ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

И. Г. Альперин

(Харьков)

Уравнения теории упругости при не зависящих от времени граничных условиях, как известно, допускают решения, которые также не зависят от времени. Этим решениям должны отвечать стационарные состояния равновесия твердого тела.

Но, как показывают опыты, механическое состояние твердого тела при условиях, которым соответствуют указанные решения уравнений теории упругости, в действительности не стационарны. Так, если твердое тело, деформация которого не стеснена связями, подвергнуто действию постоянных сил и колебание его исключено, то смещения точек этого тела не остаются постоянными, а все время изменяются. Это явление носит название ползучести твердых тел.

Аналогично, если на некоторое время зафиксировать поверхностные смещения твердого тела с помощью стационарных связей, то реакции этих связей не сохраняют в действительности свои значения постоянными, а изменяются во времени. Это так называемая релаксация напряжений в твердых телах.

Оба явления, сопровождающие всякую деформацию, становятся особенно заметными, если тело находится в условиях высокой температуры, как например, лопатки паровых турбин, крепежные элементы печей и химических аппаратов и т. п. Поэтому они в последнее время приобрели технический интерес и привлекли к себе внимание исследователей.

Однако до настоящего времени, по-видимому, не существует достаточно удовлетворительной теории этих явлений *.

Среди различных попыток построения теории имеются попытки [1—9] описать указанные явления с помощью линейной (и нелинейной) теории упругой наследственности Больцмана [10].

Первые исследования в области теории упругой наследственности принадлежат В. Вольтерра. В двух последовавших вслед за его общей теорией интегро-дифференциальных уравнений [13] работах [11 и 12], он сформулировал задачу о «медленном» движении упругой изотропной среды, обладающей линейной наследственностью. Сведя задачу к системе интегро-дифференциальных уравнений, Вольтерра доказал теорему единственности для этой системы и получил решение, аналогичное известному в теории упругости решению Бетти (см. [20]).

Впоследствии к этой теории обратились снова, как мы отмечали, в связи с явлениями ползучести и релаксации. Заметим кстати, что явление линейной ползучести без релаксации описывается так называемой упруго-вязкой моделью Фойхта-Томсона [5 и 8]. Явление линейной ре-

* О состоянии теории см. [6—9].

лаксации без учета «вязкости» описывается моделью Максвелла [5, 8]. Объединение обеих моделей приводит к среде с некоторым частным видом наследственности.

Однако работа самого Вольтерра и работы большинства последующих исследователей касались главным образом только задачи о «медленном» движении такого рода сред, точнее, о таком движении, что в его уравнениях можно пренебречь силами инерции среды и свести их к более простым уравнениям равновесия. При этом время приобретает роль простого параметра.

Что же касается произвольного движения такого рода сред, то автору известно сравнительно небольшое число работ, посвященных этой общей задаче.

По-видимому, одна из первых работ в этом направлении принадлежит А. Ю. Ишлинскому [15]. В ней рассмотрены некоторые задачи продольных колебаний стержней.

Настоящая работа посвящена некоторым другим задачам подобного рода. Она состоит из трех параграфов. В первом из них проведены некоторые общие рассмотрения вопроса о движении среды Больцмана, сформулирована задача и получены некоторые общие предложения, касающиеся ее решения.

Второй и третий параграфы посвящены решению конкретных задач о продольных и поперечных колебаниях стержней при тех же предположениях о свойствах материала, которые были приняты в упомянутой работе [15].

Автор приносит сердечную благодарность Н. С. Ландкофу, который прочитал рукопись и сделал ряд ценных замечаний.

1. Общие уравнения изотропной упругой среды, обладающей наследственностью

Закон Больцмана для изотропной упругой среды можно представить в следующем виде (см., например [11]):

$$Eu_{ik} = (1+\nu)\, p_{ik} - \nu p_{ll}\delta_{ik} + \int_0^t K_1(t-\tau)\, p_{ik}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \delta_{ik}\int_0^t K_2(t-\tau)\, p_{ll}(\tau)\, d\tau, \tag{1.1}$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где u_i — вектор смещения точек среды, $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ — тензор малых деформаций ее, p_{ik} — тензор напряжения, E и ν — упругие постоянные, δ_{ik} — символ Кронекера, а $K_i(t)$ и $K_2(t)$ — так называемые функции наследственности, которые мы будем называть ядрами системы (1.1).

При этом предполагается, что указанная среда в течение длительного времени до момента $t=0$ не подвергалась сколько-нибудь заметному механическому воздействию, так что к указанному моменту $t=0$ пришла в состояние, достаточно близкое к так называемому «естественному» состоянию покоя, т. е. к такому, что

$$u_i(0) = 0; \quad \frac{\partial u_i(0)}{\partial t} = 0; \quad u_{ik}(0) = 0; \quad p_{ik}(0) = 0.$$

---

* Впоследствии появились работы Е. Вольтерра [26 и 28], о которых автор узнал после того, как настоящая работа была подготовлена к печати. Поэтому они не получили в ней должного отражения.

В момент же $t=0$ данный объем этой среды (тело) с помощью некоторой системы сил был выведен из этого состояния и приведен в движение, в процессе которого имеет место (1.1) и которое подлежит исследованию.

Если к действию сил для общности добавить, начиная с $t=0$, действие температуры T, то (1.1), очевидно, приобретет вид

$$E(u_{ik}-\alpha T\delta_{ik})=(1+\nu)\,p_{ik}-\nu p_{ll}\delta_{ik}+\int\limits_0^t K_1(t-\tau)\,p_{ik}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\delta_{ik}\int\limits_0^t K_2(t-\tau)\,p_{ll}(\tau)\,d\tau, \tag{1.2}$$

где $\alpha>0$ — коэффициент линейного расширения среды. При этом предполагается, что ядра таковы, что система (1.2) однозначно разрешима относительно p_{ik}.

Условия, которые мы наложили на значения входящих в (1.2) функций при $t=0$, а также вид уравнений (1.2) позволяет считать, что все эти функции, в том числе и температура T, а также и ядра $K_1(t)$ и $K_2(t)$, равны нулю для всякого $t<0$.

При этих условиях становится возможным применение одностороннего преобразования Лапласа. Но тогда необходимо предварительно уточнить ограничения, которым должны быть для этой цели подвергнуты рассматриваемые функции.

Обычно предполагают, что ядра $K_1(t)$ и $K_2(t)$ являются положительными убывающими функциями времени. Для наших целей достаточно предположить, что интегралы Лапласа от них, их так называемые L-преобразования

$$k_1(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}K_1(t)\,dt=L\{K_1\}$$

$$k_2(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}K_2(s)\,dt=L\{K_2\}$$

сходятся абсолютно*.

Далее принимаем, что тем же свойством обладают

$$\overline{T}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}T(t)\,dt$$

и

$$u_{ik}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}u_{ik}(t)\,dt.$$

Займемся теперь решением (1.2) относительно p_{ik}. Для этой цели свернем (1.2) по i и k. Мы получим

$$E(u_{ll}-3\alpha T)=(1-2\nu)\,p_{ll}+\int\limits_0^t[K_1(t-\tau)+3K_2(t-\tau)]\,p_{ll}(\tau)\,d\tau, \tag{1.3}$$

* Напомним,— говорят, что $L\{f(t)\}$ сходится абсолютно, если для некоторого вещественного s_0

$$\int\limits_0^\infty e^{-s_0t}\,|\,f(t)\,|\,dt<\infty.$$

что можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра относительно неизвестной функции $p_{ll}(t)$ с ядром $K(t-\tau)=K_1(t-\tau)+3K_2(t-\tau)$. Очевидно, что функция

$$k(s)=k_1(s)+3k_2(s)$$

является L-преобразованием $K(t)$, которое сходится абсолютно.

Но тогда можно утверждать [17, стр. 282], что единственным решением уравнения (1.3) является функция $p_{ll}(t)$, L-преобразование которой сходится абсолютно и равно

$$\bar{p}_{ll}(s)=\frac{E}{1-2\nu}(\bar{u}_{ll}-3\alpha\bar{T})(1-q_3(s)), \tag{1.4}$$

где

$$q_3(s)=\frac{k_1(s)+3k_2(s)}{1-2\nu+k_1(s)+3k_2(s)} \tag{1.5}$$

является абсолютно сходящимся L-преобразованием резольвенты $Q_3(t)$ уравнения (1.3).

Считая теперь, что $p_{ll}(t)$ — известная функция t, можно рассматривать (1.2) как уравнение Вольтерра относительно $p_{ik}(t)$ с ядром $K_1(t-\tau)$.

Аналогично предыдущему справедливо следующее утверждение. Единственное решение системы (1.2) имеет абсолютно сходящееся L-преобразование, которое, учитывая (1.4) можно записать так:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{ik}(s)&=\frac{E(\bar{u}_{ik}-\alpha\bar{T}\delta_{ik})+(\nu-k_2)\bar{p}_{ll}\delta_{ik}}{1+\nu+k_1}=\frac{E}{1+\nu}(1-q_2)\bar{u}_{ik}+\\&+\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-q_1)\bar{u}_{ll}\delta_{ik}-\delta_{ik}\frac{E\alpha}{1-2\nu}\bar{T}(1-q_3),\end{aligned} \tag{1.6}$$

где

$$q_3(s)=\frac{k_1(s)+3k_2(s)}{1-2\nu+k_1(s)+3k_2(s)} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned}q_2(s)&=\frac{k_1(s)}{1+\nu+k_1(s)}\\ q_1(s)&=\frac{(1+\nu)q_3-(1-2\nu)q_2}{3\nu}\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

являются абсолютно сходящимися L-преобразованиями функций $Q_3(t)$, $Q_2(t)$ и $Q_1(t)$ соответственно.

Теперь решение уравнения (1.2) очевидно*:

$$\begin{aligned}p_{ik}&=\lambda u_{ll}\delta_{ik}+2\mu u_{ik}-\alpha(3\lambda+2\mu)T\delta_{ik}-\lambda Q_1{}^*u_{ll}\delta_{ik}-\\&-2\mu Q_2{}^*\,u_{ik}+\alpha(3\lambda+2\mu)Q_3{}^*\,T\delta_{ik},\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $2\mu=\frac{E}{1+\nu}$ — известные упругие постоянные Лямэ.

Вместе с основными соотношениями (1.2), (1.3) и (1.8) мы будем часто пользоваться их L-преобразованиями, для написания которых введем следующие обозначения:

$$n(s)=\frac{\nu-k_2(s)}{1+k_1(s)+k_2(s)},\quad \mathrm{E}(s)=\frac{E}{1+k_1(s)+k_2(s)}; \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\Lambda(s)&=\frac{\mathrm{E}(s)\,n(s)}{[1+n(s)][1-2n(s)]}=\\&=\frac{E(\nu-k_2)}{(1+\nu+k_1)(1-2\nu+k_1+3k_2)}=\lambda[1-q_1(s)]\\ 2M(s)&=\frac{\mathrm{E}(s)}{1+n(s)}=\frac{E}{1+\nu+k_1(s)}=2\mu[1-q_2(s)]\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

---

* Здесь и в дальнейшем обозначено $f_*\varphi=\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=\int_0^t\varphi(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$.

Относительно этих функций заметим, что хотя они и не служат L-преобразованиями каких-нибудь функций от t*, но они являются, очевидно, аналитическими функциями, регулярными в некоторой полуплоскости $Re s \geqslant s_0$, вещественными на вещественной оси и при $Re s \to \infty$

$$n(s) \to \nu, \ \mathrm{E}(s) \to E, \ L(s) \to \lambda, \ M(s) \to \mu. \tag{1.11}$$

Теперь L-преобразования основных соотношений (1.2), (1.8) и (1.4) можно записать следующим образом:

$$\overline{u}_{ik}(s) = \frac{1+n(s)}{\mathrm{E}(s)} \overline{p}_{ik}(s) - \frac{n(s)}{\mathrm{E}(s)} \overline{p}_{ll}(s)\,\delta_{ik} + \alpha \overline{T}(s)\,\delta_{ik}; \tag{1.12}$$

$$\overline{p}_{ik}(s) = L(s)\,\overline{u}_{ll}(s)\,\delta_{ik} + 2M(s)\,\overline{u}_{ik}(s) - \alpha\,[3L(s) + 2M(s)]\,\overline{T}(s)\,\delta_{ik}; \tag{1.13}$$

$$\overline{p}_{ll}(s) = \frac{\mathrm{E}(s)}{1-2n(s)}[\overline{u}_{ll}(s) - 3\alpha\,\overline{T}(s)] = [3L(s) + 2M(s)]\,[\overline{u}_{ll}(s) - 3\alpha T(s)]. \tag{1.14}$$

Эти формулы отличаются от закона Гука только тем, что вместо обычных упругих постоянных здесь стоят аналитические функции от комплексного переменного s.

Рассмотрим теперь некоторый объем Ω среды, описанного выше типа, ограниченный замкнутой гладкой поверхностью σ, заданной уравнением

$$x = x_\sigma(u, v),$$

($x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки пространства, а u и v — параметры), который до момента $t = 0$ находится в «естественном» состоянии покоя.

Пусть, начиная с этого момента, под действием заданных объемных сил $f_i = f_i(x, t)$, температуры $T = T(x, t)$ $(x \in \Omega)$ и поверхностных сил $p_{ik}^{(n)} = p_i^{(n)}(x, t)$ $(x \in \sigma)$, этот объем среды стал совершать малые колебания около указанного состояния покоя. Тогда смещения $u_i(x, t)$ точек среды $(x \in \Omega)$ и напряжения $p_{ik}(x, t)$ в этих точках должны удовлетворять:

а) уравнениям движения

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \tag{1.15}$$

(где x_k — координаты точек среды в положении покоя, ρ — плотность среды, полагаемая постоянной), а также соотношениям (1.2) или (1.8), связывающим между собой компоненты напряжения p_{ik} с компонентами деформации $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$;

б) начальным условиям $(t = 0)$

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{u}_i^0(x); \tag{1.16}$$

в) граничным условиям, которые в общем случае состоят в том, что на одной части поверхности — σ_1 заданы поверхностные силы

$$p_i^{(n)} = p_i^{(n)}(x, t) \quad (x \in \sigma_1), \tag{1.17}$$

а на второй — σ_2 $(= \sigma - \sigma_1)$ — смещения

$$u_i = \varphi_i(x, t) \quad (x \in \sigma_2), \tag{1.18}$$

где предполагается, что $p_i^{(n)}(x, t)$ и $\varphi_i(x, t)$ — непрерывны при $t > 0$

* Они не удовлетворяют необходимому для этого условию стремления к нулю при $Re\,S \to \infty$.

на тех частях поверхности σ, где они определены, а на границах указанных областей могут иметь лишь разрывы первого рода.

Уравнение (1.15) совместно с соотношениями (1.2) или (1.8) образуют систему девяти уравнений относительно девяти неизвестных функций: вектора смещения $u_i(x, t)$ и тензора напряжения $p_{ik}(x, t)$.

Мы будем рассматривать только такие решения $u_i(x, t)$ и $p_{ik}(x, t)$ этой системы, которые удовлетворяют следующим условиям: при всех $t > 0$ и $x \in \overline{\Omega}$ $p_{ik}(x, t)$ — один раз, а $u_i(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и

$$|u_i(x, t)| \leqslant Me^{\gamma t}, \quad |u_{ik}(x, t)| \leqslant Me^{\gamma t},$$

где M — положительно, а γ — вещественная постоянная.

При указанных условиях докажем теорему единственности решения полученной системы уравнений* в следующем виде.

Не существует двух различных решений системы (1.15) и (1.8) при одинаковых объемных силах f_i и температурах T, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям (1.16) и граничным условиям (1.17) и (1.18).

