ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ КВАТЕРНИОННЫХ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Р. Х. Кристалинский

Обозначим через E_4 четырехмерное евклидово пространство, а через $\bar{E}_4$ — компактификацию этого пространства, полученную дополнением E_4 бесконечно удаленной точкой. Каждую точку из $\bar{E}_4$, имеющую координаты (x_0, x_1, x_2, x_3), будем отождествлять с кватернионом $z = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$.

Пусть F — произвольное множество в $\bar{E}_4$, которое может, в частности, совпадать со всем этим пространством. Кватернионной функцией $u(z)$, заданной на множестве F, мы называем всякое однозначное отображение этого множества в алгебру кватернионов.

Пусть D — открытое множество в $\bar{E}_4$. Кватернионная функция $u(z)$, определенная на D, называется регулярной в конечной точке z_0 из этого множества, если она непрерывно дифференцируема как функция от четырех действительных переменных в некоторой окрестности точки z_0 и удовлетворяет в ней, по крайней мере, одному из следующих соотношений:

$$Du = 0, \tag{1}$$

$$uD = 0, \tag{2}$$

где D — оператор вида

$$D = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{3}$$

Если $u(z)$ удовлетворяет соотношению (1), то она называется леворегулярной в точке z_0, если соотношению (2), то — праворегулярной.

Функция $u(z)$ называется леворегулярной в точке ∞, если функция

$$z^{-1}|z^{-1}|^2 u(z^{-1})$$

леворегулярна в точке 0. Функция $u(z)$ называется праворегулярной в точке ∞, если функция

$$u(z^{-1})|z^{-1}|^2 z^{-1}$$

праворегулярна в точке 0. Функция $u(z)$ называется регулярной на множестве D, если она регулярна в каждой точке этого множества.

В данной статье установим для регулярных кватернионных функций принцип двойственности, который был доказан для случая аналитических функций комплексного переменного в работе [1]. Необходимо отметить, что значительно раньше один частный случай этого принципа был установлен А. И. Маркушевичем [2]. Сформулируем следующие два предположения, которые нам потребуются в дальнейшем.

Лемма 1. Если кватернионная функция $v(z)$ праворегулярна в замкнутой области $\bar{G}$ четырехмерного евклидова пространства E_4, ограниченной кусочно-гладкой гиперповерхностью S, а кватернионная функция $u(z)$ леворегулярна в этой области, то имеет место соотношение

$$\iiint\limits_S v(t)\, dZ u(t) = 0, \tag{4}$$

где

$$dZ = [\cos(\widehat{\bar{n}, x_0}) + i \cos(\bar{n}, x_1) + j \cos(\bar{n}, x_2) + k \cos(\bar{n}, x_3)]\, dS,$$

$\bar{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S.

Лемма 2. Если кватернионная функция $w(z)$ праворегулярна в замкнутой области $\bar{G}$ пространства E_4, ограниченной кусочно-гладкой гиперповерхностью S, то для любой внутренней точки этой области z выполняется соотношение

$$w(z) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_S w(t) dZ \Delta_z [(t - z)^{-1}]. \tag{5}$$

Если кватернионная функция $u(z)$ леворегулярна в рассматриваемой области, то имеет место соотношение

$$u(z) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_S \Delta_z [(t - z)^{-1}]\, dZ u(t), \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Эти соотношения были установлены в работе [3].

Пусть D — открытое множество в пространстве $\bar{E}_4$ ($\bar{E}_4$ пространство E_4, дополненное бесконечно удаленной точкой). Обозначим через $A(D)$ множество кватернионных функций $u(z)$, леворегулярных в D, через $A_0(D)$ обозначим подмножество $A(D)$, состоящее из функций, равных нулю в бесконечно удаленной точке, если последняя принадлежит D.

Если ввести в $A(D)$ естественным образом операции сложения и умножения на вещественное число, то $A(D)$ превратится в линейное пространство над полем действительных чисел.

