s+1)}$, и мы будем иметь: $r_1^{(s-1)}=r_1^{(s)}q_1^{(s)}$; мы и здесь пишем:

$$r_1^{(s-1)} = r_1^{(s)}(q_1^{(s)}-1)+r_1^{(s)}$$

А для следующего деления: $R^{(s)}=R^{(s+1)}Q^{(s+2)}+R^{(s+2)}$ берем:

$$r_1^{(s)} = r_1^{(s)}\cdot 0 + r_1^{(s)},$$

т. е. во всех последующих $R^{(m)}$ первый элемент будет $=r_1^{(s)}$. И так мы поступаем для всякого значка n, когда такой случай встретится.

Во-вторых, возникает вопрос, окончится-ли когда-нибудь наш процесс. Для всякого значка n элементы a_n и b_n имеют общего наибольшего делители d_n, который находится алгорифмом Эвклида через k_n шагов (делений). Если числа k_n (при $n=1, 2, 3, \ldots$ in. inf.) ограничены: $k_n \leqslant K$ при всяком n, то через K шагов соответственно остаток будет: $D=[d_1, d_2, d_3, \ldots]$ и алгорифм Эвклида будет закончен, ибо все последующие остатки будут равны D. Если же числа

k_n — неограничены, то алгорифм Эвклида будет продолжаться без конца. Но легко видеть, что при любом данном n найдется такое натуральное $M > 0$, что при $m \geqslant M$ m-й остаток будет иметь первые n элементов, равные $d_1, d_2, \ldots d_n$, т. е. в этом случае:

$$\lim_{m \to \infty} R^{(m)} = D.$$

Очевидно, что D есть общий наибольший делитель для A и B,— наибольший в том смысле, что он делится на всякий другой общий делитель объектов A, B.

§ 11. Дадим теперь другую форму алгорифма Эвклида в алгебре **A** (где **K**, как и раньше, абсолютная область целости), более эффективную для ее действительного выполнения. Пусть, по прежнему, $A = [a_1\ a_2, \ldots]$ и $B = [b_1, b_2, \ldots]$ два, неравных нулю, объекта из **A**, не являющихся нулевыми делителями. Находим общий наибольший делитель d_1 чисел a_1 и b_1 алгорифмом Эвклида: $a_1 = b_1 q_1 + r_1$, $b_1 = r_1 q_1' + r_1'$, $\ldots r_1^{(k-2)} = r_1^{(k-1)} q_1^{(k)} + d_1$, $r_1^{(k-1)} = d_1 q_1^{(k+1)}$.

Теперь определяем: $Q_1 = [q_1, 0, 0, \ldots]$, $R_1 = [r_1, a_2, a_3, \ldots]$; тогда: $A = BQ_1 + R_1$ и далее: $B = R_1 Q_1' + R_1'$, где $Q_1 = [q_1', 0, 0, \ldots]$, $R_1' = [r_1', b_2, b_3, \ldots]$ и т. д., наконец, $R_1^{(k-1)} = R_1^{(k)} Q_1^{(k+1)} + R_1^{(k+1)}$, где: $Q^{(k+1)} = [q_1^{(k+1)} - 1, 0, 0, 0, \ldots]$; $R^{(k+1)} = [d_1, a_2, a_3, \ldots]$ или $R_1^{(k+1)} = [d_1, b_2, b_3, \ldots]$, смотря по тому, что k нечетное или четное; тогда как $R^{(k)} = [d_1, b_2, b_3, \ldots]$ при k нечетном и $R_1^{(k)} = [d_1, a_1, a_2, \ldots]$ при k — четном.

Теперь находим алгорифмом Эвклида общий наибольший делитель a_2 и b_2; например, при k_1 — четном:

$$a_2 = b_2 q_2 + r_2,\ b_2 = r_2 q_2' + r_2',\ \ldots\ r_1^{(k_2-1)} = d_2 q_2^{(k_2+1)};$$

берем:

$R_1^{(k)} = R_1^{(k+1)} Q_2 + R_2$, где $Q_2 = [0, q_2, 0, 0, \ldots]$, $R_2 = [d_1, r_2, a_3, a_4, \ldots]$ и т. д.