Для доказательства, как обычно, предположим обратное. Пусть $U_i(x, t)$ и $P_{ik}(x, t)$ — вектор смещения и тензор напряжения, отвечающие разности этих решений. Эти функции должны удовлетворять:

а) уравнениям движения при отсутствии объемных сил и температуры

$$\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \tag{1.15'}$$

и соотношениям

$$P_{ik} = \lambda U_{ll}\delta_{ik} + 2\mu U_{ik} - \lambda Q_1 * U_{ll}\delta_{ik} - 2\mu Q_2 * U_{ik}; \tag{1.8'}$$

б) начальным условиям

$$U_{ik}(x, 0) = 0, \quad \dot{U}_i(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1.16'}$$

и

в) граничным условиям $(t > 0)$

$$P_i^{(n)}(x, t) = 0 \quad x \in \sigma_1; \tag{1.17'}$$

$$U_i(x, t) = 0 \quad x \in \sigma_2. \tag{1.18'}$$

Введем вспомогательные функции

$$V_i(x, t) = \int_0^t U_i(x, \tau)\, d\tau. \tag{1.21}$$

Тогда, очевидно, ввиду непрерывности $U_i(x, t)$,

$$\dot{V}_i \equiv \frac{\partial V_i}{\partial t} = U_i(x, t), \quad V_{ik} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right) = \int_0^t U_{ik}(x, \tau)\, d\tau,$$

вследствие (1.16')

$$V_i(x, 0) = 0, \ \dot{V}_i(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \tag{1.16''}$$

и вследствие (1.18')

$$V_i(x, t) = \int_0^t U_i(x, \tau)\, d\tau = 0 \quad x \in \sigma_2, \quad t > 0. \tag{1.18''}$$

---

* Аналогичную теорему для случая равновесия доказал Вольтерра [12].

Теперь очевидно, что (n_k — орт нормали к поверхности σ)

$$0=\iint\limits_{\sigma_1+\sigma_2} P_i^{(n)} * V_i d\sigma=\iint\limits_{\sigma} P_{ik} n_k * V_i d\sigma=\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(P_{ik} * V_i\right) d\Omega=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} * V_i d\Omega+\iiint\limits_{\Omega} P_{ik} * \frac{\partial V_i}{\partial x_k} d\Omega=\iiint\limits_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} * V_i d\Omega+$$

$$+\iiint\limits_{\Omega} P_{ik} * V_{ik} d\Omega. \tag{1.22}$$

Так как $|U_i(x, t)| \leqslant M e^{\gamma t}$ и $|U_{ik}(x, t)| \leqslant M e^{\gamma t}$ $(t>0, x \in \bar{\Omega})$, то очевидно, что $L\{U_i\}$ и $L\{U_{ik}\}$, а также $L\{V_i\}$ и $L\{V_{ik}\}$ сходятся в полуплоскости $ReS>\gamma$ абсолютно и равномерно по $x \in \bar{\Omega}$.

Очевидно также, что

$$L\{V_i\}=\frac{\bar{U}_i(x, s)}{s}, \quad L\{V_{ik}\}=\frac{\bar{U}_{ik}(x, s)}{s},$$

где

$$\bar{U}_i(x, s)=L\{U_i\}, \quad \bar{U}_{ik}(x, s)=L\{U_{ik}\}.$$

Как было доказано выше, при этих же предположениях относительно U_{ik} существует $L\{P_{ik}\}=\bar{P}_{ik}(x, s)$, которое определяется из соотношения (1.8) и которое сходится в некоторой полуплоскости $Re\, s>\beta \geqslant \gamma$ абсолютно и, как нетрудно проверить, равномерно по $x \in \Omega$.

Поэтому, согласно известной теореме о свертках [17, стр. 163], сходится в той же полуплоскости $Re\, s>\beta \geqslant \gamma$

$$L\{P_{ik} * V_{ik}\}=\frac{\bar{P}_{ik} \bar{U}_{ik}}{s},$$

притом абсолютно и, как это также нетрудно проверить, равномерно по $x \in \bar{\Omega}$.

Но тогда можно изменить порядок интегрирования [18, § 1.84] и мы найдем, что в полуплоскости $Re\, s>\beta \geqslant \gamma$ сходится

$$L\left\{\iiint\limits_{\Omega} P_{ik} * V_{ik} d\Omega\right\}=\iiint\limits_{\Omega} L\{P_{ik} * V_{ik}\} d\Omega=\iiint\limits_{\Omega} \frac{\bar{P}_{ik}(x, s) \cdot \bar{U}_{ik}(x, s)}{s} d\Omega,$$

то-есть, что второй интеграл в правой части (1.22) допускает L-преобразование.

И так как равенство (1.22) тождественно по $t>0$, то такое же преобразование допускает и первый интеграл.

Таким образом, из (1.22) следует, что для любого s, $Re\, s>\beta$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial U^2{}_i}{\partial t^2} * V_i d\Omega\right) dt=-\int_0^{\infty} e^{-st} dt \iiint\limits_{\Omega} P_{ik} * V_{ik} d\Omega=$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega} \frac{\bar{P}_{ik}(x, s) \bar{U}_{ik}(x, s)}{s} d\Omega. \tag{1.23}$$

Для того чтобы можно было изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} * V_i d\Omega\right) dt$$

достаточно [18, § 1. 84] доказать, что

$$\int_0^\infty \frac{\partial U_i}{\partial t^2} * V_i e^{-s_0 t}\, dt$$

сходится равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ для некоторого $s_0 \geqslant \beta$ *.

Для этой цели заметим, что

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} * V_i \equiv \int_0^t V_i(t-\tau)\frac{\partial^2 U_i}{\partial \tau^2}\, d\tau = \frac{\partial U_i}{\partial \tau} V_i(t-\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{\partial [V_i(t-\tau)]}{\partial \tau}\frac{\partial U_i}{\partial \tau}\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{\partial V_i}{\partial t}\right)_{t=t-\tau}\frac{\partial U_i}{\partial \tau}\, d\tau = \int_0^t \dot{U}_i(t-\tau)\, U_i(\tau)\, d\tau \equiv \dot{U}_i * U_i. \tag{1.24}$$

Далее, из того что

$$\int_0^T e^{-s_0 t}\, \dot{U}_i dt = e^{-s_0 t} U_i \Big|_0^T + s_0 \int_0^T e^{-s_0 t} U_i(x, t)\, dt$$

и что $|U_i| \leqslant M e^{\gamma t}$ при $t > 0$ следует, что для всякого $s_0 > \gamma$ сходится

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}\dot{U}_i(x, t)\, dt = s_0 \int_0^\infty e^{-s_0 t} U_i(x, t)\, dt \equiv s_0 \overline{U}_i(x, s_0),$$

притом равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ (не обязательно абсолютно).

Но тогда легко показать, что для того же s_0 сходится также

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}\, \dot{U}_i * U_i dt = s_0 \overline{U}_i^2(x, s_0).$$

а также равномерно по $x \in \overline{\Omega}$**.

---

* Тогда интеграл будет сходиться для любого s, $Re\, s \geqslant s_0$ [17].

** Сходимость $L\{\dot{U}_i * U_i\}$ следует из известной теоремы Амерно [17, стр. 165], так как $L\{U_i\}$ сходится абсолютно. Равномерная же (по x) сходимость, вообще говоря, не обязательна, но в нашем случае имеет место. Действительно, согласно теореме Америо

$$\int_0^\infty e^{-s_0 t}\int_0^t U_i(t-\tau)\, U_i(\tau)\, dt = s_0 \int_0^\infty e^{-s_0 t} U_i(t)\, dt \int_0^\infty e^{-s_0 \tau} U_i(t)\, d\tau,$$

где $s_0 > \gamma$. С другой стороны, легко проверить, что

$$\int_0^T e^{-s_0 t}\left(\int_0^t \dot{U}_i(t-\tau)\, U_i(\tau)\, dt\right) dt = e^{-s_0 T}\int_0^T U_i(T-t)\, U_i(t)\, dt +$$

$$+ s_0 \int_0^T e^{-s_0 t} U_i(t)\, dt \int_{T-t}^\infty e^{-s_0 t} U_i(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда

$$\left|\int_T^\infty e^{-s_0 t}\left(\int_0^t \dot{U}_i(t-\tau)\, U_i(\tau)\, d\tau\right) dt\right| \leqslant \left| e^{-s_0 T}\int_0^T U_i(T-t)\, U_i(t)\, dt \right| +$$

$$+ |s_0|\left|\int_0^T e^{-s_0 t} U_i(t)\, dt \int_{T-t}^\infty e^{-s_0 \tau} U_i(\tau)\, d\tau\right| + |s_0|\left|\int_T^\infty e^{-s_0 \tau} U_i(t)\, dt \int_0^\infty e^{-s_0 \tau} U_i(\tau)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant M^2 e^{-(s_0-\gamma)T} T + \frac{M^2 |s_0|}{s_0-\gamma} e^{-(s_0-\gamma)T} T + \frac{M^2 |s_0|}{(s_0-\gamma)^2} e^{-(s_0-\gamma)T} = \varepsilon(T)$$

и правая часть не зависит от x.

Таким образом, если учесть (1.24), то мы доказали, что

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} * V_i e^{-s_0 t}\, dt$$

сходится равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ и, значит, можно изменить порядок интегрирования в указанном выше интеграле в левой части (1.23).

Вместо равенства (1.23) теперь можно написать другое:

$$\iiint_\Omega \left\{\rho S \overline{U}_i^2 (x, s) + \frac{1}{s} \overline{P}_{ik} (x, s) \overline{V}_{ik} (x, s)\right\} d\Omega = 0,$$

справедливое в полуплоскости $Re\, s > \beta \geqslant \gamma$. Подставляя сюда вместо $\overline{P}_{ik}$ его значение, соответствующее (1.8), которое получается из (1.13), если там положить $T = 0$,

$$\overline{P}_{ik} = L (s) \overline{U}_{ll} \delta_{ik} + 2M (s) \overline{U}_{ik},$$

откуда

$$\overline{V}_{ik} \overline{P}_{ik} = \frac{1}{s} \overline{U}_{ik} \overline{P}_{ik} = \frac{1}{s} \left[L (s) \overline{U}_{ll}^2 + 2M (s) \overline{U}_{ik}^2\right],$$

мы получим

$$\iiint_\Omega \left\{ \rho s \overline{U}_i^2 + \frac{1}{s^2} \left[L (s) \overline{U}_{ll}^2 + 2M (s) \overline{U}_{ik}^2\right]\right\} d\Omega = 0. \tag{1.25}$$

Из (1.11) следует, что существует $s_0 > 0$ такое, что для всех вещественных $s \geqslant s_0$ $L (s) > 0$, $M (s) > 0$. Далее очевидно, что $\overline{U}_i (x, s)$ и $\overline{U}_{ik} (x, s)$ регулярны в полуплоскости $Re\, s > \gamma$. Так как, кроме того, преобразование Лапласа вещественно на вещественной оси, то из (1.25) вытекает, что аналитические в полуплоскости $Re\, s > \gamma$ функции $\overline{U}_i (x, s)$ и $\overline{U}_{ik} (x, s)$ равны нулю на всей полуоси $s \geqslant \max (\delta, \gamma)$, откуда следует, что $\overline{U}_i (x, s) \equiv 0$, $\overline{U}_{ik} (x, s) \equiv 0$, а значит и $\overline{P}_{ik} (x, s) \equiv 0$, что и доказывает единственность.

Систему уравнений (1.20) и (1.2) или (1.8) можно, следуя Вольтерра [12], свести к системе трех интегро-дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещения. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \left[\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} - (Q_1 + Q_2) * \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i}\right] + \mu \left[\Delta u_i - Q_1 * \Delta u_i\right] - \\ - \alpha \left[(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial T}{\partial x_i} - (3\lambda Q_1 + 2\mu Q_2) * \frac{\partial T}{\partial x_i}\right] + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

К ним добавляются начальные условия (1.16) и граничные условия, получаемые из (1.17) и (1.18).

Системе уравнений (1.26) при условиях (1.16) будет формально отвечать система L-преобразованных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned}[L (s) + M (s)] \frac{\partial \overline{u}_{ll}}{\partial x_i} + M (s) \Delta \overline{u}_i - \alpha [3L (s) + 2M (s)] \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} + \overline{f}_i = \\ = p s^2 \left[\overline{u}_i - \overline{u}_i^0 - \frac{\dot{u}_0}{s}\right],\end{aligned} \tag{1.27}$$

при условиях на границе $x \in \sigma$:

$$\left.\begin{array}{ll} x \in \sigma_1 & \overline{p}_{ik} n_k = \overline{p}_{ik}^{(n)} (x, s) \\ x \in \sigma_2 & \overline{u}_i = \varphi_i (x, s) \end{array}\right\}, \tag{1.28}$$

где $\overline{p}_{ik}$ дано в (1.13). Эта система будет эквивалентна предыдущей, если все проведенные для перехода к (1.27) и (1.28) операции законны *.

Решение системы (1.27) можно записать в виде

$$\overline{u}_i(x, s) = \psi_i[x, s, L(s), M(s),$$

и так как $\overline{u}_i(x, s)$ являются регулярными функциями от s полуплоскости $Re\, s > \alpha$, то достаточно определить их на любом сколь угодно малом отрезке вещественной оси в этой полуплоскости. Если взять этот отрезок достаточно далеко от начала координат, то на нем, согласно (1.11), $L(s)$ близко к λ, а $M(s)$ — к μ, где λ и μ положительные числа, играющие роль коэффициентов Ламэ.

Имея в виду указанную область изменений L и M, мы можем в (1.27) и (1.28) считать их положительными параметрами, не зависящими от s и сколь угодно близкими к λ и μ.

Но тогда (1.27) совместно с (1.28) ничем не отличается от аналогичной системы уравнений теории упругости, в которых через L и M обозначены обычные упругие постоянные Ламэ.

Поэтому можно утверждать следующее.

Если известно решение некоторой задачи о движении упругого тела, то для получения формального решения аналогичной задачи для среды с рассматриваемым видом наследственности достаточно в L-преобразовании известного решения заменить упругие постоянные Ламэ: λ на $L(s)$ и μ на $M(s)$ по формулам (1.10) (или модуль Юнга — E на $\text{E}(s)$ и коэффициент Пуассона — ν на $n(s)$ по формулам (1.9), и принять его за L-преобразование искомого решения **.

Возвращаясь к полученной системе (1.26) и (1.8), заметим, что если, в частности, принять

$$\left.\begin{aligned} Q_1(t) &= ae^{-rt} \\ Q_2(t) &= be^{-rt} \end{aligned}\right\}, \tag{1.29}$$

где a, b и r некоторые числа, то можно из указанной системы исключить интегральные члены и превратить эти соотношения в дифференциальные.

Легко проверить, что вместо закона (1.8) мы получим

$$\begin{aligned} rp_{ik} + \dot{p}_{ik} = \lambda[\dot{u}_{ll} + (r-a)\,u_{ll}]\,\delta_{ik} + 2\mu\,[\dot{u}_{ik} + (r-b)\,u_{ik}] - \\ - \alpha\,\{(3\lambda + 2\mu)\dot{T} + [3\lambda(r-a) + 2\mu\,(r-b)]T\}\,\delta_{ik}, \end{aligned} \tag{1.8''}$$

что соответствует объединению законов Фойхта-Томсона для упруговязкой среды и Максвелла для релаксирующей среды ***.

---

* Было бы очень громоздко сформулировать все условия, которые достаточно для этой цели наложить на решение и заданные функции (пример подобных условий см. [19, § 11]). Для наших целей достаточно в каждом конкретном случае проверить формально полученное решение.

** На подобные связи между этими двумя задачами указывают разные авторы. Так, еще Вольтерра в [12] находит частный вид решения уравнений равновесия, соответствующий известному в теории упругости решению Бетти [20, § 159] и устанавливает простую (также операторную) связь между ними. Об этом см. также [1] и [2]

*** Если в (1.8) положить $T = 0$ и составить вытекающее из него соотношение для девиаторов тензоров напряжений и деформаций, то мы получим закон, предложенный Гогенемзером и Прагером [21]. Если к этому положить $a = b$, $p_{11} = \sigma$, $p_{ik} = 0$, $i \neq 1$, $u_{11} = \varepsilon$, то закон примет вид

$$\dot{\sigma} + r\sigma = E\,(\dot{\varepsilon} + n\varepsilon),$$

который принят в названной работе А. Ю. Ишлинского [15].

Далее, вместо системы интегро-дифференциальных уравнений 2-го порядка (1.27) мы получим систему дифференциальных уравнений 3-го порядка:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial t\partial x_i}+[\lambda(r-a)+\mu(r-b)]\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i}+\mu\left[\Delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)+(r-b)\Delta u_i\right]-$$
$$-\alpha(3\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial t}-\alpha[3\lambda(r-a)+2\mu(r-b)]\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{\partial f_i}{\partial t}=\rho\frac{\partial^3 u_i}{\partial t^3}. \quad (1.30)$$

Граничные условия, которые должны быть добавлены к этим уравнениям, остаются без изменения. Что касается начальных условий, то в связи с ними возникает следующее затруднение. С одной стороны, число их, в соответствии с порядком уравнения, должно равняться 9, с другой — очевидно, что для всякой среды, какими бы свойствами она не обладала, мы располагаем лишь шестью величинами: компонентами смещений и их скоростей, начальными значениями которых мы можем распоряжаться по произволу.