Введем в $A(D)$ топологию. Для этого рассмотрим последовательность открытых множеств $\{D_n\}$, обладающих такими свойствами:

1. D_n есть сумма конечного числа областей.

2. Граница каждой такой области состоит из конечного числа кусочно-гладких гиперповерхностей.

3. $\bar{D}_n \subset D_{n+1}$.

4. Для каждого компакта K, принадлежащего D, найдется такое n, что $K \subset D_n$.

Построение описанной системы множеств можно провести, например, подобно тому, как это сделано для плоского случая в [4, стр. 282].

Пусть B_n — совокупность всех кватернионных функций, леворегулярных в D_n и ограниченных там. Очевидно, что $A(D) \subset B_n$. Положим для функции $u(z) \in B_n$

$$\|u\|_n = \sup_{z \in D_n} |u(z)|.$$

В силу принципа максимума модуля для таких функций (см. [9]) будем иметь

$$\|u\|_n < \|u\|_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим в $A(D)$ множество

$$V(\mathrm{E}, n) = \mathrm{E}\{u(z) \in A(D), \ \|u\|_n < \mathrm{E}\}.$$

Можно проверить, что множества $V(\mathrm{E}, n)$ при всевозможных $n = 1, 2 \ldots$, $\mathrm{E} > 0$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля некоторой линейной отделимой топологии на $A(D)$. $A(D)$, снабженное этой топологией, превращается в линейное топологическое локально-выпуклое пространство — проективный предел последовательности нормированных пространств B_n.

Отметим следующие свойства пространства $A(D)$, снабженного указанной выше топологией.

1. Сходимость последовательности элементов $\{u_n\} \in A(D)$ означает, что соответствующая последовательность функций $\{u_n(z)\}$ сходится равномерно на каждом множестве $\overline{D}_n$.

2. Линейный функционал φ_0 непрерывен в $A(D)$ в том и только в том случае, когда существует натуральное число N такое, что φ_0 непрерывен относительно сходимости по норме B_N.

Эти и некоторые другие свойства пространств указанного типа приведены, например, в монографии [5].

Рассмотрим теперь в пространстве E_4 замкнутое множество F. Кватернионную функцию $x(z)$ назовем праворегулярной на множестве F, если она праворегулярна на некотором открытом множестве, содержащем F. Две кватернионные функции, праворегулярные на F, будем считать эквивалентными, если они совпадают на некотором открытом множестве, содержащем F.

Обозначим через $H(F)$ множество классов эквивалентных функций, праворегулярных на F и равных нулю в точке ∞, если последняя принадлежит F. Множество $H(F)$ становится линейным пространством над полем действительных чисел, если в нем обычным образом ввести операции сложения и умножения на действительное число.

Введем в $H(F)$ топологию. Для этого рассмотрим последовательность открытых множеств $\{F_n\}$, обладающих следующими свойствами.

1. Граница F_n состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких гиперповерхностей; если F не содержит точки ∞, то ни одно из множеств F_n не содержит этой точки.

2. $\overline{F}_{n+1} \subset F_n$.

3. Если O — открытое множество, содержащее F, то найдется такой номер N, что при всех $n > N$, $F_n \subset O$.

Пусть $H(\overline{F}_n)$ есть совокупность всех кватернионных функций, праворегулярных в $\overline{F}_n$, равных нулю в точке ∞, если она принадлежит $\overline{F}$, и ограниченных там. Положим для $x(z) \subset H(\overline{F}_n)$

$$\|x\|_n = \sup_{z \in \overline{F}_n} |x(z)|.$$

Очевидно, что $H(\overline{F}_n) \subset H(\overline{F}_{n+1})$ и в силу принципа максимума модуля для праворегулярных кватернионных функций

$$\|x\|_n \geqslant \|x\|_{n+1}.$$

Нетрудно заметить, что

$$H(F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(\overline{F}_n).$$

Введем теперь в $H(F)$ топологию индуктивного предела последовательности его линейных подмножеств $H(F_n)$. $H(F)$ при этом превратится в линейное топологическое локально-выпуклое пространство.