Так мы последовательно находим:

$$R_1^{(k_1)} = [d_1, (a_2,\ a_3,\ \ldots \text{ или } b_2,\ b_3,\ \ldots)],$$

$$R_2^{(k_2)} = [d_1,\ d_2,\ (a_3,\ a_4,\ \ldots \text{ или } b_3,\ b_4,\ \ldots)],\ \text{и т. д.}$$

Ясно, что $\lim\limits_{m \to \infty} R_m^{(k_m)} = D = [d_1,\ d_2,\ d_3, \ldots]$. Число шагов нахождения D здесь всегда бесконечно.

§ 12. Наряду с общим наибольшим делителем двух объектов естественно определить их общее наименьшее кратное. Пусть (с прежними обозначениями) A и B два объекта, не нулевых делителя и неравных нулю; обозначим:

$$m_n = \mathbf{M}(a_n,\ b_n),\ M = [m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots \text{ in. inf.}];$$

очевидно, что M общее кратное A и B, делящее всякое иное общее кратное A и B, т. е. общее наименьшее кратное. Возьмем все $a_n > 0$ и все $b_n > 0$ (такие объекты A и B можно назвать „положительными“); берем также все $d_n > 0$ и $m_n > 0$. Тогда, очевидно: $DM = AB$.

Если $D = E$ (единица), то объекты A и B „взаимно-простые“; это бывает тогда и только тогда, если при всяком n a_n и b_n взаимо-простые. В этом случае: $M = AB$.

Если $D(A, B) = D$ (с прежними обозначениями), то для всякого n можно найти целые числа x_n, y_n так, что:

$$a_n x_n + b_n y_n = d_n;$$

обозначив: $[x_1, x_2, x_3, \ldots] = X$, $[y_1, y_2, y_3 \ldots] = Y$, получим:

$$AX + BY = D,$$

т. е. такое уравнение разрешимо. В частности, если A и B взаимно простые, то разрешимо уравнение:

$$AX + BY = E.$$

А отсюда следуют теоремы Эвклида и др. теоремы о делимости.

§ 13. Поставим теперь вопрос о „простых" объектах, т. е. таких, которые делятся только на „единицы" и на самих себя*. „Единицами" в случае, когда K абсолютная область целости, являются те объекты которых элементы равны ± 1. Два объекта, различающиеся только „единичным" множителем, назовем (как обычно) ассоциированными. В вопросах делимости ассоциированные объекты могут быть заменены друг другом; поэтому можно брать объекты, все элементы которых положительны (мы назвали такие объекты положительными).

Легко видеть, что „простыми" объектами являются такие и только такие, все элементы которых равны единице (т. е. числу 1), кроме одного, который равен какому-то простому числу p (и все ассоциированные с ними объекты). Пусть $P_n = [1, 1, \ldots p, 1, \ldots]$ такой простой объект; простое число p стоит на n-м месте. Пусть AB (обозначения, как и раньше) делится на P_n; следовательно, произведение $a_n b_n$ делится на p; но тогда или a_n или b_n (или оба) делятся на p, т. е или A или B делится на P_n. Это же верно и для нескольких сомножителей.

Докажем, что это верно и для произведения бесчисленного множества сомножителей (конечно, если произведение сходящееся и ни один из сомножителей не равен нулю и не есть нулевой делитель). Пусть $A = A_1 A_2 A_3 \ldots$ in inf. делится на простой объект $P_m = [1, 1, \ldots p, 1, \ldots]$ (p стоит на m-м месте). Возьмем $M > m$ и соответственно ему $N > 0$ так, чтобы при $n \geqslant N$ $A_1 A_2 \ldots A_n$ имело бы на m-м месте тот же элемент a_m, что и A; тогда $A_1 A_2 \ldots A_n$ будет делится на P_m, т. е. по крайней мере один из сомножителей $A_1 A_2, \ldots A_n$ делится на P_m.