Затруднение состоит поэтому в том, что неизвестно, каким образом должны быть заданы недостающие три начальных условия. Это затруднение, однако, является кажущимся и легко разрешается следующим образом.

Дело в том, что соотношения (1.8) и (1.8″) не эквивалентны друг другу. Легко проверить, что (1.8″) эквивалентны более общим соотношениям, чем (1.8) при условиях (1.29).

Действительно, интегрируя (1.8″), мы получаем

$$p_{ik}=\lambda u_{ll}\delta_{ik}+2\mu u_{ik}-a\int\limits_{t_0}^{t}e^{-r(t-\tau)}u_{ll}(\tau)\,d\tau\cdot\delta_{ik}-b\int\limits_{t_0}^{t}e^{-r(t-\tau)}u_{ik}(\tau)\,d\tau-$$
$$-\alpha(3\lambda+2\mu)T\delta_{ik}+\alpha(3\lambda a+2\mu b)\int\limits_{t_0}^{t}e^{-r(t-\tau)}T(\tau)\,d\tau\delta_{ik}+C_{ik}e^{-rt}, \quad (1.31)$$

где t_0 — произвольный момент времени, а C_{ik} — произвольные постоянные, имеющие следующий смысл:

$$C_{ik}=[p_{ik}(t_0)-\lambda u_{ll}(t_0)\delta_{ik}-2\mu u_{ik}(t_0)+\alpha(3\lambda+2\mu)T(t_0)]\,e^{rt_0}. \quad (1.32)$$

Поэтому соотношение (1.8″), которое является законом, определяющим механические свойства среды, содержит неопределенности, до устранения которых он, по-видимому, не может считаться заданным. Кроме того, здесь, в отличие от закона Гука, который инвариантен относительно изменения начала отсчета для компонентов напряжения (или деформации), следует задать «абсолютное» начало отсчета для каких-нибудь из компонент, т. е. задать момент времени t_1 (вернее, t_1-t_0), в который эти компоненты считаются равными нулю.

Все эти величины, которые должны быть заданы для устранения неопределенности в (1.8″), являются механическими константами среды, так как они определяют ее механические свойства.

Чтобы доопределить (1.8″), достаточно допустить наличие такого момента времени, в который все входящие в него величины можно еще считать равными нулю. Это как раз то состояние среды, которое мы выше называли «естественным» состоянием покоя.

Приняв t_0* равным моменту окончания этого состояния и начала «истории» деформации среды, мы легко из (1.3) получим, что все $C_{ik}=0$. После этого неопределенный дифференциальный закон (1.8″) заменяется интегральным законом (1.31) с выбранным значением t_0 и $C_{ik}=0$.

* Часто принимают $t_0=-\infty$.

Из сказанного вытекает, что интегрирование системы (1.30) должно производиться при начальных условиях, задаваемых для момента t_0, даже в том случае, если нас интересует поведение тела, начиная с некоторого момента $t_1 > t_0$, когда состояние его было нами произвольно возмущено.

Здесь уместно подчеркнуть, что это возмущение может быть произведено только произвольным изменением, начиная с момента $t = t_1$, поверхностных сил и связей, объемных сил и температуры и произвольным мгновенным изменением в момент $t = t_1$ смещений и их скоростей.

Последние возмущения и определяют шесть условий, которые являются «начальными» для интегрирования уравнений (1.30) в промежутке времени, начиная с $t = t_1$. Эти условия добавляются к решению этих же уравнений в промежутке времени $[t_0, t_1]$, без которого дальнейшее интегрирование невозможно. Условия, которые мы назвали начальными, в действительности являются условиями сопряжения для двух решений, отвечающих двум смежным промежуткам времени с общей границей $t = t_1$.

Заметим, наконец, что все недоразумения отпали бы автоматически, если бы мы отказались от перехода к дифференциальным уравнениям (1.30) и оставили бы интегро-дифференциальные уравнения (1.27), при условии (1.29), которые вместе с основным законом в интегральной форме (1.8) являются естественными для этой задачи *.

---

* Как мы замечали (см. сноску на стр. 1), А. Ю. Ишлинский в работе [15] исходит из закона в дифференциальной форме, аналогичной (1.8″), и приводит задачу о продольных колебаниях стержней к уравнению 3-го порядка, аналогичному (1.30). Придя, таким образом, к необходимости задания трех начальных условий (одномерный случай), А. Ю. Ишлинский не только считает это естественным, но выделяет этот факт как отличительную черту рассматриваемой среды. Он подчеркивает, что, в отличие от случая стержня, здесь мало задать смещение и скорость его в начальный момент времени, но необходимо также задать в этот момент напряжение в каждом сечении стержня так, как если бы эти три условия были одинаково произвольны.

Мы поэтому подробно остановились на вопросе о числе начальных условий и, как нам кажется, выяснили, что только два из требуемых в [15] являются произвольными, то есть могут быть нами заданы по произволу в любой момент времени. Третье же относится к доопределению механических свойств материала стержня и задается лишь один раз (выбором естественного состояния) на все время существования стержня, независимо от тех возмущений, которым он может по нашему произволу подвергаться в дальнейшем.

К сказанному можно еще добавить следующее.

1. Если допустить, как обычно, наличие естественного состояния покоя до некоторого момента времени t_0 ($t_0 > -\infty$), то, как это очевидно из приведенного нами доказательства теоремы единственности, задание трех начальных условий в момент t_0 переопределяет систему.

2. Очевидно, что по существу ничего не изменится, если вместо (1.29) принять

$$Q_1(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{-r_j t}$$

$$Q_2(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j e^{-r_j t}$$

Нетрудно, однако, проверить, что из закона (1.8) можно снова исключить интегральные члены, благодаря чему вместо него получатся соотношения, содержащие N-ые производные от p_{ik} и u_{ik} по t. Аналогично исключаются интегральные члены и из системы (1.27), которая превращается в систему уравнений относительно u_i $N+2$-го порядка по t. Но тогда для интегрирования ее потребуются $3N+6$ начальных условия, да еще $3N$ условия для нахождения p_{ik} из (1.8) — всего $6N+6$ начальных условий.

Таким образом, при переходе от одного значения N к смежному необходимо добавлять новые 6 условий, в то время, когда механически задача не изменилась и никаких дополнительных сведений относительно состояния движущегося объема среды в начальный момент получить нельзя.

Возвращаясь теперь к доказанной выше теореме единственности решения, заметим: мы исходили из предположения, что момент времени t_1, в который производится возмущение состояния тела, совпадает с моментом t_0, до которого оно находилось в естественном состоянии покоя. Мы полагали $t_0 = t_1 = 0$.

В случае же, если $t_0 < t_1 = 0$, т. е. если возмущение произведено после того, как тело уже подвергалось деформации в промежутке времени $[t_0, 0]$, теорема остается в силе и формулируется так:

Не существует двух различных решений системы (1.27) или (1.30) при одних и тех же объемных силах и температуре, удовлетворяющих одинаковым граничным условиям (1.17) и (1.18) при $t > 0$, начальным условиям (1.16) при $t = 0$ и *отвечающих одному и тому же состоянию* в промежутке времени $[t_0, 0]$.

Действительно, нетрудно заметить, что разность таких двух решений удовлетворяет уравнениям и всем условиям, в точности совпадающим с исходными в доказательстве нашей теоремы единственности *.

2. Продольные колебания стержней

Как было отмечено выше, эту задачу при наличии ползучести и релаксации, по-видимому, впервые рассмотрел А. Ю. Ишлинский в неоднократно цитированной статье [15].

Точнее, в этой работе была рассмотрена задача о свободных колебаниях стержня с закрепленными концами и задача о распространении монохроматической волны вдоль бесконечно длинного стержня, материал которых подчиняется закону

$$\dot{\sigma} + r\sigma = E(\dot{\varepsilon} + n\varepsilon), \tag{2.1}$$

где $\sigma = p_{11}$, $\varepsilon = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, E, r, n — положительные числа, причем принимается, что $r > n$.

Здесь мы рассмотрим, при тех же предположениях относительно материала стержней, некоторые другие задачи указанного типа.

Уравнение задачи о продольных колебаниях проще всего получить непосредственно. Прежде всего устраним отмеченную в параграфе I неопределенность закона (2.1), заменив его соответствующим интегральным соотношением вида (1.8). Для этой цели положим в (1.8) $p_{11} = \sigma$, $p_{ik} = 0$ $(i \neq 1)$, $T = 0$ и в (1.29) $a = b = r - n > 0$, то есть

$$Q_1(t) = Q_2(t) = (r - n)\, e^{-rt}.$$

Мы получим

$$E\varepsilon = \sigma + (r - n)\, e^{-nt} * \sigma(t) \tag{2.2}$$

и

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon - (r - n)\, e^{-rt} * \varepsilon(t). \tag{2.3}$$

---

* Аналогичная теорема единственности для стержня доказана А. Ю. Ишлинским в [15] при следующих условиях:

1) концы стержня упруго заделаны;

2) в начальный момент заданы смещения, скорости их и напряжения во всех сечениях стержня;

3) постоянные материала r и n подчинены условию: $r > n$. Относительно необходимости задания трех начальных условий (2) остаются в силе сделанные нами выше замечания.

Ограничения, наложенные на характер граничных условий 1) и требование 3) $r > n$, являются излишними и вызваны только методикой доказательства теоремы, принятой в [15].

Легко проверить, что (2.2) и (2.3) эквивалентны (2.1) *.

Искомое уравнение получается теперь путем исключения напряжения σ из (2.3) и из уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где $u = u_1$, $x = x_1$, $f = f_1$, в следующем виде:

$$E\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r - n)\, e^{-rt} * \frac{\partial^2 u}{\partial x}\right] + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}^{**}. \tag{2.4}$$

К этому уравнению добавляются два начальных условия

$$u(x,\ 0) = u_0(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{u}_0(x)$$

и два граничных условия относительно $u(x,\ t)$ или $\sigma(x,\ t)$.

В дальнейшем, при решении конкретных задач, мы будем широко пользоваться формальным аппаратом операционного исчисления. Для удобства вместо применявшегося ранее преобразования Лапласа (L-преобразования) мы будем пользоваться преобразованием Хевисайда-Карсона (X-преобразованием) и, чтобы различать их, вместо употреблявшегося ранее обозначения комплексной переменной — s, будем в дальнейшем обозначать эту переменную через p.

Далее заметим, что во всех рассмотренных в этом параграфе задачах *** принято, что объемные силы отсутствуют

$$f \equiv 0$$

и что

$$u_0(x) = 0 \quad \dot{u}_0(x) = 0.$$

Поэтому X-изображения соотношений (2.2), (2.3) и уравнения (2.4) будут во всем дальнейшем иметь вид

$$\mathrm{E} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\sigma}{\mathrm{E}(p)}; \tag{2.5}$$

$$\mathrm{E}(p) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \rho p^2 \bar{u}(x,\ p), \tag{2.4'}$$

где принято обозначение $X\{\varphi(t)\} = \bar{\varphi}(p)$ и

$$\mathrm{E}(p) = \frac{E}{1 + \frac{k_1(p)}{p} + \frac{k_2(p)}{p}} = \frac{E}{1 + \frac{r-n}{p}\,\frac{n}{p+n}} = E\,\frac{p+n}{p+r}^{****}. \tag{2.6}$$

Введем следующее обозначение

$$p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}} = \omega(p). \tag{2.7}$$

---

* См. сноску ** на стр. 174. Эквивалентность понимается в том смысле, что соотношения (2.2) и (2.3) вытекают из (2.1) если принять, что стержень находился в естественном состоянии, и наоборот.

** Если исключить из (2.4) и (2.3) $e^{-rt} * \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, получится уравнение $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + n\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rf - \rho\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + r\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0$, которым пользуется А. Ю. Ишлинский в [15].

*** За одним исключением, где это специально оговорено.

**** См. формулу (1.9), где следует положить $k_1(s) = L\{K_1\} = \frac{X\{K_1\}}{p} = \frac{k_1(p)}{p}$. Заметим, кроме того, что (2.5) и (2.4′) можно было написать сразу на основании установленной аналогии между настоящей задачей и соответствующей задачей теории упругости.

Тогда

$$\mathrm{E}(p) = E\frac{p^2}{\omega^2(p)} \tag{2.6'}$$

и уравнение (2.4′) примет вид

$$\bar{u}'' - \frac{\omega^2(p)}{c^2}\bar{u} = 0, \tag{2.9}$$

где $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — скорость распространения колебаний.

Относительно введенной в (2.7) функции $\omega(p)$ заметим, что она имеет две критические точки $p_1 = -n$ и $p_2 = -r$. Чтобы сделать эту функцию однозначной, проведем в плоскости комплексной переменной p разрез по отрезку вещественной оси $[-r_1 - n]$ и выберем ту ветвь корня, которая $\to 1$ при $|p| \to \infty$. Легко видеть, что поставленное условие вполне определяет ветвь функции $\omega(p)$, которая теперь во всей плоскости p с указанным разрезом будет однозначной аналитической функцией от p.

Возвращаясь к полученному уравнению (2.9), заметим, что его общим решением будет

$$\bar{u}(\xi, p) = C_1(p)\, e^{\omega(p)\xi} + C_2(p)\, e^{-\omega(p)\xi}, \tag{2.10}$$

где $\xi = \frac{x}{c}$, а $C_1(p)$ и $C_2(p)$ произвольные функции от p, которые определяются из граничных условий для каждой задачи в отдельности.

После этих предварительных замечаний, переходим к решению некоторых конкретных задач о продольных колебаниях стержней.

2.1. Колебания полубесконечного стержня

2.1.1. Продолжительный удар по концу стержня

Под продолжительным ударом мы будем понимать следующий случай.

Конец $x = 0$ полубесконечного стержня $0 \leqslant x < \infty$ постоянного сечения площади I подвергается сжатию постоянной силой σ_0 в течение промежутка времени $[0, t_0]$, в конце которого сила внезапно исчезает.

Чтобы исключить движение стержня, как целого, мы примем, что $u(x, t) \to 0$ при $x \to \infty$. Это условие заменит нам одно из двух граничных условий, необходимых для нахождения произвольных функций $C_1(p)$ и $C_2(p)$ в (2.10).

Второе граничное условие, очевидно, следующее.

При $x = 0$

$$\sigma(0, t) = \begin{cases} -\sigma_0 & 0 < t < t_0 \\ 0 & t > t_0. \end{cases}$$

X — изображения этих условий дают формально следующие граничные условия для изображения $\bar{u}(\xi, p)$.

При $x \to \infty$ и $Re p > 0$

$$\bar{u}(\xi, p) \to 0. \tag{2.1.1}$$

При $x = 0$

$$\bar{\sigma}(0, p) = -\sigma_0(1 - e^{-pt_0}),$$

откуда

$$\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{\bar{\sigma}(0, p)}{\mathrm{E}(p)} = -\frac{\sigma_0}{\mathrm{E}(p)}(1 - e^{-pt_0}). \tag{2.1.2}$$

Из (2.1.1) следует, что $C_1(p) = 0$, а из (2.1.2) — что

$$C_2(p) = \frac{c\sigma_0}{E}\frac{\omega(p)}{p^2}(1 - e^{-pt_0}),$$

и мы получаем для данной задачи

$$\overline{u}(\xi,\ p) = \frac{\sigma_0 c}{E}\frac{\omega(p)}{p^2}(1 - e^{-pt_0})\,e^{-\omega(p)\xi} = (1 - e^{-pt_0})\,u_1(\xi,\ \rho), \qquad (2.1.3)$$

где, напоминаем, (2.7)

$$\omega(p) = p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}.$$

Теперь мы займемся нахождением оригинала (2.1.3). Для этого заметим предварительно, что если через $u_1(\xi,\ t)$ обозначить оригинал функции $\overline{u}_1(\xi,\ p)$, то есть

$$u_1(\xi,\ t) \div \overline{u}_1(\xi,\ p) \equiv \frac{\sigma_0 c}{E}\frac{\omega(p)}{p^2}e^{-\omega(p)\xi}, \qquad (2.1.4)$$

то искомое решение — оригинал (2.1.3), согласно известной теореме запаздывания:

$$u(\xi,\ t) = \begin{cases} u_1(\xi,\ t) & 0 < t < t_0 \\ u_1(\xi,\ t) - u_1(\xi,\ t - t_0) & t > t_0. \end{cases} \qquad (2.1.4')$$

Поэтому для нахождения решения достаточно определить $u_1(\xi,\ t)$.