Отметим следующие известные свойства пространств этого типа, нужные нам для дальнейшего.

1. Последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится в $H(F)$ тогда и только тогда, когда существует натуральное число N такое, что $\{x_n(z)\} \subset \subset H(F_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(z)$ существует в нормированном пространстве $H(F_n)$.

2. Линейный функционал ψ_0 непрерывен в $H(F)$ тогда и только тогда, когда он непрерывен в каждом из нормированных пространств $H(F_n)$.

Эти свойства приводятся, например, в монографии [5].

Рассмотрим произвольный правый модуль M_n над телом кватернионов. Будем говорить, что в модуле M_n задан правооднородный аддитивный функционал φ, если имеется закон соответствия, сопоставляющий каждому элементу этого модуля некоторый кватернион и удовлетворяющий условию

$$\varphi(x\alpha + y\beta) = \varphi(x)\alpha + \varphi(y)\beta. \tag{7}$$

Здесь α и β — постоянные кватернионы, x и y — произвольные элементы модуля M_n.

Пусть теперь M_L — произвольный левый модуль над телом кватернионов. Будем говорить, что в модуле M_L задан левооднородный аддитивный функционал ψ, если имеется закон соответствия, сопоставляющий каждому элементу этого модуля некоторый кватернион и удовлетворяющий условию

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y),$$

где α и β — постоянные кватернионы, x и y — произвольные элементы модуля M_L.

Пусть φ — правооднородный аддитивный функционал в M_n. Тогда для произвольного $x \in M_n$ можно записать

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + i\varphi_1(x) + j\varphi_2(x) + k\varphi_3(x),$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — действительные компоненты кватерниона $\varphi(x)$. Из соотношения (7) следует

$$\varphi(xi) = \varphi_0(xi) + i\varphi_1(xi) + j\varphi_2(xi) + k\varphi_3(xi) = \varphi(x)i = \varphi_0(x)i - \\ - \varphi_1(x) - \varphi_2(x)k + \varphi_3(x)j. \tag{8}$$

Из (8) получаем

$$\varphi_1(x) = -\varphi_0(xi).$$

Аналогичным образом можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\varphi_2(x) = -\varphi_0(xj),$$
$$\varphi_3(x) = -\varphi_0(xk).$$

Отсюда следует, что каждый правооднородный аддитивный функционал φ в правом модуле M_n однозначно определяется своей действительной частью по формуле

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - i\varphi_0(xi) - j\varphi_0(xj) - k\varphi_0(xk). \tag{8'}$$

Если рассматривать правый модуль M_n как линейное пространство над полем действительных чисел, то из соотношения (7) следует, что φ_0 — линейный функционал в этом пространстве.

Аналогичным образом можно показать, что каждый левооднородный аддитивный функционал ψ в левом модуле M_L также однозначно определяется своей действительной частью ψ_0 по формуле

$$\psi(x) = \psi_0(x) - i\psi_0(ix) - j\psi_0(jx) - k\psi_0(kx)$$

и что функционал ψ_0 линеен в пространстве над полем действительных чисел, соответствующим модулю M_L.

Пусть известно, что действительная часть φ_0 правооднородного аддитивного функционала φ в модуле M_n есть непрерывный функционал в соответствующем этому модулю линейном пространстве над полем действительных чисел. Тогда будем говорить, что функционал φ непрерывен в модуле M_n.

Аналогично определяется левооднородный аддитивный функционал, непрерывный в модуле M_L.

Можно проверить, что пространство $H(F)$ является левым модулем над телом кватернионов. Найдем общий вид левооднородного аддитивного функционала ψ, непрерывного в этом модуле.