Отсюда, как в элементарной теории чисел, следует однозначная разложимость всякого неособенного (т. е. не нулевого делителя и не равного нулю) объекта на простые множители (однозначная — с точностью до „единичных" множителей); только произведение простых множителей будет вообще бесконечное. Именно, если

$$A = [a_1, a_2, a_3, \ldots \text{in inf.}], \quad \text{и} \quad |a_k| = p_1^{(k)^{\alpha_1^{(k)}}} p_2^{(k)^{\alpha_2^{(k)}}} \ldots$$

разложение числа $|a_k|$, на простых множителей, и

$$[1, 1, \ldots p_1^{(k)}, 1, \ldots] = P_k' \quad (p_1^{(k)} \text{ на } k\text{-м месте}) \qquad \text{то}$$

$$A = P_1'^{\alpha'} P_2'^{\alpha_2'} \ldots P_1''^{\alpha''} P_2''^{\alpha''} \ldots \text{in nif.}$$

с точностью до „единичного" множителя).

§ 14. Легко видеть, что алгорифм Эйлера переносится на наши (объекты: пусть R и R_1 два данных объекта, а $K_1, K_2, \ldots K_n$ тоже данные объекты, причем все эти объекты не обязательно не нулевые

* и, конечно, на ассоциированные с собою объекты.

делители, т. е. некоторые из них могут быть делителями нуля (только отличны от нуля); определяем R_2, R_3, ... R_n, R_{m+1} следующей таблицей:

$$\begin{aligned} R &= K_1R_1 + R_2, \\ R_1 &= K_2R_2 + R_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ R_{n-1} &= K_nR_n + R_{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

Эта таблица по существу заменяет бесчисленное множество таких таблиц, соответственно каждому элементу наших объектов. Следствия из таблицы (3) — такие же, как для чисел. Именно, определив „скобки Эйлера", как и для чисел формулами:

$$[K_1] = K_1, \quad [K_1, K_2] = K_1K_2 + E;$$

$$[K_1, K_2, \ldots K_{m+1}] = [K_1, K_2, \ldots K_m]\,K_{m+1} + [K_1, K_2, \ldots K_{m-1}], \tag{4}$$

получим:

$$R = [K_1, K_2, \ldots K_m]\,R_m + [K_1, K_2, \ldots K_{m-1}]\,R_{m+1}.$$

Далее, выводим, как и для чисел:

$$[K_1, K_2, \ldots K_m] = K_1\,[K_2, \ldots K_m] + [K_3, \ldots K_m];$$

$$[K_1, \ldots K_m] = [K_m, \ldots K_1];$$

$$[K_1, \ldots K_n] = [K_1, \ldots K_m]\,[K_{m+1}, \ldots K_n] + [K_1, \ldots K_{m-1}]\,[K_{m+2}, \ldots K_n]$$

при $m < n$; причем „пустые" скобки мы считаем равными E. Далее выведем:

$$(-1)^{n-1}[K_1, \ldots K_{n-1}]R_1 + (-1)^n[K_2, \ldots K_{n-1}]R = R_n; \tag{5}$$

$$[K_1. \ldots K_n]\,[K_2, \ldots K_{n-1}] - [K_1, \ldots K_{n-1}][K_2, \ldots K_n] = (-1)^n E. \tag{6}$$

Пусть теперь R и R_1 два данных объекта, над которыми мы совершаем алгорифм Эвклида, как в § 10, обозначая только те „частные", что мы обозначали через Q, Q', ... теперь через K_1, K_2, ..., а „остатки" — через R_2, R_3, ... ; тогда алгорифм Эвклида сольется с алгорифмом Эйлера (3). Но мы знаем, что алгорифм Эвклида может продолжаться без конца. Остановившись на n-м звене, мы найдем формулу (5). Пусть теперь n стремится к ∞. Мы видели, что тогда R_n стремится к D, где D — общий наибольший делитель R и R_1. Следовательно, правая, а значит и левая часть (5) стремятся к пределу при $n \to \infty$, и мы получим:

$$\pm [K_1, K_2, \ldots \text{in inf.}]\,R_1 \mp [K_2, K_3, \ldots \text{in inf.}]R = D; \tag{7}$$

двойной знак здесь зависит от того, что мы ведь можем взять $-D$ вместо D. Мы можем избегнуть этой неопределенности, написав формулу (7) в виде:

$$[-K_1, -K_2, \ldots \text{in inf.}]\,R_1 + [-K_2, -K_3, \ldots \text{in inf.}]\,R = D. \tag{7a}$$

Таким образом, скобки Эйлера и тут позволяют решить уравнение $RX + R_1Y = D$.