Несколько проще — найти оригинал функции

$$p\overline{u}_1(\xi,\ p) = \frac{\sigma_0 c}{E}\frac{\omega(p)}{p}e^{-\omega(p)\xi}, \qquad (2.1.5)$$

изображающий (как это очевидно, если вспомнить что $u_0 = 0$) скорость смещения сечений стержня — $v_1(\xi,\ t) = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}$.

Таким образом, надлежит найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{\omega(p)}{p}e^{-\omega(p)\xi} = \sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\,e^{-p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\,\xi} =$$

$$= \frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\,e^{-\xi\sqrt{(p+r)(p+n)}}\,pe^{n\xi\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}}.$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t) \div F_1(p) &= \sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\,e^{-\xi\sqrt{(p+r)(p+n)}} \\ \varphi_2(t) \div F_2(p) &= pe^{-n\xi\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1.6)$$

Тогда, согласно теореме умножения,

$$F(p) = \frac{F_1(p)\,F_2(p)}{p} \div \int_0^t \varphi_1(t-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,dt. \qquad (2.1.7)$$

Итак, задача свелась к нахождению функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ из (2.1.6).

Чтобы найти $\varphi_1(t)$, воспользуемся известной формулой *, пригодной для любого $a \neq 0$:

$$\sqrt{\frac{p}{p+a}}\,e^{-\tau\sqrt{p(p+a)}} \div \begin{cases} 0 & 0 < t < \tau \\ e^{-\frac{a}{2}t}\,I_0\left(\frac{a}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\right) & t > \tau, \end{cases}$$

где $I_0(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента; положим в ней $a = n - r$, $\tau = \xi$ и применим известную теорему смещения: если $F(p) \div f(t)$,

* См. например, [19, форм. (3.169)].

то

$$F(p+\lambda) \div e^{\lambda t} f(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \ldots \quad (i),$$

или

$$\frac{p}{p+\lambda} F(p+\lambda) \div e^{-\lambda t} f(t) \ldots \quad (ii)$$

с $\lambda = r$. Мы получим (см. (2.1.6))

$$\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\, e^{-\xi\sqrt{(p+r)(p+n)}} = F_1(p) \div \varphi_1(t) = \begin{cases} 0 & t < \xi \\ e^{-\frac{r+n}{2}t} I_0\left(\frac{r-n}{2}\sqrt{t^2-\xi^2}\right) + \end{cases}$$

$$+ r \int_\xi^t e^{-\frac{r+n}{2}\tau} I_0\left(\frac{r-n}{2}\sqrt{t^2-\xi^2}\right) d\tau \quad t > \xi. \qquad (2.1.8)$$

Для определения $\varphi_2(t)$ применим к формуле [19, форм. (3.137)]

$$\Phi(p) \equiv e^{\frac{\alpha^2}{\sqrt{p}}} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4t^2}} I_0(2\alpha\sqrt{u})\, du = f(t, \alpha) \qquad (2.1.10)$$

теорему А. М. Эфроса [22, стр. 103]:

$$\Phi\left(\frac{p}{p+b}\right) = e^{\alpha^2\sqrt{\frac{p+b}{p}}} \div \int_0^\infty \psi(\tau, t)\, f(\tau, \alpha)\, d\tau, \qquad (2.1.11)$$

где b — произвольное положительное число * и

$$\frac{p}{p+b} e^{-\tau\sqrt{\frac{p}{p+b}}} \div \psi(\tau, t) = e^{-(bt+\tau)} I_0(2\sqrt{bt\tau}).$$

Очевидно, что

$$\lim_{t\to 0} \int_0^\infty \psi(\tau, t)\, f(\tau, \alpha)\, d\tau = \lim_{p\to\infty} e^{\alpha^2\sqrt{\frac{p+b}{p}}} = e^{\alpha^2}.$$

Поэтому **

$$\Phi_1(p) \equiv p\Phi\left(\frac{p}{p+b}\right) = pe^{\alpha^2\sqrt{\frac{p+b}{p}}} \div \int_0^\infty \frac{\partial\psi}{dt} f(\tau, \alpha)\, d\tau + e^{\alpha^2}\delta(t) =$$

$$= e^{-bt} \int_0^\infty e^{-\tau}\left[-bI_0(2\sqrt{bt\tau}) + \sqrt{\frac{b\tau}{t}} I_1(2\sqrt{bt\tau})\right] f(\tau, \alpha)\, d\tau + e^{\alpha^2}\delta(t),$$

и легко проверить, что дифференцирование под знаком интеграла законно.

Положим теперь $b = r - n$, $\alpha^2 = n\xi$ и применим к $\Phi_1(p)$ теорему смещения (ii) с $\lambda = n$. Мы найдем (см. (2.1.6))

$$\frac{p}{p+n}\Phi_1(p+n) = \frac{p}{p+n}(p+n)\, e^{n\xi\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}} = F_2(p) \div \varphi_2(t) =$$

$$= e^{-n(t-\xi)}\delta(t) + e^{-rt} \int_0^\infty e^{-\tau}\left[\sqrt{\frac{(r-n)\tau}{t}} I_1(2\sqrt{(r-n)t\tau}) - \right.$$

$$\left. - (r-n) I_0(2\sqrt{(r-n)t\tau})\right] \times$$

$$\times f(\tau, \sqrt{n\xi})\, d\tau = e^{-n(t-\xi)}\delta(t) + \varphi_{21}(t, \xi), \qquad (2.1.12)$$

где $f(t, \sqrt{n\xi})$ из (2.1.10).

---

* Чтобы в этом убедиться, применим к форм. (3.68) из [19]: $e^{-\tau\frac{p-b}{p}} = e^{-\tau} e^{\frac{b\tau}{p}} \div$ $\div\, e^{-\tau} I_0(2\sqrt{b+\tau})$ теорему смещения (ii) с $\lambda = b$.

** $\delta(t)$ — так называемая дельта-функция.

Обращение (2.1.7) и, значит, (2.1.5) можно записать так:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\begin{cases}0 & (t<\xi)\\ \frac{\sigma_0 c}{E}\left\{e^{n\xi}\varphi_1(t,\ \xi)+\int\limits_{\xi}^{t}\varphi_{21}(t-\tau,\ \xi)\,\varphi_1(\tau,\ \xi)\,d\tau\right\} & (t>\xi),\end{cases} \qquad (2.1.13)$$

где $\varphi_1(t,\ \xi)$ и $\varphi_{21}(t,\ \xi)$ даны в (2.1.8) и (2.1.12) соответственно. Мы не станем ни выписывать подробно (2.1.13), ни вычислять остальные части решения $u(\xi,\ t)$ и $\sigma(\xi,\ t)$, так как они весьма громоздки и поэтому мало пригодны для обозрения.

Чтобы все же можно было получить некоторое представление о характере решения, вычислим смещение конца стержня $x=0$.

Это можно сделать двумя способами. Легко проверить, что подставив в (2.1.13) $\xi=0$, мы получим

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_{x=0}=\frac{\sigma_0 c}{E}\left\{e^{-\frac{r+n}{2}t}I_0\left(\frac{r-n}{2}t\right)+r\int\limits_0^t e^{-\frac{r+n}{2}\tau}\,I_0\left(\frac{r-n}{2}\tau\right)d\tau\right\},$$

откуда, согласно (2.1.4′),

$$u(0,\ t)=$$

$$=\begin{cases} u_1(0,\ t)=\frac{\sigma_0 c}{E}\int\limits_0^t e^{-\frac{r+n}{2}\tau}I_0\left(\frac{r-n}{2}\tau\right)\Big[1+r(t-\tau)\Big]d\tau & (0<t<t_0)\\ u_1(0,\ t)-u_1(0,\ t-t_0)=\frac{\sigma_0 c}{E}\left\{\int\limits_{t-t_0}^{t} e^{-\frac{r+n}{2}\tau}I_0\left(\frac{r-n}{2}\tau\right)\Big[1+r(t-\tau)\,d\tau+\right. & \\ \qquad\left.+\,rt_0\int\limits_0^{t-t_0} e^{-\frac{r+n}{2}\tau}I_0\left(\frac{r-n}{2}\tau\right)d\tau\right\} & (t>t_0). \end{cases} \qquad (2.1.14)$$

С другой стороны, непосредственно (2.1.4) дает

$$\bar{u}_1(0,\ p)=\frac{\sigma_0 c}{E}\frac{\omega(p)}{p^2}=\frac{\sigma_0 c}{E}\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\frac{1}{p},$$

откуда, согласно теореме обращения,

$$u_1(0,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\bar{u}_1(0,\ p)}{p}e^{pt}dp=\frac{\sigma_0 c}{F}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)+i\infty}\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\frac{e^{pt}}{p^2}\,dp, \qquad (2.1.15)$$

где (+0) означает обход начала координат справа.

Подынтегральная функция является однозначной аналитической функцией во всей плоскости с разрезом $[-r,\ -n]$ и имеет лишь двухкратный плюс в точке $p=0$ с вычетом, равным

$$\sqrt{\frac{r}{n}}\left(t-\frac{r-n}{2rn}\right).$$

Поэтому

$$u_1(0,\ t)=\frac{\sigma_0 c}{E}\left\{\sqrt{\frac{r}{n}}\left(t-\frac{rn}{2rn}\right)+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_c\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\frac{e^{pt}}{p^2}\,dp,\right.$$

где C — замкнутый контур, охватывающий берега разреза $[-r,\ -n]$.

Если вспомнить, что для корня выбрана та ветвь, которая $\to 1$ при $|p|\to\infty$, то мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\frac{e^{pt}}{p^2}dp = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-r}^{-n} + i\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|}\frac{e^{pt}}{p^2}dp + \int_{-n}^{-r} - i\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|}\frac{e^{pt}}{p^2}dp\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_n^r \sqrt{\frac{r-z}{z-n}}e^{-zt}\frac{dz}{z^2}.$$

Следовательно,

$$u(0, t) =$$

$$= \begin{cases} u_1(0,\ t) = \dfrac{\sigma_0 c}{E}\left\{\sqrt{\dfrac{r}{n}}\left(t - \dfrac{r-n}{2rn}\right) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_n^r \sqrt{\dfrac{r-z}{z-n}}\dfrac{e^{-zt}}{z^2}dz\right\} & t < t_0 \\ u_1(0, t) - u_1(0, t-t_0) = \dfrac{\sigma_0 c}{E}\left\{\sqrt{\dfrac{r}{n}}t_0 + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_n^r \sqrt{\dfrac{r-z}{z-n}}\dfrac{e^{-zt}}{z^2}(1-e^{zt_0})\,dz\right\} & t > t_0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

и полученное выражение значительно удобнее тождественного с ним (2.1.14).

Так, очевидно, что для $nt \gg 1$

$$u(0, t) \sim \frac{\sigma_0 t_0 c}{E}\sqrt{\frac{r}{n}}, \qquad \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \sim 0. \quad (2.1.17)$$

Далее, для $rt_0 \ll 1$, то есть для случая «короткого» удара с конечным импульсом $\sigma_0 t_0 = I$ получаем приближенно

$$u(0, t) \approx \frac{Ic}{E}\left\{\sqrt{\frac{r}{n}} - \frac{1}{\pi}\int_n^r \sqrt{\frac{r-z}{z-n}}\frac{e^{-zt}}{z}dz\right\}. \quad (2.1.18)$$

и для больших t получается снова (2.1.17).

На этом мы заканчиваем наши рассмотрения поставленной в этом параграфе задачи.

В действительности, если не считать последней детали, мы ограничились лишь нахождением формального решения. Мы показали, что это решение можно свести к известным функциям и интегралам от них. Дальнейший анализ полученного решения затруднен из-за его громоздкости. Однако некоторые результаты могут быть получены с помощью непосредственного рассмотрения функции (2.1.13).

Чтобы избежать повторения, мы сочли возможным перенести эту часть исследования в следующий параграф, где будет рассмотрена родственная задача о мгновенном ударе по стержню. Полное решение последней еще более громоздко, поэтому мы его и вовсе приводить не будем, а ограничимся лишь частичным исследованием, которое однако позволит составить некоторое представление о свойствах решения.

2.1.2. Мгновенный удар по концу стержня

В предыдущем параграфе мы рассмотрели случай, когда конечная сила действует в течение конечного промежутка времени t_0, и условно назвали его продолжительным ударом. Там же мы коснулись случая, когда t_0 — мало (мы назвали его «коротким» ударом). Кажется естественным перейти к случаю мгновенного удара с помощью предельного перехода: $t \to 0$ и $\sigma_0 t_0 \to I$.

Нетрудно однако убедиться в том, что такая постановка задачи, как и в случае упругого стержня, является не корректной, так как приводит к появлению разрыва непрерывности в смещениях. Чтобы этот недостаток устранить, достаточно произвести тот же удар, но только через прокладку конечной массы (подобно тому, как это делают в случае упругого стержня). Вследствие введения этой прокладки задача несколько усложняется и теряется непосредственная связь с рассмотренным случаем.

Итак, условия задачи следующие.

К концу $x=0$ полубесконечного стержня $0 \leqslant x < \infty$ постоянного поперечного сечения площади 1 прикреплена (жестко) прокладка массы m, по которой в момент $t=0$ произведен продольный удар импульса I. Определить вызванное ударом движение стержня.

Так как граничное условие $u(x, p) \to 0$ при $x \to \infty$ $Re\, p > 0$ предыдущего случая сохраняется, то мы имеем снова $C_1(p)=0$, и остается определить только одну функцию $C_2(p)$. Для этого служит второе граничное условие, на конце $x=0$, которое получается, если составить уравнение движения прокладки

$$m\ddot{u}(0, t) = \sigma(0, t) + I\delta(t),$$

где $\delta(t)$ дельта-функция.

X-изображение этого соотношения имеет вид

$$mp^2\bar{u}(0, p) = \bar{\sigma}(0, p) + Ip = \mathrm{E}(p)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_{x=0} + Ip,$$

откуда

$$mp^2 C_2(p) = -\frac{Ep^2}{\omega^2(p)} \frac{C_2(p)}{c}\,\omega(p) + Ip,$$

или

$$C_2(p) = \frac{I}{mp} \frac{\omega(p)}{\omega(p) + N},$$

где *

$$N = \frac{E}{cm} = \frac{\sqrt{Ep}}{m} \; (>0), \tag{2.1.19}$$

и мы получаем

$$\bar{u}(\xi, p) = \frac{I}{mp} \frac{\omega(p)}{\omega(p) + N} e^{-\omega(p)\,\xi}. \tag{2.1.20}$$

Напомним, что, вообще говоря, $\bar{u}(\xi, p)$ — многозначная функция переменного p. Однако, в плоскости с введенным выше разрезом вдоль отрезка $[-r, -n]$ и после выбора ветви функции $\omega(p)$ выражение $\bar{u}(\xi, p)$ становится однозначной аналитической функцией от p, имеющей простые полюсы в тех точках $p = p_k$, где знаменатель (3.1.18) обращается в нуль:

$$\omega(p_k) + N = 0,$$

или

$$p_k \sqrt{\frac{p_k + r}{p_k + n}} = -N. \tag{2.1.21}$$

Возведя в квадрат обе части (2.1.21) найдем, что числа p_k удовлетворяют уравнению

$$p^2(p+r) - N^2(p+n) = 0 \quad (r > n),$$

которое, как это нетрудно проверить, имеет два отрицательных корня $p_1 = -a_1$, $p_2 = -a_2$ и один положительный $p_3 = a_3$. Далее, легко видеть, что только отрицательные корни удовлетворяют (2.1.21) и что должно быть $a_1 > r$ и $a_2 < n$. Таким образом, все особенности $\bar{u}(\xi, p)$ лежат в левой полуплоскости.

---

* Заметим, что размерность N есть $\dfrac{1}{\text{время}}$.

После этих замечаний возвратимся к (2.1.20). Применяя теорему обращения, найдем

$$u(\xi, t) = \frac{I}{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\ ti\infty} \frac{\omega(p)\, e^{-\omega(p)\,\xi\, + pt}}{[\omega(p)+N]\, p^2}\, dp, \tag{2.1.22}$$

где путь интегрирования проходит по мнимой оси с обходом начала координат справа.