Теорема 1. *Если ψ — левооднородный аддитивный функционал, заданный и непрерывный в $H(F)$ —, то существует функция $u(z)$, леворегулярная на множестве $\overline{E}_4/F$, равная нулю в бесконечно удаленной точке, если последняя принадлежит этому множеству, и такая, что какова бы ни была кватернионная функция $x(z) \in H(F)$, праворегулярная в $\overline{F}_n$,*

$$\psi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint\limits_{S_n} x(t)\,dZu(t) \tag{9}$$

(за направление внутренней нормали принимается направление в F_n), где S_n — граница F_u. Такая функция единственна.

Пусть кватернионная функция $u(z)$ леворегулярна во множестве E_u/F и обращается в нуль в точке ∞, если последняя принадлежит этому множеству. Этой функции соответствует в $H(F)$ левооднородный аддитивный непрерывный функционал, значение которого для всякой $x(z) \in H(F)$ и праворегулярной на множестве $\overline{F}_n$ вычисляется по формуле (9).

Доказательство. Пусть ψ — левооднородный аддитивный функционал, заданный и непрерывный в $H(F)$, $x(z)$ — кватернионная функция, принадлежащая $H(F)$ и праворегулярная на множестве $\overline{F}_n$. Из приведенных выше лемм следует, что для каждой точки $z \in \overline{F}_{n+1}$

$$x(z) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint\limits_{S} x(t)\,dZ\Delta_z[(t-z)^{-1}]. \tag{10}$$

Пусть

$$\sum_n (z) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(k)} x(t_k) Z(t_k) \Delta_z [(t_k - z)^{-1}] \operatorname{mes} \sigma_k$$

последовательность частных сумм интеграла (10). Можно показать, что эта последовательность равномерно сходится для всех $z \in \bar{F}_{n+1}$ к функции $x(z)$ при $n \to \infty$.

Так как функционал ψ непрерывен в пространстве $H(F)$, то по приведенному выше свойству (2) пространств подобного типа он будет непрерывен в пространстве $H(F_n)$. Поэтому имеет место соотношение

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(\Sigma_n(z)).$$

Вычислим последний предел. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi_t(z) = \Delta_z [(t - z)^{-1}].$$

Если точка t не принадлежит множеству F, то, очевидно, функция $\Phi_t(z)$ будет праворегулярна в некотором открытом множестве, содержащем F, а так как $\Phi_t(\infty) = 0$, если F содержит ∞, то

$$\Phi_t(z) \in H(F).$$

Функция

$$u(t) = \psi(\Phi_t(z)$$

определена в каждой точке открытого множества $\bar{E}_4/F$ и равна нулю в точке ∞, если она принадлежит этому множеству. Из непрерывности функционала ψ в $H(F)$ следует, что $u(t)$ леворегулярна в $\bar{E}_4/F$.

Пользуясь аддитивностью и левооднородностью функционала ψ, можно записать

$$\psi\left(\sum_n (z)\right) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{(k)} x(t_k) Z(t_k) \psi[\Delta_z [(t_k - z)^{-1}]] \operatorname{mes} \sigma_k.$$

Так как функционал ψ непрерывен в $H(F_{n+1})$, то

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\sum_n (z)\right) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint_{S_n} x(t)\, dZ \Delta_z [(t - z)^{-1}] = \psi(x).$$

Убедимся теперь в единственности функции $u(z)$. Предположим, что при любом $x \in H(F)$

$$\psi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint_{S_n} x(t)\, dZ u_1(t),$$

если $x(z)$ праворегулярна в $\bar{F}_n$ и $u_1(z)$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $z \in \bar{E}_u/F$. Тогда будем иметь в силу лемм 1 и 2

$$\psi[\Phi_z(t)] = -\frac{1}{8\pi^2} \iiint_{S_n} \Delta_z [(t - z)^{-1}]\, dZ u_1(t) = u_1(z) = u(z),$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь вторую часть сформулированной теоремы.