§ 15. В дальнейшем мы несколько обобщим наши объекты, беря за K не абсолютную область целости, а абсолютную область рациональности. Теперь элементы a_n объекта $A = [a_1, a_2, \ldots \text{in inf.}]$ будут вообще дробными числами; написав каждую такую дробь в виде;

$a_n = \frac{b_n}{c_n}$ (эта дробь не обязательно несократима; при a_n целом можно написать $a_n = \frac{a_n}{1}$ и обозначив:

$$B = [b_1, b_2, \ldots], \quad C = [c_1, c_2, \ldots],$$

получим: $A = \frac{B}{C}$. Здесь C — не нулевой делитель (все $c_n \neq 0$); но B может быть и нулевым делителем (именно, если A — нулевой делитель). Будем называть B, C — „целыми“ объектами, а A — „дробным“ объектом. Конечно, всякий целый объект A можно представить в виде „дроби“: $\frac{A}{E}$. Если „числитель“ B и „знаменатель“ C дроби $A = \frac{B}{C}$ взаимно-простые, то дробь $\frac{B}{C}$ „несократима“. Если же общий наибольший делитель B и C есть $D \neq E$, то $B = DB_1$, $C = DC_1$ и B_1 и C_1 взаимно-простые; тогда

$$A = \frac{B}{C} = \frac{B_1}{C_1}.$$

Представление A в виде несократимой дроби однозначно *.

Подобно же, несколько дробей (конечное число) можно привести к одному знаменателю. А далее, легко видеть, что и рациональные действия над нашими „дробями“ совершаются по тем же правилам, как и над обычными дробями. Только при делении для возможности и однозначности деления делитель (т. е. его числитель) не должен быть ни нулем, ни нулевым делителем.

Если несократимая дробь $A = \frac{B}{C}$ не есть нулевой делитель, то ее можно (как и обычные, числовые дроби) разложить в непрерывную дробь посредством алгорифма Эвклида, только, поскольку алгорифм Эвклида здесь может оказаться бесконечным, и получаемая непрерывная дробь может быть бесконечной, сходящейся в том смысле, как мы определили в § 2; т. е. последовательность ее подходящих дробей будет сходиться к данной дроби A. Подходящие дроби находятся обычным способом посредством алгорифма Эйлера.

§ 16. Если алгебру **A** представить обычным (регулярным) способом при помощи матриц, то каждому объекту $A = [a_1, a_2, \ldots]$ будет соответствовать бесконечная диагональная матрица, у которой по диагонали расположены элементы $a_1, a_2, \ldots$

Таким образом, алгебру **A** можно рассматривать, как частный случай матричной алгебры над кольцом **K**.

§ 17. Можно обобщить нашу алгебру **A** следующим образом: пусть нам дана последовательность коммутативных колец $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots$ in inf. Объект $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots$ in inf.] из **A** мы определяем следующим образом: $a_n \in \mathbf{K}_n$ ($n = 1,2 \ldots$ in inf.), т. е. каждый элемент a_n из A берется из своего особого кольца $\mathbf{K}_n$. Эти кольца $\mathbf{K}_n$ — весьма разнообразны и независимы друг от друга; напр., некоторые из них (или все они) могут быть областями целости, или даже полями. Мы получаем, таким образом, бесконечную прямую сумму различных по своей структуре (коммутативных) колец**. Легко убедиться, что все изложенное в §§ 1—8, остается верным и для новой, более общей алгеб-

* Если B — нулевой делитель, то некоторые элементы в B равны 0; пусть $b_n = 0$, тогда в D n-й элемент тот же, что и в C: $d_n = c_n$. Если дробь $\frac{B}{C}$ несократима, то при $b_n = 0$ должно быть $c_n = 1$.