Легко заметить, что при указанном выше выборе ветви корня в $\omega(p)$ и при достаточно больших $|p|$

$$-\omega(p)\,\xi + pt = -p\left[\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}\,\xi - t\right] \sim -p\,(\xi - t).$$

Отсюда следует, что при $\xi = \frac{x}{c} > t$ подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана в правой полуплоскости, где она регулярна. Значит, при $x > ct$

$$u(x,\ t) = 0.$$

Если же $t > \frac{x}{c} = \xi$, то подынтегральная функция будет удовлетворять условиям той же леммы в левой полуплоскости, где она имеет особенности и поэтому, вообще говоря, при $x < ct$

$$u(x,\ t) \neq 0.$$

Остается ли $u(x,\ t)$ непрерывной при $x = ct$? Тот же вопрос очевидно относится к скорости смещений $\frac{\partial u}{\partial t}$ и напряжению $\sigma(x,\ t)$.

Для выяснения этого вопроса сделаем в (2.1.22), полагая $t > \xi$, замену переменной

$$p = \frac{v}{t-\xi}.$$

Мы получим

$$u(\xi,\ t) = \frac{I}{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\ +i\infty} \frac{\omega\left(\frac{v}{t-\xi}\right) e^{-\omega\left(\frac{v}{t-\xi}\right)\zeta + \frac{v}{t+\xi}i}}{\left[\omega\left(\frac{v}{t-\xi}\right) + N\right] v^2}\,(t-\xi)\, dv, \tag{2.1.23}$$

и путь интегрирования можно считать неизменным, каково бы ни было $t-\xi > 0$.

Теперь воспользуемся тем, что подынтегральная функция удовлетворяет условиям леммы Жордана в левой полуплоскости, заведем «концы» пути интегрирования в левую полуплоскость и обозначим этот путь через (Γ).

Тогда сходимость интеграла будет такой, что можно переходить к пределу по ξ и t под его знаком.

Так как $v \neq 0$ на всем пути интегрирования (Γ), то при сколь угодно малых $t-\xi > 0$, $\left|\frac{v}{t-\xi}\right|$ на всем пути сколь угодно велико. Поэтому вдоль (Γ)

$$\omega\left(\frac{v}{t-\xi}\right) = \frac{v}{t-\xi}\sqrt{\frac{\frac{v}{t-\xi}+r}{\frac{v}{t-\xi}+n}} = \frac{v}{t-\xi}\left[1 + \frac{t-\xi}{2v}(r-n) + 0\left(\frac{(t-\xi)^2}{v^2}\right)\right]$$

и

$$e^{-\omega\left(\frac{v}{t-\xi}\right)\xi + \frac{v}{t-\xi}t} = e^{v} e^{-\frac{r-n}{2}\xi}\left[1 + 0\left(\frac{t-\xi}{v}\right)\right].$$

Мы получаем вместо (2.1.22)

$$u(\xi,\ t)=\frac{I}{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{\left[\frac{v}{t-\xi}+0\,(1)\right]e^{-\frac{r-n}{2}}e^{v}\left[1+0\left(\frac{t-\xi}{v}\right)\right](t-\xi)^2}{[N(t-\xi)+v+0\,(t-\xi)]\,v^2}\,dv=$$

$$=(t-\xi)\,0\,(1)\xrightarrow[(t\to\xi+0)]{}0.$$

Повторяя те же рассуждения для скорости и напряжения, найдем легко

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\,i\infty}\frac{[p\bar{u}\,(x,\,p)]\,e^{pt}}{p}\,dp=$$

$$=\frac{I}{m}e^{-\frac{r-n}{2}\xi}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{\frac{v}{t-\xi}\left[\frac{v}{t-\xi}+0\,(1)\right]e^{v}\left[1+0\left(\frac{t-\xi}{v}\right)\right](t-\xi)^2}{[N(t-\xi)+v+0\,(t-\xi)]\,v^2}\,dv$$

$$\xrightarrow[(t\to\xi+0)]{}\frac{I}{m}e^{-\frac{r-n}{2}\xi}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{e^{v}}{v}\,dv\right\}=\frac{I}{m}e^{-\frac{r-n}{2}\xi}. \qquad (2.1.24)$$

$$\sigma(\xi,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\,i\infty}\frac{\mathrm{E}\,(p)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}}{p}e^{pt}\,dp=-$$

$$=\frac{I}{mc}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\,i\infty}\frac{Ep^2}{\omega^2(p)}\frac{\omega^2(p)\,e^{-\omega(p)\,\xi+pt}dp}{[\omega(p)+N]\,p^2}=$$

$$=-\frac{IE}{mc}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)i\infty}\frac{e^{-\omega(p)\,\xi+pt}}{\omega(p)+N}\,dp\xrightarrow[(t\to\xi+0)]{}-\frac{IE}{mc}e^{-\frac{r-n}{2}\xi}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Gamma)}\frac{e^{v}}{v}\,dv\right\}=$$

$$=-\frac{IE}{mc}e^{-\frac{r-n}{2}\xi}. \qquad (2.1.25)$$

Таким образом, при $t=\xi$* смещение $u\,(\xi,\ t)$ остается непрерывным, а его скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ и напряжение $\sigma\,(\xi,\ t)$ терпят конечные разрывы непрерывности (2.1.24) и (2.1.25) соответственно. Заметим, что в этом отношении рассматриваемый случай качественно ничем не отличается от случая упругого стержня**.

Займемся выяснением поведения функции $u\,(\xi,\ t)$ при больших значениях $t>\xi$. Для этой цели рассмотрим снова выражение (2.1.2)

$$u\,(\xi,\,t)=\frac{I}{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\,i\infty}\frac{\omega\,(p)\,e^{-\xi\omega\,(p)}e^{pt}}{[\omega\,(p)+N]\,p^2}\,dp.$$

* При $t\neq\xi$ все рассмотренные функции, очевидно, непрерывны.

** В противоположность этому А. Ю. Ишлинский в [15] высказывает предположение, что решения с разрывами, подобные тем, которые имеются для упругого стержня, в рассматриваемом случае недопустимы.

Это предположение основано на все том же представлении о числе произвольных начальных условий задачи, которое мы подробно обсудили в § 1.

Как уже отмечалось выше, при $t > \xi$ интеграл сходится в левой полуплоскости таким образом, что

$$u(\xi, t) = \frac{I}{m}\left\{Res_{p=0} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{\omega(p)\, e^{-\xi\omega(p)+pt}}{[\omega(p)+N]\, p^2}\, dp\right\} =$$

$$= \frac{I}{m}\left\{\frac{\sqrt{\frac{r}{n}}}{N} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(C)} \frac{\omega(p)\, e^{-\xi\omega(p)+pt}}{[\omega(p)+N]\, p^2}\, dp\right\}, \qquad (2.1.26)$$

где (C) — замкнутый контур, целиком лежащий в левой полуплоскости и содержащий внутри себя оба корня знаменателя $-a_1$, $-a_2$ и разрез $[-r, -n]$.

Так как функция $\xi\omega(p) = \xi p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}$ регулярна в точках кривой (C), и на этой кривой $Rep \leqslant -p_0 < 0$, то

$$\left|\int\limits_{(C)} \frac{\omega(p)\, e^{-\xi\omega(p)+pt}}{[\omega(p)+N]\, p^2}\, dp\right| \leqslant e^{-p_0 t}\int\limits_{(C)} \frac{|\omega(p)|\, e^{-\xi Re\omega(p)}\, |dp|}{|\omega(p)+N|\, |p|^2},$$

и $t > \xi$ можно взять столь большим, чтобы интеграл по кривой (C) в (2,1.26) был по абсолютной величине сколь угодно малым. Следовательно при $t \to \infty$

$$u(\xi, t) \sim \frac{I\sqrt{\frac{r}{n}}}{mN}. \qquad (2.1.27)$$

Повторяя эти же рассуждения, найдем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim 0; \quad \sigma(\xi, t) \sim 0.$$

В заключение найдем еще движение прокладки, связанной с концом стержня $x = 0$.

Имеем (2.1.22):

$$u(0, t) = \frac{I}{m}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{(+0)\, i\infty} \frac{\omega(p)\, e^{pt}\, dp}{[\omega(p)+N]\, p^2}.$$

Замечая, что в левой полуплоскости подынтегральная функция имеет три простых полюса, $p_1 = -a_1$, $p_2 = -a_2$ и $p_3 = 0$, и повторяя в точности рассуждения конца предыдущего параграфа, найдем:

$$u(0, t) = \frac{I}{m}\left\{\sum_{k=1}^{2} \frac{2a_k^3 (r - a_k)\, e^{-a_k t}}{a_k^3 - (2n - a_k)\, N^2} + \frac{\sqrt{\frac{r}{n}}}{N} + \frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-r}^{-n} \frac{+i\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|}\, e^{pt}\, dp}{\left[ip\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|} + N\right] p} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-n}^{-r} \frac{-i\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|}\, e^{pt}\, dp}{\left[-ip\sqrt{\left|\frac{p+r}{p+n}\right|} + N\right] p}\right\}\right\} = \frac{I}{m}\left\{\sum_{k=1}^{2} \frac{2a_k^3 (r - a_k)\, e^{-a_k t}}{a_k^3 - (2n - a_k)\, N^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\frac{r}{n}}}{N} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{n}^{r} \frac{N\sqrt{\frac{r-z}{z-n}}\, r^{-zt}\, dz}{\left[z^2\frac{r-z}{z-n} + N^2\right] z}\right\} \qquad (2.1.28)$$

и для больших значений t мы, естественно, получим выражение (2.1.27)

$$u(0, t) \sim \frac{I\sqrt{\frac{r}{n}}}{mN}.$$

2.2 Колебания стержней конечной длины

Мы рассмотрим несколько задач, связанных с основными опытами, в которых наблюдаются явления ползучести (последействия и релаксации при растяжении). Именно, стержень конечной длины подвергается простому растяжению постоянной силой σ_0 в течение длительного промежутка времени. При этом наблюдается продолжительное изменение длины стержня (так называемая ползучесть).

О том, насколько рассматриваемая теория подходит для описания этого явления, судят обычно [6,9] на основании сравнения измеренного удлинения стержня с удлинением, получаемым из закона (2.2), если там положить

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0, \tag{2.2.1'}$$

т. е. с величиной

$$E\varepsilon = \sigma_0 + (r - n)\, e^{-nt} * \sigma_0 = \frac{\sigma_0 r}{n}\left\{1 - \frac{r-n}{r} e^{-nt}\right\}. \tag{2.2.1}$$

Явление релаксации наблюдается на аналогичном опыте, где вместо постоянной силы осуществляется постоянное удлинение ε_0. С течением времени замечается продолжительное падение напряжения. Результаты опыта обычно сравниваются с напряжениями, получаемыми из закона (2.3), если там положить

$$\varepsilon(t) \equiv \varepsilon_0, \tag{2.2.2'}$$

а именно [6,9]:

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_0 - (r - n)\, e^{-rt} * \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 n}{r}\left\{1 + \frac{r-n}{n} e^{-rt}\right\}. \tag{2.2.2}$$

Заметим, однако, что под (2.2.1) следует иметь в виду закон загружения образца

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 & t > 0, \end{cases}$$

а под (2.2.2') — закон растяжения его

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \varepsilon_0 & t > 0. \end{cases}$$

Но при таких внезапных воздействиях на образец он обязательно должен прийти в движение, особенно заметное, по крайней мере, в начале процесса.

Формулы же (2.2.1) и (2.2.2) получаются, если в общих уравнениях движения отбросить вовсе силы инерции*. В какой мере эти формулы представляют рассматриваемую нами теорию ползучести и релаксации? Каково их отношение к точным решениям соответствующих задач?

Затруднение состоит в том, что не существует, насколько нам известно, ни одного строгого решения подходящей задачи, которым можно было бы воспользоваться для ответа на эти вопросы.

В этом отношении теория упругости выгодно отличается от рассматриваемой тем, что все задачи, соответствующие основным экспериментам, допускают элементарные решения.

В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько простых задач о растяжении стержней с различными граничными условиями, которые,

---

* Подробнее об этом см. ниже.

как нам кажется, более всего подходят к упомянутым выше основным опытам на ползучесть и релаксацию.

Мы разыщем строгие решения этих задач, выясним некоторые детали и получим приближенные выражения с тем, чтобы проще было ими воспользоваться, если это будет необходимо.

В дальнейшем мы будем считать, что стержни имеют постоянное поперечное сечение площади 1, конечную длину l, и один из концов ($x=0$) у них во всех случаях закреплен. Кроме того, если это не будет оговорено особо, мы будем, как это было принято в начале настоящего параграфа, считать, что в момент $t=0$ смещения сечений стержней и скорости их равны нулю:

$$u(x,\ 0)=0,\ \dot{u}(x,\ 0)=0.$$

Легко видеть, что остаются в силе уравнение (2.9) для изображения неизвестного смещения $u(x,\ t)$ вместе с его общим решением (2.10)

$$\overline{u}(\xi,\ p)=C_1(p)\,e^{\omega(p)\xi}+C_2(p)\,e^{-\omega(p)\xi}, \tag{2.2.3}$$

где, напоминаем, $\xi=\frac{x}{c}$ и $\omega(p)=p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}$.

Из принятого выше условия

$$u(0,\ t)=0$$

следует:

$$C_1(p)=C_2(p),$$

и мы получаем

$$\overline{u}(\xi,\ p)=C(p)\,\mathrm{Sh}\,\omega(p)\,\xi. \tag{2.2.4.}$$

Таким образом, остается одна произвольная функция $C(p)$, которая определяется из второго граничного условия на конце $x=l$, или

$$\xi=\frac{l}{c}=\lambda, \tag{2.2.5}$$

которым и будет отличаться одна задача от другой.

2.2.1. Внезапное приложение растягивающей силы

Пусть в момент $t=0$ к свободному концу стержня $x=l$ внезапно приложена в дальнейшем постоянная растягивающая сила σ_0.

В таком случае, согласно (2.5) и (2.2.4),

$$\sigma_0=\overline{\sigma}(l,\ p)=\mathrm{E}(p)\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)_{x=l}=\mathrm{E}(p)\,\frac{\omega(p)}{c}\,C(p)\,\mathrm{Ch}\,\omega(p)\,\lambda,$$

откуда в силу (2.6′):

$$C(p)=\frac{\sigma_0 c\,\omega(\mathbf{p})}{Ep^2\mathrm{Ch}\,\omega(p)\,\lambda},$$

и мы получаем для этого случая

$$\overline{u}(\xi,\ p)=\frac{\sigma_0 c}{Ep^2}\,\frac{\omega(p)\,\mathrm{Sh}\,\omega(p)\,\xi}{\mathrm{Ch}\,\omega(p)\,\lambda}. \tag{2.2.6}$$

Прежде всего заметим, что так как $\omega(p)\sim p$ при $|p|\to\infty$, то при $Re p\to+\infty$

$$\overline{u}(\xi,\ p)\sim\frac{\sigma_0 c}{Ep}\,e^{-p(\lambda-\xi)}.$$

Поэтому из формулы обращения

$$u(\xi,\ t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{u}(\xi,\ p)\,e^{pt}}{p}\,dp$$

следует, что $u(\xi,\ t) = 0$ при $t \leqslant \lambda - \xi = \frac{l-x}{c}$, т. е. что процесс деформации стержня начинается на правом конце и распространяется* по стержню со скоростью, равной c. Переходя, далее, к обращению, (2.2.6) для $t > \frac{l-x}{e}$, заметим, что хотя $\omega(p) = p\sqrt{\frac{p+r}{p+n}}$ — многозначная функция от p, однако, благодаря четности относительно $\omega(p)$, функция $\bar{u}(\xi,\ p)$ является однозначной функцией переменной p. Далее, очевидно, что она мероморфная функция от $z = \omega(p)\lambda$, имеющая в точках

$$z_\kappa = \boldsymbol{\omega}(p_\kappa)\lambda = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}i \quad (k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

простые полюсы.