Пусть функция $x(z)$ из пространства $H(F)$ праворегулярна на множестве $\overline{F}_n$. Тогда она и подавно будет праворегулярна на множестве $\overline{F}_{n+1}$. Покажем, что если кватернионная функция $u(z)$ удовлетворяет требованиям второй части сформулированной теоремы, то

$$\iiint\limits_{S_n} x(t)\, dZu(t) = \iiint\limits_{S_{n+1}} x(t)\, dZu(t). \tag{11}$$

Действительно, множество F_n состоит по предположению из конечного числа областей. Внутри каждой области из системы областей, образующих F_n, содержится одна или несколько областей из системы областей, составляющих F_{n+1}. Пусть, например, область G_n из первой системы содержит области $G^1_{n+1}, \ldots, G^k_{n+1}$ из второй системы. В разности $G_n \Big| \bigcup\limits_{t=1}^{k} G^t_{n+1}$ функция $x(z)$ праворегулярна, а функция $u(z)$ леворегулярна. В силу леммы 1 получим, что интеграл вида (11) по системе гиперповерхностей, образующих границы областей G^t_{n+1}, $t = 1, 2 \ldots k$, равен интегралу того же вида по системе гиперповерхностей, образующих границу G_n. Проведя аналогичное рассуждение для каждой из областей, образующих F_n, и суммируя полученные результаты, мы придем к соотношению (11). Из этого соотношения легко следует для функции $x(z) \in H(F)$ и праворегулярной в $\overline{F}_n$

$$\iiint\limits_{S_n} x(t)\, dZu(t) = \iiint\limits_{S_{n+p}} x(t)\, dZu(t), \tag{12}$$

$$p = 1, 2 \ldots .$$

Из приведенных рассуждений следует, что указанный в условии теоремы закон соответствия сопоставляет каждому элементу $x \in H(F)$ единственный кватернион.

Левооднородность устанавливаемого соответствия очевидна. Покажем его аддитивность.

Пусть функции $x_1(z)$ и $x_2(z)$ принадлежат $H(F)$ и праворегулярны соответственно на множествах F_{n_1} и F_{n_2}. Тогда функция $x_1(z) + x_2(z)$ будет праворегулярна на множестве $\overline{F}_n$, где $n = \max(n_1 n_2)$. Поэтому

$$\psi(x_1 + x_2) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_n} [x_1(t) + x_2(t)]\, dZu(t) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_n} x_1(t)\, dZu(t) + \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_n} x_2(t)\, dZu(t).$$

В силу соотношения (12) получим отсюда

$$\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2), \tag{13}$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы показать непрерывность функционала (9) в $H(F)$, достаточно показать в силу приведенных выше свойств пространств подобного типа, что если последовательность функций $\{x_n\}$, принадлежащих $H(F)$ и праворегулярных в фиксированном F_n, удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(x_n) = 0$. Этот факт вытекает тривиальным образом из способа задания рассматриваемого функционала.

Следствие. *Пространство $A_0(E_4/F)$ всех кватернионных функций, леворегулярных в $\overline{E}_4/F$ и равных нулю в точке ∞, если последняя принадлежит рассматриваемому множеству, алгебраически изоморфно пространству всех левооднородных аддитивных функционалов в $H(F)$. Изоморфизм устанавливается следующим образом: с каждым таким функционалом ψ сопоставляется функция*

$$u(t) = \psi[\Delta_z[(t-z)^{-1}]].$$

Теорема 2. *Пусть φ — аддитивный правооднородный функционал, заданный и непрерывный в $A_0(\overline{E}_4/F)$. Тогда существует элемент $x \in H(F)$ такой, что каков бы ни был элемент $u \in A_0(\overline{E}_4/F)$*

$$\varphi(u) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint\limits_{S_n} x(t)\, dZ u(t)$$

(функция $x(z)$ праворегулярна в $\overline{F}_n$).