** Возможно, конечно, дальнейшее обобщение — на некоммутативные ильца; но на этом мы сейчас не останавливаемся.

ры $\mathbf{A}^*$. Следует только выяснить следующий пункт: и здесь, как в § 5:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \dot{+} \mathbf{A}_2 \dot{+} \mathbf{A}_3 \dot{+} \ldots \text{ in inf.}, \tag{8}$$

только там все субалгебры A_n были изоморфны друг другу и изоморфны кольцу $\mathbf{K}$; а здесь A_n изоморфна $\mathbf{K}_n$, т. е. друг с другом A_n вообще не изоморфны. Так следует выяснить, не зависит ли A от того порядка, в каком стоят в (8) субалгебры $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ... Дело здесь касается стремления к пределу. Пусть

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_{\alpha_1} \dot{+} \mathbf{A}_{\alpha_2} \dot{+} \mathbf{A}_{\alpha_3} \dot{+} \ldots \text{ in inf.}, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}_{\alpha_n}$ — те же $\mathbf{A}_n$, только в ином порядке. Пусть: $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in inf.— последовательность объектов из $\mathbf{A}$, стремящихся к определенному пределу A. Пусть, далее, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots$ in inf. объекты, получаемые из $A_1, A_2, A_3, \ldots$ при переходе от $\mathbf{A}$ к $\bar{\mathbf{A}}$, а $\bar{A}$ — объект, получаемый тем же способом из A, т. е., если, например $A = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, где $a_n \in \mathbf{K}_n$, то $\bar{A} = [a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3}, \ldots]$, где $a_{\alpha_n} \in \mathbf{K}_{\alpha_n}$.

Надо выяснить, будет ли $\bar{A}$ пределом последовательности $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots$ A для этого достаточно рассмотреть случай, когда $A = 0$ (т. е. все элементы в A — нули соответствующих колец); тогда и $\bar{A} = 0$. Итак, пусть $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = 0$. Но это значит, что, взяв любое n, можно найти $M > 0$ так, что при всяком $m > M$ в A_m первые n элементов будут нули (из соответствующих колец). Но вместо n можно взять наибольшее из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; тогда в A_m будут (при $m > M$ **) равным нулю и все элементы с индексами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, т. е. это значит, что в $\bar{A}_m$ первые n элементов будут нули; а это и говорит о том, что $\lim\limits_{m\to\infty} \bar{A}_m = 0$. Следовательно, предел не зависит от перестановки слагаемых в (8).

Заметим, что $\mathbf{A}$ тогда и только тогда полупростая алгебра, если все кольца $\mathbf{K}_n$ „полупростые".

§ 18. Рассмотрим еще случай, когда все $\mathbf{K}_n$ являются конечными простыми полями с различными характеристиками p_n (простые числа). Определим еще действие: умножение объекта A на натуральное число m: $mA = \underbrace{A + A + \ldots + A}_{m \text{ слагаемых}}$.

Если при всяком n числа p_n ограничены, то среди них только конечное число различных; обозначив через M общее наименьшее кратное всех этих различных чисел p_n, мы будем иметь для всякого объекта $A \in \mathbf{A}$: $MA = 0$.

Если же числа p_n неограничены, т. е. их бесчисленное множество различных, то будет верно следующее: взяв любое натуральное число n, можно найти такое натуральное число M, что для всякого объекта A в MA первые n элементов будут равны нулю. Действительно, для этого следует только взять за M — общее наименьшее кратное всех характеристик $p_1, p_2, \ldots p_n$.

Любопытен случай, когда все $p_n = 2$. В такой алгебре $\mathbf{A}$ сумма $A + A \equiv 0$ для всякого объекта A. В этой алгебре за исключением единицы E всякий объект является нулевым делителем.

---

* За исключением умножения на скаляр (§ 1, III), ибо теперь нет скаляров, общих всем $\mathbf{K}_n$.

** Это M уже не предыдущее, а новое, подходящим образом выбранное.