Разлагая $\bar{u}(\xi,\ p)$ по этим полюсам, мы легко получим

$$\bar{u}(\xi,\ p) = \frac{2\sigma_0 c^2}{Elp^2}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa \sin\mu_{1\kappa}\xi\,\frac{\omega^2(p)}{\omega^2(p)+\mu_{1\kappa}^2} =$$

$$= \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa \sin\mu_{1\kappa}\xi\,\frac{p+r}{p^2(p+r)+\mu_{1\kappa}^2(p+n)}, \tag{2.2.7}$$

где обозначено

$$\mu_{1\kappa} = \frac{(2k+1)\pi}{2\lambda} = \frac{(2k+1)\pi c}{2l}. \tag{2.2.8}$$

Каждое слагаемое в (2.2.7) является дробью, имеющей в плоскости p три полюса, удовлетворяющих уравнению

$$Q_\kappa(p) \equiv p^2(p+r) + \mu_\kappa^2(p+n) = 0. \tag{2.2.9}$$

Здесь через μ_κ обозначена, вообще говоря, произвольная, неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Уравнение (2.2.9) подробно исследовано в цитированной работе [15] А. Ю. Ишлинского.

Там установлено, что полином $Q_\kappa(p)$ может иметь три вещественных корня лишь в том случае, если выполнены одновременно неравенства

$$n < \frac{r}{9} \quad \text{и} \quad \mu_\kappa^2 < \frac{r^2}{3}.$$

При этом все эти корни отрицательны.

Так как μ_κ возрастают вместе с номером k, то очевидно, что по три (отрицательных) вещественных корня могут иметь лишь несколько первых полиномов $Q_\kappa(p)$. Все же остальные имеют по одному вещественному и по два комплексно-сопряженных корня. Установлено далее, что все вещественные части корней — отрицательны. Для простоты мы будем предполагать, что все $Q_\kappa(p)$ имеют комплексные корни.

* То же относится и к напряжениям.

Относительно этих корней, которые мы теперь обозначим через

$$-\alpha_k; \; -\beta_k + i\gamma_k = S_k; \; -\beta_k - i\gamma_k = \overline{S}_k, \tag{2.2.10}$$

справедливы следующие утверждения.

$$1) \; 0 < n \leqslant \alpha_k \leqslant r; \; \alpha_k + 2\beta_k = r; \; \alpha_k |S_k|^2 = n\mu_k^2 \tag{2.2.11}$$

$$2\alpha_k\beta_k + |S_k|^2 = \mu_k^2. \tag{2.2.11'}$$

2) Так как α_k и β_k ограничены, то из предыдущего следует, что при больших значениях μ_k

$$|S_k|^2 = \beta_k^2 + \gamma_k^2 \sim \mu_k^2, \tag{2.2.12}$$

откуда

$$0 < \gamma_k \sim \mu_k. \tag{2.2.12'}$$

3) Далее из (2.2.11) и (2.2.11′) очевидно, что

$$2\alpha_k\beta_k = \frac{|S_k|^2 (\alpha_k - n)}{n},$$

откуда

$$\alpha_k - n = \frac{2\alpha_k\beta_k n}{|S_k|^2} = 0\left(\frac{1}{\mu_k^2}\right). \tag{2.2.13}$$

4) Так как $\alpha_k \geqslant n > 0$, то из (2.2.11) следует, что $\beta_k \to 0$, $\gamma_k \to 0$ при $\gamma_k \to 0$ и, значит, $\alpha_k \to r$. α_k убывает с возрастанием μ_k монотонно, во всяком случае, когда оно находится в интервалах $[n, 2n]$ и $\left[\frac{r-n}{2}, r\right]$* и $\alpha_k \to n$ при $\mu_k \to \infty$. Точка $p = n$ является пределом α_k при $\mu_k \to \infty$.

5) Наконец, из соотношений

$$\alpha_k + 2\beta_k = r, \; \alpha_k \to n$$

следует, что при $\mu_k \to \infty$

$$0 < \beta_k \leqslant \frac{r-n}{2} \tag{2.2.13'}$$

и

$$\beta_k \uparrow \frac{r-n}{2} \text{ при } \alpha_k \downarrow n, \text{ т. е. } \mu_k \to \infty.$$

Теперь очевидно, что каждое слагаемое в ряде (2.2.7) имеет три полюса, лежащих в левой полуплоскости p: по одному вещественному и два комплексно-сопряженных. Вещественные полюсы находятся на отрезке вещественной оси $[-r, -n]$ и точка $p = -n$ является для них точкой сгущения, а значит существенной особенностью для $\overline{u}(\xi, p)$. Вещественные части комплексных корней $-\beta_k$ лежат в интервале $\left[\frac{r-n}{2}, 0,\right)$ а мнимые γ_k безгранично возрастают с ростом номера k (при $\mu_k \to \infty$).

---

* Монотонное убывание не обязательно в интервале $2n < \alpha_k < \frac{r-n}{2}$, если, конечно, $\frac{r-n}{2} > 2n \; (r > 5n)$.

После этих замечаний введем следующие обозначения (см. (2.2.9) и (2.2.10)):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_k &= \left(\frac{\partial Q_k}{\partial p}\right)_{p=-\alpha_k} = (\alpha_k - \beta_k)^2 + \gamma_k^2 \\ A_k &= 3\beta_k^2 - \alpha_k^2 - \gamma_k^2 \\ B_k &= \beta_k(\beta_k^2 - \alpha_k^2 - 3\gamma_k^2) \end{aligned}\right\}^* \tag{2.2.14}$$

Тогда, как это нетрудно проверить,

$$\frac{p+r}{Q_k(p)} = \frac{r}{\mu_k^2 n} - \frac{2\beta_k}{\Delta_k \alpha_k}\,\frac{p}{p+\alpha_k} + \frac{1}{\Delta_k |S_k|^2}\,\frac{A_k p(p+\beta_k) + B_k p}{p^2 + 2\beta_k p + |S_k|^2}. \tag{2.2.15}$$

В дальнейшем у нас будет встречаться одна и та же дробь (2.2.15), но при различных последовательностях μ_k. Чтобы их различать, мы перенумеруем эти последовательности и снабдим их вторым индексом. Все функции от этих последовательностей (полиномы $Q_k(p)$, их корни и т. д.) мы соответственно будем снабжать тем же вторым индексом.

Так, например, в настоящем случае

$$\mu_k = \mu_{1k} = \frac{(2k+1)\pi}{2\lambda}. \tag{2.2.8}$$

Поэтому полином $Q_k(p)$ будем обозначать через $Q_{1k}(p)$, его корни — через $-\alpha_{1k}$, $S_{1k} = -\beta_{1k} + i\gamma_{1k}$ и т. д.

Возвращаясь теперь к ряду (2.2.7), перепишем его так:

$$\bar{u}(\xi, p) = \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sin\mu_{1k}\xi\left\{\frac{r}{\mu_{1k}^2 n} - \frac{2\beta_{1k}}{\Delta_{1k}\alpha_{1k}}\,\frac{p}{p+\alpha_{1k}} + \frac{1}{\Delta_{1k}|S_{1k}|^2}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{A_{1k}p(p+\beta_{1k}) + B_{1k}p}{p^2 + 2\beta_{1k}p + |S_{1k}|^2}\right\} = \frac{\sigma_0 r}{En}x + \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\mu_{1k}\xi}{\Delta_{1k}}\left\{-\frac{2\beta_{1k}}{\alpha_{1k}}\,\frac{p}{p+\alpha_{1k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|S_{1k}|^2}\,\frac{A_{1k}p(p+\beta_{1k}) + B_{1k}p}{p^2 + 2\beta_{1k}p + |S_{1k}|^2}\right\},$$

при этом использовано (2.2.8) и равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\mu_{1k}\xi}{\mu_{1k}^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)\;\frac{\sin(2k+1)\dfrac{\pi x}{2l}}{(2k+1)^2\dfrac{\pi^2}{4\lambda^2}} = \frac{4l^2}{\pi^2 c^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(2k+1)\dfrac{\pi x}{2l}}{(2k+1)^2} =$$

$$= \frac{4l^2}{\pi^2 c^2}\,\frac{\pi^2 x}{8l} = \frac{lx}{2c^2}.$$

Формальное обращение дает

$$u(\xi, t) = \frac{\sigma_0 r}{En}x + \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\mu_{1k}\xi}{\Delta_{1k}}\left\{-\frac{2\beta_{1k}e^{-\alpha_{1k}t}}{\alpha_{1k}} + \frac{e^{-\beta_{1k}t}}{|S_{1k}|^2}(A_{1k}\cos\gamma_{1k}t + \right.$$

$$\left. + \frac{B_{1k}}{\gamma_{1k}}\sin\gamma_{1k}t)\right\}^{**}, \tag{2.2.16}$$

откуда видно, что эта операция законна*** и что ряд (2.2.16) представляет искомые смещения сечений стержня при $t > \lambda - \xi$ $(ct > l - x)$****.

---

* Из (2.2.12) следует, что $A_k \sim \mu_k^2$; $\beta_k \sim \frac{3}{2}(r-n)\,\mu_k^2$; $\Delta_k \sim \mu_k^2$ при больших значениях μ_k.

** Заметим, что коэффициенты этого ряда имеют порядок $\frac{1}{k^2}$.

*** См. теорему I [17, стр. 139].

**** Напомним, что при $t < \lambda - \xi$ $u(\xi, t) = 0$ (см. стр. 192).

Заметим, что при $t \to \infty$

$$u(\xi, t) \to \frac{\sigma_0 r}{En} x,$$

а величина справа есть статическое смещение сечения упругого стержня, умноженное на число $\frac{r}{n} > 1$.

Для вычисления напряжений имеем (см. (2.2.7) и (2.5)):

$$\bar{\sigma}(\xi, p) = \mathrm{E}(p) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{E}{c} \frac{p+n}{p+r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \frac{2\sigma_0 c^2}{El} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \mu_{1k}\xi . \mu_{1k} \frac{p+r}{Q_{1k}(p)} \frac{E}{c} \frac{p+n}{p+r} =$$

$$= \frac{2\sigma_0 c}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu_{1k} \cos \mu_{1k} \xi \frac{p+n}{Q_{1k}(p)} . \tag{2.2.17}$$

Аналогично (2.2.15) имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{p+n}{Q_k(p)} &= \frac{1}{\mu_k^2} + \frac{\alpha_k - n}{\alpha_k \Delta_k} \frac{p}{p+\alpha_k} + \frac{C_k p (p+\beta_k) + F_k p}{\Delta_k (p^2 + 2\beta_k p + |S_k|^2)} \\ C_k &= \frac{n(2\beta_k - \alpha_k)}{\alpha_k |S_k|^2} - 1 \\ F_k &= \frac{n\beta_k}{\alpha_k |S_k|^2} (\alpha_k^2 - |S_k|^2) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.18}$$

Теперь вместо (2.2.17) можно написать

$$\bar{\sigma}(\xi, p) = \frac{2\sigma_0 c}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \mu_{1k}\xi . \mu_{1k} \left\{ \frac{1}{\mu_{1k}^2} + \frac{\alpha_{1k} - n}{\alpha_{1k}\Delta_{1k}} \frac{p}{p+\alpha_{1k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{1k} p (p+\beta_{1k}) + F_{1k} p}{\Delta_{1k} (p^2 + 2\beta_{1k} p + |S_{1k}|^2)} \right\} = \sigma_0 + \frac{2\sigma_0 c}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu_{1k} \cos \mu_{1k}\xi}{\Delta_{1k}} \left\{ \frac{\alpha_{1k} - n}{\alpha_{1k}} \frac{p}{p+\alpha_{1k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{1k} p (p+\beta_{1k}) + F_{1k} p}{p^2 + 2\beta_{1k} p + |S_{1k}|^2} \right\},$$

так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \mu_{1k}\xi}{\mu_{1k}} = \frac{2\lambda}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos (2k+1) \frac{\pi x}{2l}}{2k+1} = \frac{l}{2c} .$$

Как и в предыдущем случае, почленное обращение законно и дает

$$\sigma(\xi, t) = \begin{cases} 0 \quad (\mathrm{ct} < l - x) \\ \sigma_0 + \frac{2\sigma_0 c}{l} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu_{1k} \cos \mu_{1k}\xi}{\Delta_{1k}} \left\{ \frac{\alpha_{1k} - n}{\alpha_{1k}} e^{-\alpha_{1k} t} + \right. \\ \left. + e^{-\beta_{1k} t} \left(C_{1k} \cos \gamma_{1k} t + \frac{F_{1k}}{\gamma_{1k}} \sin \gamma_{1k} t \right) \right\} \quad (\mathrm{ct} > l - x) \end{cases} \tag{2.2.19}$$

Как это нетрудно заметить, ряд сходится для всякого $t > 0$ и $0 \leqslant \xi \leqslant \lambda$, хоть и не абсолютно, так как его коэффициенты имеют порядок $\frac{\mu_{1k}}{\Delta_{1k}} = 0\left(\frac{1}{k}\right)$.

При $\xi = \lambda$ $(x = l)$ и любом t, будет $\sigma = \sigma_0$, а при $t \to \infty$ и любом $\xi < \lambda$, $\sigma(\xi, t) \to \sigma_0$.

Полученные формулы (2.2.16) и (2.2.19) дают искомое решение поставленной задачи о внезапном растяжении стержня силой, которая в дальнейшем остается все время неизменной.

Особый интерес представляет практически важный случай, когда*

$$\lambda r \ll 1, \tag{2.2.20}$$

для которого мы попытаемся отыскать приближенное значение найденного решения (2.2.16) и (2.2.19).

С этой целью, используя описанные на стр. 192, 193 свойства корней полинома $Q_k(p)$ — (2.2.11) — (2.2.13′), заметим, что при выполнении (2.2.20)

$$\frac{\mu_{1k}}{r} \geqslant \frac{\mu_1}{r} = \frac{\pi}{2\lambda r} \gg 1, \tag{2.2.21}$$

и поэтому ** все полиномы $Q_{1k}(p)$ имеют по одному вещественному корню $-\alpha_{1k}$ и по два комплексно сопряженных корня $(-\beta_{1k} + i\gamma_{1k})$.

Далее, пренебрегая малыми величинами более высокого порядка по λr, найдем для всех $k = 0,\ 1,\ 2$ следующее.

1) Из того, что $\alpha_k + 2\beta_k = r$ (см. (2.2.11)) и (2.2.20) следует, что

$$\alpha_k \lambda \ll 1, \quad \lambda\beta_k \ll 1.$$

2) Из того, что $\alpha_k |S_k|^2 = \mu_k^2 n$ (см. (2.2.11)) и из (2.2.21) и ограниченности $\frac{\alpha_k}{n}\left(1 \leqslant \frac{\alpha_k}{n} \leqslant \frac{r}{n},\ \frac{\alpha_k}{r} \leqslant 1\right)$ и $0 < \frac{\beta_k}{r} < 1$ следует, что

$$\frac{|S_k|^2}{r^2} = \frac{\mu_k^2}{r^2}\,\frac{n}{\alpha_k} \gg 1,$$

откуда

$$\frac{|S_k|^2}{r^2} = \frac{\beta_k^2}{r^2} + \frac{\gamma_k^2}{r^2} \approx \frac{\gamma_k^2}{r^2} \gg 1; \qquad \frac{\alpha_k}{|S_k|} \ll 1, \qquad \frac{\beta_k}{|S_k|} \ll 1.$$

3) Из (2.2.13) и 2) следует, что

$$\alpha_k - n = \frac{2\alpha_k\beta_k}{S_k|^2} n \approx 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha_k \approx n.$$

4) Из (2.1.11) теперь следует, что

$$\gamma_k^2 \approx |S_k|^2 = \frac{\mu_k^2 n}{\alpha_k} \approx \mu_k^2,$$

5) из (2.2.11),— что

$$\beta_k = \frac{r - \alpha_k}{2} \approx \frac{r - n}{2},$$

а из (2.2.13) — что

$$\alpha_k - n = \frac{2\alpha_k\beta_k n}{|S_k|^2} \approx \frac{n^2(r-n)}{\mu^2{}_k}.$$

6) Далее, из (2.2.14) и (2.2.18) получаем, что

$$\Delta_k(\alpha_k - \beta_k)^2 + \gamma_k^2 \approx \gamma_k^2 \approx \mu_k^2,$$
$$A_k = 3\beta_k^2 - {}_k^2 - \gamma_k^2 \approx -\gamma_k^2 \approx -\mu_k^2,$$

---

* Нам кажется, что для многих твердых материалов это условие выполняется в сильной степени. Для стали, например, скорость звука $c \cong 5 \cdot 10$ *см/сек*; если так называемое время релаксации $\frac{1}{r}$ принять $\geqslant 60$ сек, то $\lambda r = \frac{l}{c} r \leqslant l \frac{1}{5 \cdot 10^5 \cdot 60} = \frac{l}{3} \cdot 10^{-7}$, где $[l] =$ *см*. Вероятно, что этот случай является практически преобладающим.