Пусть $x \in H(F)$ и праворегулярна в $\overline{F}_n$. Тогда закон соответствия, задаваемый формулой (13), *есть аддитивный правооднородный функционал, непрерывный в $A_0(\overline{E}_4/F)$.*

Направлением внутренней нормали в интеграле (13) *считается направление во множество $\overline{E}_4/F$.*

Доказательству сформулированной теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть M_n — произвольный правый модуль над телом кватернионов, $\overline{M}_n$ — его подмодуль. Предположим, что линейное пространство над полем действительных чисел, соответствующее этому модулю, нормировано. Тогда, если на $\overline{M}_n$ задан правооднородный аддитивный функционал, его можно продолжить с сохранением аддитивности, правооднородности и непрерывности на весь модуль M_n (предполагается, что в линейном пространстве над полем действительных чисел, соответствующем модулю M_n, топология индуцируется из M_n).*

Сформулированная лемма легко следует из известной теоремы Хана-Банаха о продолжимости линейного непрерывного функционала и из того, что всякий правооднородный аддитивный функционал однозначно определяется своей действительной частью по формуле (8′).

Замечание. Лемма (3) остается справедливой и в том случае, когда линейное пространство, соответствующее модулю M_n, является произвольным топологическим локально выпуклым пространством. Этот факт легко следует из теоремы 4 (2.XI) в [5].

Доказательство теоремы 2. Будем считать, что топология в $A(\overline{E}_4/F)$ задана с помощью последовательности открытых множеств $\overline{E}_4/F_n$.

Пусть φ — правооднородный аддитивный функционал, заданный и непрерывный в $A_0(\overline{E}_4/F)$. Тогда в силу свойства (2) пространств подобного типа найдется такой номер $N(\varphi)$, что этот функционал будет непрерывен по норме

$$\|u\|_{N(\varphi)} = \sup_{z\in\overline{E}_4/F} |u(z)|.$$

Рассмотрим множество $T_{n-1} = \bar{E}_4/F_{n-1}$. Это множество замкнуто в пространстве $\bar{E}_4$. Обозначим через $H(T_{n-1})$ множество кватернионных функций, леворегулярных в T_{n-1} и равных нулю в точке ∞, если последняя принадлежит этому множеству.

Пусть T_{n-1}^k — последовательность открытых множеств в пространстве $\bar{E}_4$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Множества T_{n-1}^k обладают свойствами (1—3) множеств F_n.

2. Границы множеств T_{n-1}^k принадлежат множеству $T_n/T_{n-1}^{\bullet}$. T_{n-1} совпадает с $\bar{E}_4/F_n$.

Пусть $H(T_{n-1}^k)$ обозначает нормированное пространство кватернионных функций, леворегулярных в $\bar{T}_{n-1}^k$, равных нулю в точке ∞, если она принадлежит T_{n-1}, и ограниченных в нем. Норму в этом пространстве введем по формуле

$$\|u\|_{T_{n-1}^k} = \max_{z \in T_{n-1}^k} |u(z)|.$$

В силу принципа максимума модуля для леворегулярных кватернионных функций

$$\|u\|_{T_{n-1}^{k+1}} \leqslant \|u\|_{T_{n-1}^k}. \tag{14}$$

Далее, очевидно, $H(T_{n-1}^k)$ является линейным подпространством пространства $H(T_{k-1})$ и $H(T_{n-1}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(T_{n-1}^k)$.

Введем в $H(T_{n-1})$ топологию индуктивного предела последовательности нормированных пространств $H(T_{n-1}^k)$. В силу аналога теоремы 1 для множества кватернионных функций, леворегулярных на замкнутом множестве T_{n-1} и обращающихся в нуль в точке ∞, если последняя принадлежит рассматриваемому множеству, всякий правооднородный функционал φ' непрерывный в $H(T_{n-1})$, имеет вид

$$\varphi'(u) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint_{S_{n-1}} x(t)\, dZu(t), \tag{15}$$

где функция $x(z)$ праворегулярна на множестве $\bar{E}_4/F_{n-1}$, леворегулярна на множестве T_{n-1}.

Рассмотрим пространство $H(T_{n-1}^1)$. Очевидно, что $A_0(\bar{E}_4/F)$ есть линейное подпространство этого пространства. Функционал φ, как это было указано ранее, непрерывен в этом подпространстве в топологии, индуцируемой в нем из $H(T_{n-1}^1)$. В силу леммы 3 его можно продолжить до аддитивного правооднородного функционала, непрерывного в $H(T_{n-1}^1)$.

$H(T_{n-1}^1)$, в свою очередь, есть линейное подпространство $H(T_{n-1}^2)$. Из соотношений (14) следует, что полученный выше в $H(T_{n-1}^1)$ функционал будет там непрерывен и в топологии, индуцированной из $H(T_{n-1}^2)$. Продолжаем его до аддитивного правооднородного функционала непрерывного в $H(T_{n-1}^2)$.

Продолжая этот процесс, мы получим аддитивный правооднородный функционал, непрерывный в каждом из пространств $H(T^k_{n-1})$ и совпадающий с функционалом φ на множестве $A_0(\bar{E}_4/F)$. Обозначим этот функционал через φ'.

В силу указанного выше свойства (2) индуктивного предела последовательности нормированных пространств, функционал φ' непрерывен в пространстве $H(T_{n-1})$. Следовательно, его значение на любой функции из $A_0(\bar{E}_4/F)$ определяется соотношением (15). Из этого соотношения в силу леммы 1 получим

$$\varphi'(u) = \varphi(u) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint_{S_n} x(t)\, dZu(t),$$

что и требовалось доказать.

Вторая часть теоремы 2 доказывается следующим образом: аддитивность и правооднородность функционала, определенного формулой (13), устанавливается непосредственной проверкой, а непрерывность его следует из того, что действительная часть этого функционала будет ограничена, например, в пространстве B^1_N.

Теоремы 1, 2 составляют содержание кватернионного аналога принципа двойственности. Ниже мы укажем некоторые приложения его в теории регулярных кватернионных функций.

Прежде всего заметим, что из известной теоремы Рисса следует

Лемма 4. *Пусть F — замкнутое множество в пространстве E_4 и $C(F)$ — пространство кватернионных функций, непрерывных на F. Тогда всякий левооднородный аддитивный функционал φ, заданный и непрерывный в $C(F)$, имеет вид*

$$\varphi(f) = \iiiint_F f d\mu,$$

где $d\mu = d\mu_0 + i d\mu_1 + j d\mu_2 + k d\mu_3$; $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ — *действительные функции множества на F, имеющие ограниченную вариацию.*

Теорема 3. *Для того чтобы функция $u(z) \in A_0(\bar{E}_4/F)$ была представима интегралом типа Коши—Стильтьеса*

$$u(z) = \iiiint_F \Delta_t[(z-t)^{-1}]\, d\mu,$$

необходимо и достаточно, чтобы функционал (9), порожденный этой функцией, был непрерывен по норме пространства непрерывных функций в подмножестве $C(F)$, состоящем из функций, принадлежащих $H(F)$. (Предполагается, что множество F есть множество единственности для регулярных кватернионных функций).

Необходимость

$$\varphi(f) = \frac{1}{8\pi^2}\iiint_{S_n} f(t)\, dZu(t) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\iiint_{S_n} f(t)\, dZ \iiiint_F \Delta_t[(y-t)^{-1}]\, d\mu_y =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\iiiint_F \left[\iiint_{S_n} f(t)\, dZ\Delta_t[(y-t)^{-1}]\, d\mu_y\right] = \iiiint_F f(y)\, d\mu_y.$$

Отсюда следует

$$|\varphi(f)| \leqslant \|f(z)\|_{C(F)} \operatorname{var} \mu,$$

что и дает непрерывность функционала φ в рассматриваемом множестве.