** Напомним, что $\mu_{1k}^2 < \frac{r^2}{3}$ является одним из условий того, чтобы все три корня были вещественны.

$$B_k = \beta_k^2(\beta_k^2 - \alpha_k^2 - 3\gamma_k^2) \approx -3\beta_k\gamma_k^2 \approx -\frac{3}{2}(r-n)\mu_k^2,$$

$$C_k = \frac{n(2\beta_k - \alpha_k)}{|S_k|^2} - 1 \approx -1,$$

$$F_k = \frac{\beta_k n}{\alpha_k |S_k|^2}(\alpha_k^2 - |S_k|^2) \approx -\beta_k \approx -\frac{r-n}{2}.$$

Подставим теперь эти приближенные значения в ряд (2.2.16). Мы легко получим (формально)

$$u(x, t) \approx \frac{\sigma_0 r}{En} x +$$

$$+ \frac{2\sigma_0 c^2}{El} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi x}{2l}}{(2k+1)^2 \frac{\pi^2}{4\lambda^2}} \left\{ -\frac{r-n}{2} e^{-nt} + \frac{e^{-\beta_{1k} t}}{\gamma_{1k}^2} \left(-\gamma_{1k}^2 \cos\frac{(2k+1)\pi t}{2\lambda} \right) \right\} =$$

$$= \frac{\sigma_0 r}{En} x - \frac{8\sigma_0 l}{E\pi^2} \left\{ \frac{r-n}{n} e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi x}{2l}}{(2k+1)^2} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{r-n}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi x}{2l} \cos(2k+1)\frac{\pi t}{2\lambda}}{(2k+1)^2} \right\}. \qquad (2.2.30)$$

Первый ряд в правой части (2.2.30) суммируется:

$$\frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi x}{2l}}{(2k+1)^2} = x. \qquad (2.2.31)$$

Второй же

$$\frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi x}{2l} \cos(2k+1)\frac{\pi t}{2\lambda}}{(2k+1)^2} = f(x, t)$$

представляет периодическую функцию времени периода 4λ, имеющую простой механический смысл, который становится очевидным, если заметить, что функция

$$v(x, t) = -\frac{\sigma_0}{E} f(x, t) \qquad (2.2.32)$$

представляет смещение сечений аналогичного, но идеально упругого стержня (с модулем упругости E) около положения равновесия.

Подставляя (2.2.31) и (2.2.32) в (2.2.30), найдем окончательно:

$$u(x, t) \approx \frac{\sigma_0 r}{En} x \left(1 - \frac{r-n}{n} e^{-nt}\right) + e^{-\frac{r-n}{2}t} v(x, t). \qquad (2.2.33)$$

Если повторить аналогичные вычисления по отношению к ряду (2.2.19), то мы получим

$$\sigma(x, t) \approx \sigma_0 + e^{-\frac{r-n}{2}t} S(x, t), \qquad (2.2.34)$$

где

$$S(x, t) = E\frac{\partial v}{\partial x}$$

означает так называемое динамическое усилие, возникающее в соответствующем идеально упругом стержне или, другими словами,— разность между полным усилием в этом стержне и усилием σ_0, отвечающим состоянию покоя.

Таким образом, вместе с точным решением задачи (2.2.16) и (2.2.19), мы получили также приближенное решение (2.2.33) и (2.2.34).

Займемся оценкой его погрешности. Для простоты мы ограничимся рассмотрением смещения свободного конца стержня $x = l$ и сравним его приближенное значение

$$\frac{\sigma_0 rl}{En}\left\{1 - \frac{r-n}{r}e^{-nt}\right\} + e^{-\frac{r-n}{2}}v(l,\ t) = u_1,$$

которое получается из (2.2.33) и (2.2.32) при $x = l$, с его точным значением, которое дается формулой (2.2.16)

$$\frac{\sigma_0 rl}{En} + \frac{2\sigma_0 c^2}{E}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{1k}}\left\{-\frac{2\beta_{1k}e^{-\alpha_{1k}t}}{\alpha_{1k}} + \frac{e^{-\beta_{1k}t}}{|S_{1k}|^2}\left(A_{1k}\cos\gamma_{1k}t + \frac{B_{1k}}{\gamma_{1k}}\sin\gamma_{1k}t\right)\right\} = u.$$

Погрешность приближения

$$\delta u = u - u_1$$

мы отнесем к величине общего предела, к которому стремятся обе величины u и u_1, когда $t \to \infty$:

$$u_\infty = \frac{\sigma_0 rl}{En}.$$

Мы будем иметь *

$$\frac{\delta u}{u_\infty} = \frac{2n}{r\lambda^2}\left\{\frac{r-n}{2n}\lambda^2 e^{-nt} + e^{-\frac{r-n}{2}t}\frac{4\lambda^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\pi t}{2\lambda}}{(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\beta_{1k}}{\Delta_{1k}\alpha_{1k}}e^{-\alpha_{1k}t} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta_{1k}t}}{|S_{1k}|^2\Delta_{1k}}\left(A_{1k}\cos\gamma_{1k}t + \frac{B_{1k}}{\gamma_{1k}}\sin\gamma_{1k}t\right)\right\} = \frac{2n}{r\lambda^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r-n}{n}\frac{e^{-nt}}{\mu_{1k}^2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2\beta_{1k}e^{-\alpha_{1k}t}}{\alpha_{1k}\Delta_{1k}}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta_{1k}t}B_{1k}\sin\gamma_{1k}t}{\gamma_{1k}|S_{1k}|^2\Delta_{1k}} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{r-n}{2}t}\frac{\cos\mu_{1k}t}{\mu_{1k}^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^{-\beta_{1k}t}A_{1k}\cos\gamma_{1k}t}{|S_{1k}|^2\Delta_{1k}}\right)\right\} = \frac{2n}{r\lambda^2}\{S_1 + S_2 + S_3\}.$$

Для дальнейшего заметим, что на основании формул (2.2.11)—(2.2.14) можно произвести следующие оценки:

$$0 < \alpha_{1k} - n = \frac{2\alpha_{1k}^2\beta_{1k}}{\mu_{1k}^2} < \frac{(r-n)\,r\alpha_{1k}\lambda^2}{2} = \theta\alpha_{1k} < \theta r, \tag{a_1}$$

откуда, принимия $r\lambda < 1$, а значит $\theta < \frac{1}{2}$, найдем, что

$$n < \alpha_{1k} < \min\left\{\frac{n}{1-\theta},\ r\right\} = \alpha_0 \tag{a_2}$$

* Здесь использовано равенство

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^2}.$$

Кроме того,

$$2\beta_{1k}=r-\alpha_{1k}=(r-n)-\frac{2\alpha_{1k}^2\beta_{1k}}{\mu_{1k}^2}=\frac{r-n}{1+\frac{\alpha_{1k}^2}{\mu_{1k}^2}} \qquad (a_3),$$

откуда

$$2\beta_0=(r-n)\left(1-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right)<2\beta_{1k}<(r-n) \qquad (a_4).$$

Далее, из

$$|S_{1k}|^2=\frac{n}{\alpha_{1k}}\mu_{1k}^2, \qquad (2.2.11)$$

$$|S_{1k}|^2+2\alpha_{1k}\beta_{1k}=\mu_{1k}^2, \qquad (2.2.11')$$

$$\Delta_{1k}=(\alpha_{1k}-\beta_{1k})^2+\gamma_{1k}^2=\alpha_{1k}^2-2\alpha_{1k}\beta_{1k}+|S_{1k}|^2 \qquad (2.2.14)$$

и принятого условия $\theta<\frac{1}{2}$ следует

$$\Delta_{1k}>|S_{1k}|^2\left(1-\frac{2\alpha_{1k}^2\beta_{1k}}{n\mu_{1k}^2}\right)>\mu_{1k}^2[1-(r-n)r\lambda^2]=\mu_{1k}^2(1-2\theta) \qquad (a_5).$$

Согласно формулам (2.2.14),

$$A_{1k}=3\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2-\gamma_{1k}^2=4\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2-|S_{1k}|^2 \qquad (a_6);$$

$$|B_{1k}|=\beta_{1k}|\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2-3\gamma_{1k}^2|<\beta_{1k}(3|S_{1k}|^2+\alpha_{1k}^2) \qquad (a_7).$$

Наконец,

$$\gamma_{1k}^2=|S_{1k}|^2-\beta_{1k}^2<|S_{1k}|^2=\frac{n}{\alpha_{1k}}\mu_{1k}^2 \qquad (a_8),$$

откуда

$$\gamma_{1k}>\frac{\gamma_{1k}^2}{\mu_{1k}}=\mu_{1k}\left(\frac{n}{\alpha_{1k}}-\frac{\beta_{1k}^2}{\mu_{1k}^2}\right)>\mu_{1k}(1-\theta) \qquad (a_9)$$

и

$$0<\mu_{1k}-\gamma_{1k}=\mu_{1k}\left(\frac{\alpha_{1k}-n}{\alpha_{1k}}+\frac{\beta_{1k}^2}{\mu_{1k}^2}\right)=\frac{2\beta_{1k}r}{\mu_{1k}}<\frac{(r-n)r}{\mu_{1k}} \qquad (a_{10}).$$

Теперь переходим к оценке величин S_i.
Согласно (2.2.14), (a_3), (a_5), (a_1) и (a_2) *

---

* Ниже использованы следующие очевидные оценки:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\frac{\pi^2}{4\lambda^2}}=\frac{\lambda^2}{2}; \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^3}<\frac{\lambda^3}{3}; \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^4}=\frac{\lambda^4}{6};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^5}<\frac{\lambda^5}{9}; \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^6}<\frac{\lambda^6}{14}.$$

$$|S_1| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{r-n}{n} e^{-nt} \frac{1}{\mu_{1k}^2} - \frac{2\beta_{1k} e^{-\alpha_{1k} t}}{\alpha_{1k}\Delta_{1k}} \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-nt} \frac{r-n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| \alpha_{1k}\Delta_{1k} - \frac{2\beta_{1k} n}{r-n} \mu_{1k}^2 e^{-(\alpha_{1k}-n)t} \right|}{\alpha_{1k}\Delta_{1k}\mu_{1k}^2} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-nt} \frac{r-n}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\left(1 - \frac{2\beta_{1k}}{r-n} e^{-(\alpha_{1k}-n)t}\right)}{\alpha_{1k}\Delta_{1k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{1k} \, |\alpha_{1k} - 2\beta_{1k}|}{\Delta_{1k}\mu_{1k}^2} \right\} <$$

$$< e^{-nt} \frac{r-n}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\left(1 - \frac{2\beta_{1k}}{r-n}\right) + \frac{2\beta_{1k} n}{r-n}\left(1 - e^{-(\alpha_{1k}-n)t}\right)}{\alpha_{1k}\mu_{1k}^2 (1-2\theta)} + \frac{\alpha_0 r}{1-2\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{1k}^4} \right\} <$$

$$< \frac{e^{-nt}}{1-2\theta} \frac{r-n}{n} \left\{ \frac{n}{r-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{1k}-n)(1+2\beta_{1k} t)}{\alpha_{1k}\mu_{1k}^2} + \alpha_0 r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{1k}^4} \right\} <$$

$$< \frac{e^{-nt}}{1-2\theta} \frac{(r-n)}{n} \left\{ \alpha_0 \left[1 + (r-n)t + \frac{r}{n} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{1k}^4} \right\} =$$

$$= \frac{e^{-nt} (r-n) \alpha_0 \lambda^4}{6(1-2\theta)} \left[1 - (r-n)t + \frac{r}{n} \right] \qquad (b_1).$$

Далее, учитывая (a_4), (a_7), (a_9) и (a_2) найдем, что

$$|S_2| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta_{1k} t} B_{1k} \sin \gamma_{1k} t}{\gamma_{1k} |S_{1k}|^2 \Delta_{1k}} \right| < e^{-\beta_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{1k} (3|S_{1k}|^2 + \alpha_{1k}^2)}{\gamma_{1k} |S_{1k}|^2 \Delta_{1k}} <$$

$$< e^{-\beta_0 t} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3\frac{r-n}{2}}{\gamma_{1k}\Delta_{1k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{r-n}{2}\alpha_{1k}^3}{\gamma_{1k} n \mu_{1k}^2 \Delta_{1k}} \right\} < \frac{e^{-\beta_0 t}(r-n)}{2(1-\theta)(1-2\theta)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{\mu_{1k}^3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^3}{n\mu_{1k}^2} \right\} < \frac{e^{-\beta_0 t}(r-n)\lambda^3}{2(1-\theta)(1-2\theta)} \left\{ 1 + \frac{\alpha_0^3 \lambda^2}{9n} \right\} \qquad (b_2)$$

Наконец, согласно (2.2.14), (a_6) (a_{10}), и (a_2):

$$|S_3| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{r-n}{2}t} \frac{\cos \mu_{1k} t}{\mu_{1k}^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta_{1k}} A_{1k} \cos \gamma_{1k} t}{|S_{1k}|^2 \Delta_{1k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{r-n}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\cos \mu_{1k} t - \cos \gamma_{1k} t|}{\mu_{1k}^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{e^{-\frac{r-n}{2}t}}{\mu_{1k}^2} + \frac{A_{1k} e^{-\beta_{1k} t}}{|S_{1k}|^2 \Delta_{1k}} \right| =$$

$$= e^{-\frac{r-n}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\left| \sin \frac{\mu_{1k} - \gamma_{1k}}{2} t \sin \frac{\mu_{1k} + \gamma_{1k}}{2} t \right|}{\mu_{1k}^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|S_{1k}|^2 \mu_{1k}^2 \Delta_{1k}} \left| e^{-\frac{r-n}{2}t} |S_{1k}|^2 (|S_{1k}|^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha_{1k}^2 - 2\alpha_{1k}\beta_{1k}) + e^{-\beta_{1k} t} \mu_{1k}^2 (4\beta_{1k}^2 - \alpha_{1k}^2 - |S_{1k}|^2) \right| < e^{-\frac{r-n}{2}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu_{1k} - \gamma_{1k}) t}{\mu_{1k}^2} +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{|S_{1k}|^2\mu_{1k}^2\Delta_{1k}}\left|\,|S_{1k}|^2\mu_{1k}^2\left(e^{-\frac{r-n}{2}t}\frac{n}{\alpha_{1k}}-e^{-\beta_{1k}t}\right)+e^{-\frac{r-n}{2}t}\mu_{1k}^2(n\alpha_{1k}-\right.$$

$$\left.-2n\beta_{1k}+4\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2)+\mu_{1k}^2(4\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2)\left(e^{-\beta_{1k}t}-e^{-\frac{r-n}{2}t}\right)\right|<$$

$$<e^{-\frac{r-n}{2}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r-n)rt}{\mu_{1k}^3}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\beta_0 t}\alpha_{1k}^2\beta_{1k}t}{\Delta_{1k}\mu_{1k}^2}+e^{-\frac{r-n}{2}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{2\alpha_{1k}^3\beta_{1k}}{\mu_{1k}^2}+(r^2-n^2)}{|S_{1k}|^2\Delta_{1k}}+$$

$$+e^{-\beta_0 t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|4\beta_{1k}^2-\alpha_{1k}^2|\,\alpha_{1k}^2\beta_{1k}t}{|S_{1k}|^2\Delta_{1k}\mu_{1k}^2}<e^{-\frac{r-n}{2}t}\left[(r-n)rt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{(r^2-n^2)\alpha_0}{n(1-2\theta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^4}+\frac{(r-n)\alpha_0^4}{n(1-2\theta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^6}\right]+e^{-\beta_0 t}\frac{t(r-n)\alpha_0^2}{2(1-2\theta)}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^4}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_0 r^2}{n\mu_{1k}^6}\right]<e^{-\frac{r-n}{2}t}\frac{(r-n)\lambda^3}{3}\left[rt+\frac{(r+n)\alpha_0\lambda}{2n(1-2\theta)}+\frac{3\alpha_0^4\lambda^3}{14n(1-2\theta)}\right]+$$

$$+e^{-\beta_0 t}\frac{t(r-n)\alpha_0^2\lambda^4}{12(1-2\theta)}\left[1+\frac{3\alpha_0 r^2\lambda^2}{7n}\right]\qquad(b_3).$$

Собирая (b_1), (b_2) и (b_3), находим окончательно оценку величины относительной погрешности

$$\left|\frac{\delta u}{u_\infty}\right|<\frac{n(r-n)\lambda}{r(1-2\theta)}\left\{e^{-\beta_0 t}\left[\frac{1+\frac{\alpha_0^3\lambda^2}{9n}}{1-\theta}+\frac{\alpha_0^2\lambda t}{12}\left(1+\frac{3\alpha_0 r^2\lambda^2}{7n}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{r-n}{2}t}\left[\frac{2}{3}rt(1-2\theta)+\frac{(r+n)\alpha_0\lambda}{3n}+\frac{\alpha_0^4\lambda^3}{7n}\right]+\frac{e^{-nt}\alpha_0\lambda}{3}\left[1+\frac{r}{n}+(r-n)t\right]\right\}\quad(b_4),$$

которая пригодна для всех $r\lambda<1$ и любого $t>0$.