Достаточность. На основании леммы 3 распространим функционал φ с сохранением левооднородности, аддитивности и непрерывности на все пространство $C(F)$. Тогда будем иметь

$$u(z) = \varphi(\Delta_t (z-t)^{-1}) = \iiint\limits_F \Delta_t [(z-t)^{-1}]\, d\mu,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть кватернионная функция $u_1(z)$ леворегулярна при $|z| < 1$, $u_2(z)$ — леворегулярна при $|z| > 1$, $u_2(\infty) = 0$. Тогда если*

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_1} \left| u_1(rt) - u_2\left(\frac{1}{r} t\right) \right| dS < \infty,$$

то

$$u_k(z) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_1} \Delta_t [(z-t)^{-1}]\, d\mu \quad k = 1, 2,$$

где S_1 — единичная гиперсфера.

Доказательство. Обозначим через S_r гиперсферу радиуса r с центром в начале координат. В качестве множества F здесь естественно взять множество S_1. Функцию $u(z)$ положим равной внутри S_1 — $u_1(z)$, вне S_1 — $u_2(z)$. Пусть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ и последовательность $r_n \to 1$. Пусть F_N — область между гиперсферами S_{r_N} и $S_{\frac{1}{r_N}}$. Тогда функционал ψ, порожденный функцией $u(z)$ в $H(S_1)$ на произвольной $f \in H(S_1)$ и праворегулярной в F_N, принимает значение

$$\psi(f) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_{\frac{1}{r_N}}} f(t)\, dZu(t) - \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_{r_N}} f(t)\, dZu(t).$$

Наряду с функционалом ψ рассмотрим функционал ψ_{r_n}, определяемый соотношением (при $n > N$)

$$\psi_{r_n}(f) = \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_{\frac{1}{r_N}}} F_1(t)\, dZu(t) - \frac{1}{8\pi^2} \iiint\limits_{S_{r_n}} F_2(t)\, dZu(t),$$

где

$$F_1(t) = f\left(\frac{1}{r_n} \frac{t}{|t|}\right), \qquad F_2(t) = f\left(r_n \frac{t}{|t|}\right);$$

при $n \leqslant N$ $\psi_{r_n}(f) = 0$.

Можно показать, что для любой $f \in H(S_1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{r_n}(f) = \psi(f)$. Так как все ψ_{r_n} равномерно ограничены по норме $C(S_1)$, то функционал ψ будет так же ограничен по этой норме. Из одного результата Р. Фютера (см. [8]) следует, что S_1 является множеством единственности для регулярных кватернионных функций. В силу теоремы 3 функция $u(z)$ представима интегралом типа Коши—Стильтьеса, что и требовалось доказать.

Доказанные выше теоремы 3 и 4 обобщают некоторые результаты В. П. Хавина и Г. Ц. Тумаркина, полученные ими в работах [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Köthe. Dualität in der Funktionentheorie. Jour Reine und Ang. Math. Bd. 191, 1953.
2. А. И. Маркушевич. О базисе в пространстве аналитических функций. «Матем. сб.», 17 (59), 211—245, 1945.
3. R. Fueter. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta U=0$ und $\Delta\Delta U=0$ mit vier reellen variablen. Com. Math. Helv. т. 1. 307—330, 1935.
4. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматиз, М., 1959.
6. В. П. Хавин. Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши—Стильтьеса. «Вестн. ЛГУ» № 1, 66—79, 1958.
7. Г. Ц. Тумаркин. Об интегралах типа Коши—Стильтьеса. «Усп. матем. наук», 11 : 4 (70), 163—166, 1956.
8. R. Fueter. Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Monatshefte für Math. und Phys. Bd. 43, 69—74, 1936.
9. R. Fueter. Die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comptes Rendus du Congress international des mathematiciens. (Oslo), т. 1, 75—91, 1936.

Поступила 16 марта 1966 г.