Особый интерес представляют случаи малых значений параметра $r\lambda$, для которых можно (b_4) упростить.

Положим, что

$$\lambda r<\frac{1}{2},\qquad \theta=\frac{(r-n)r\lambda^2}{2}<\frac{1}{8}\qquad(b_5).$$

Тогда нетрудно проверить, что если в (b_4) сохранить лишь члены, содержащие первую степень параметра λr, а остальные оценить сверху, то можно легко получить более простую оценку

$$\left|\frac{\delta u}{u_\infty}\right|<\frac{(r-n)n\lambda}{r}e^{-\frac{r-n}{2}t}\left(1+\frac{2rt}{3}\right)+\frac{16}{15}\lambda^2r^2\left(1+\frac{5}{2}\lambda r\right),\qquad(b_6),$$

которая пригодна для всех $t>0$ и любого $\lambda r<\frac{1}{2}$.

Заменяя, наконец, правую часть (b_6) ее наибольшим значением, получим еще более простую оценку

$$\frac{\delta u}{u_\infty}<e^{-\frac{r+3n}{4r}}\frac{4n\lambda}{3}+\frac{16}{15}\lambda^2r^2\left(1+\frac{5}{2}\lambda r\right)<\frac{16}{15}\left[n\lambda+r^2\lambda^2\left(1+\frac{5}{2}r\lambda\right)\right]\qquad(b_7),$$

которой, однако, достаточно, чтобы считать рассматриваемое приближение (2.2.33) оправданным и чтобы судить о пределах его пригодности.

Как мы уже замечали на стр. 194, по-видимому, случай $\lambda r\ll 1$ является практически весьма расспространенным. Но тогда из оценки (b_7) следует, что практически в большинстве случаев, вместо громоздкого точного решения задачи (2.2.16) можно с высокой степенью точности пользоваться более простым выражением (2.2.33).

Поэтому рассмотрим приближение (2.2.33) и (2.2.34) несколько подробнее.

Прежде всего следует отметить, что (2.2.33) и (2.2.34) связаны между собой соотношением, которое лишь с точностью до величин порядка λr совпадает с основным законом деформации стержня (2.2) или (2.3).

Далее, заметим, что (2.2.33) и (2.2.34) представлены в виде суммы двух слагаемых каждая. Смысл вторых слагаемых был нами выяснен выше. Очевидно, что первые слагаемые совпадают * с (2.2.1) и (2.2.1′), т. е. как раз с первой группой тех формул, о которых шла речь в начале параграфа 2.2 в связи с опытом на ползучесть и законность применения которых мы имели в виду выяснить.

Нетрудно проверить, что (2.2.1) и (2.2.1′), которые можно переписать в виде $(t > 0)$

$$\sigma(x, t) = \sigma_0; \quad u(x, t) = \frac{\sigma_0 r}{En}\left(1 - \frac{r-n}{r} e^{-nt}\right), \tag{2.2.35}$$

удовлетворяют уравнению движения, если в нем отбросить силы инерции, т. е. уравнению равновесия

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

основному закону деформации стержня (2.2) и граничным условиям для рассматриваемого нами случая растяжения стержня постоянной силой σ_0.

Для краткости мы в дальнейшем будем называть (2.2.35) квази-статическим решением задачи, а соответствующую ему деформацию — квази-статической деформацией.

Теперь мы можем сделать следующее заключение.

Весьма сложное движение стержня при наличии ползучести и релаксации можно, в случае $\lambda r \ll 1$, представить как наложение на квази-статическое удлинение стержня его упругих колебаний около положения равновесия с амплитудой, умноженной на $e^{-\frac{r-n}{2}t}$ (благодаря чему колебания оказываются затухающими).

Что же касается квази-статического решения задачи, то теперь ясно, что оно является лишь частью полного решения, и поэтому отвечающие ему смещения — квази-статическая деформация (2.2.1), на некотором, по крайней мере, отрезке времени после начала опыта должны и по величине и по характеру своему резко отличаться от их точного значения, согласно (2.2.33) и (2.2.34) **.

Если же к условию малости λr добавить еще условие $\frac{r-n}{2} > n$, то тогда, как это видно из (2.2.33) и (2.2.34), квази-статическое решение (2.2.35) или (2.2.1) будет хорошо апроксимировать полное решение для больших значений t.

---

* В (2.2.1) дано $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, а первое слагаемое в (2.2.33) является частью $u(x, t)$.

** Можно утверждать больше. Нетрудно заметить, что при t, достаточно малых по сравнению со временем релаксации $\frac{1}{r}$ $(rt \ll 1)$, с точностью до малых порядка rt, от (2.2.33) остается только упругая часть решения, т. е. упругие колебания около исходного состояния покоя. Поэтому можно утверждать, что согласно (2.2.33) процесс начинается как идеально упругий. Легко проверить, что это утверждение остается справедливым и в общем случае (λr — произвольное).

Можно, таким образом, сказать, что при выполнении обоих указанных выше условий, формулы (2.2.1) или (2.2.35) дают асимптотическое решение задачи при больших значениях t.

Нам представляется интересным в заключение сравнить квази-статическое решение задачи (2.2.35) о растяжении стержня с ползучестью и релаксацией с аналогичным решением обычной теории упругости

$$\sigma = \sigma_0, \quad u(x, t) = \frac{\sigma_0 x}{E}. \tag{2.2.36}$$

Во-первых, (2.2.36) является точным решением общего уравнения движения стержня, в то время как (2.2.35) ему не удовлетворяет вовсе. Действительно, (2.2.35) получено в предположении $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv 0$, но оно ему очевидным образом противоречит.

Во-вторых, как мы только что выяснили, при некоторых дополнительных, но, вероятно, не очень ограничительных условиях (2.2.35) может служить асимптотическим решением задачи о колебаниях стержня, тогда как (2.2.36) этим свойством не обладает. Это и естественно, так как во втором случае стержень идеально упругий, а в основном законе деформации среды в нашем случае учитывается «вязкость».

В связи с этим следует заметить, что результаты (2.2.33) и (2.2.34) в какой-то степени освещают с точки зрения рассматриваемой теории важный вопрос о внутреннем «трении» в твердых телах, за меру которого здесь естественно принять величину декремента затухания $\eta = \frac{r-n}{2}$*.

Наконец, в случае упругого стержня вовсе не существенно, каким способом было осуществлено загружение, лишь бы в некоторый момент $t=0$ были выполнены начальные условия, соответствующие (2.2.36). Начиная с этого момента и неопределенно долго имеет место состояние покоя.

---

* О внутреннем «трении» см. например, [4, гл. V]. Заметим, что затухание в (2.2.33) и (2.2.34) оказалось по характеру таким же, как и в случае системы с одной степенью свободы и сопротивлением, пропорциональным скорости. Это позволило перенести терминологию.

Здесь уместно отметить следующее. (2.2.33) получено в (2.2.30) путем замены β_{1k} на $\frac{r-n}{2}$, γ_{1k} на $\mu_{1k} = \frac{(2k+1)\pi}{2\lambda}$. Если сохранить в (2.2.30) точные значения β_{1k}, мы получим вместо (2.2.33)

$$u(x, t) \approx \frac{\sigma_0 r}{En} x \left\{1 - \frac{r-n}{r} e^{-nt}\right\} - \frac{8\sigma_0 l}{E\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin (2k+1)\frac{\pi x}{2l} \cos (2k+1)\frac{\pi t}{2\lambda}}{(2k+1)^2} e^{-\beta_{1k} t} =$$

$$= \frac{\sigma_0 r}{En} x \left\{1 - \frac{r-n}{r} e^{-nt}\right\} + \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t)\, e^{-\beta_{1k} t}, \tag{2.2.33'}$$

где $v_k(x, t)$ означает k-ую форму колебания упругого стержня около его положения равновесия. Мы получаем ряд, который уже не представляет собой простой суммы гармоник упругого колебания стержня, умноженной на общий затухающий множитель $e^{-\frac{r-n}{2}t}$, а в котором каждая гармоника упругого колебания умножается на свой затухающий множитель $-e^{-\beta_{1k} t}$.

Замечая теперь, что $\alpha_{1k} \approx n \left(\beta_{1k} \approx \frac{r-n}{2}\right)$, то есть, что все α_{1k} лежат в узкой окрестности точки n, и вспоминая замечание о монотонности последовательности α_k ($\alpha_k > \alpha_{k+1}$) в этом интервале (так что $\beta_k < \beta_{k+1}$), сделанное на стр. 191, можно заключить, что каждая последующая гармоника затухает быстрее предыдущей. Возможно, что такая форма (2.2.33′) решения также представляет интерес.

В нашем же случае такого состояния покоя (при постоянной растягивающей силе) вовсе не существует. Состояние же близкое к покою, т. е. состояние весьма медленного движения, которое описывается квазистатическим решением, наступает, благодаря наличию затухания, по-видимому, спустя какой-то достаточно большой промежуток времени после начала процесса. Длина этого промежутка должна существенно зависеть от характера загружения стержня, так как уравнения учитывают «историю» всего процесса деформации.

Чтобы сделать этот промежуток времени наиболее коротким, а, значит, состояние стержня близким к состоянию покоя, естественно отказаться от внезапного приложения силы (случай, рассмотренный нами в этом параграфе) и приложить ее постепенно.

Поэтому в следующем параграфе мы коротко остановимся на случае непрерывного загружения стержня.

2.2.2. Непрерывное приложение растягивающей силы

Пусть теперь сила, приложенная к концу $x=l$ стержня сперва, в промежутке времени $[0, t_0]$, постепенно возрастает от нуля до σ_0, а затем остается постоянной. Для простоты примем, что это возрастание силы пропорционально времени.

Соответствующее этому случаю граничное условие записывается так:

$$\sigma_1(l, t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{t_0} t & 0 < t \leqslant t_0 \\ \sigma_0 & t > t_0. \end{cases} \tag{2.2.37}$$

Тогда, согласно (2.5) и (2.2.4),

$$\bar{\sigma}_1(l, p) \equiv \frac{\mathrm{E}(p)\,\omega(p)}{c} C(p) \operatorname{ch} \omega(p) \lambda = \frac{\sigma_0}{t_0} p\,(1 - e^{-t_0 p}),$$

откуда в силу (2.6′),

$$C(p) = \frac{\sigma_0 c}{E t_0} \frac{\omega(p)(1 - e^{-t_0 p})}{p^3 \operatorname{ch} \omega(p) \lambda}$$

и

$$\bar{u}_1(\xi, p) = \frac{\sigma_0 c}{E t_0} \frac{\omega(p) \operatorname{sh} \omega(p) \xi}{p^3 \operatorname{ch} \omega(p) \lambda} (1 - e^{-t_0 p}) = \bar{u}(\xi, p) \frac{1 - e^{-t_0 p}}{t_0 p}; \tag{2.2.38}$$

$$\bar{\sigma}_1(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{t_0} \frac{\operatorname{ch} \omega(p) \xi}{p \operatorname{ch} \omega(p) \lambda} (1 - e^{-t_0 p}) = \bar{\sigma}(\xi, p) \frac{1 - e^{-t_0 p}}{t_0 p}, \tag{2.2.39}$$

где $\bar{u}(\xi, p)$ и $\bar{\sigma}(\xi, p)$ относятся к предыдущему случаю и даны в (2.2.6) и (2.2.17), а их оригиналы — в (2.2.16) и (2.2.19).

Очевидно, что

$$u_1(\xi, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_0} \displaystyle\int_0^t u(\xi, \tau)\, d\tau & 0 < t < t_0 \\ \dfrac{1}{t_0} \displaystyle\int_{t-t_0}^t u(\xi, \tau)\, d\tau & t > t_0, \end{cases}$$

и аналогично для $\sigma_1(\xi, t)$.

Мы не станем выписывать явные выражения для u_1 и σ_1, хотя это и не представляет труда, а ограничимся лишь вычислением приближения этих функций в случае малых значений λr.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, легко проверить, что с точностью до величин порядка λr для $t > t_0$ (после окончания загружения)

$$u_1(x,\ t) \approx \frac{\sigma_0 r}{En} x \left\{1 + \frac{r-n}{rn} \frac{1-e^{nt_0}}{t_0} e^{-nt}\right\} + \frac{e^{-\frac{r-n}{2}t}}{t_0} \left[\int_0^t v(x,\ \tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - e^{\frac{r-n}{2}t_0} \int_0^{t-t_0} v(x,\ \tau)\, dr\right], \qquad (2.2.40)$$

где $v(x, t)$ — упругое смещение стержня, данное в (2.2.32).

При $t \to \infty$ $u_1(x, t)$ будет стремиться к $\frac{\sigma_0 r}{En} x$, т. е. так же, как $u(x, t)$, согласно (2.2.16), — при внезапном приложении силы.

По поводу (2.2.40) можно заметить следующее.

Во-первых, динамическая часть решения для соответствующего упругого случая, очевидно, имеет вид *

$$v_1(x, t) = \frac{1}{t_0} \int_{t-t_0}^{t} v(x, \tau)\, d\tau,$$

и не совпадает с выражением, стоящим в квадратных скобках второго слагаемого в (2.2.40). Первое слагаемое также отличается от квази-статического удлинения стержня. Поэтому, если в случае внезапного приложения силы можно было общее смещение приближенно составить из двух частей, каждая из которых имеет простой смысл, то здесь этого сделать нельзя.

Во-вторых, нетрудно проверить, что после интегрирования второй член в (2.2.40) можно представить в виде

$$e^{-\frac{r-n}{2}t} \frac{\lambda}{t_0} f_1(x, t) \ \ldots \ (i),$$

где $\lambda f_1(x, t) = 0(\lambda)$.

Поэтому, если $t_0 \approx \lambda$, т. е. длительность t_0 процесса загружения стержня сравнима с λ ** то, удерживая в (2.2.40) только малые члены первого порядка по nt_0 ($nt_0 \approx n\lambda \ll 1$), легко найдем, что (2.2.40) переходит в (2.2.33), т. е. получаем предыдущий результат. Таким образом, можно заключить, что под внезапным (быстрым) приложением нагрузки в случаях $\lambda r \ll 1$ следует понимать случай, когда длительность загружения t_0 сравнима с периодом собственных колебаний упругого стержня ($\tau = 4\lambda$).

Если же $t_0 \gg \lambda$, то-есть, согласно предыдущему, загружение производится медленно, и если ограничиться точностью порядка $\frac{\lambda}{t_0}$, то второй член, как имеющий порядок $\frac{\lambda}{t_0}$ (см. (i)) по сравнению с первым, можно отбросить и мы получаем вместо (2.2.40) другое приближение:

$$u_1(x, t) \approx \frac{\sigma_0 r}{En} x \left\{1 + \frac{r-n}{rn} \frac{1-e^{-nt_0}}{t_0} e^{-nt}\right\} \quad t \geqslant t_0, \qquad (2.2.41)$$

аналогичное (2.2.35), но снова с ним не совпадающее.

---

* Любопытно, что здесь имеет место интерференция колебаний, благодаря которой упругие колебания могут аннулироваться. В нашем же случае этого не происходит, ввиду наличия множителя $e^{\frac{r-n}{2}t_0}$ у второго интеграла в (2.2.40).

** Т. е. скорость его сравнима со скоростью $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ распространения звука.

Наконец, сравнивая (2.2.41) и (2.2.35), заметим следующее.

Одно условие их пригодности — общее для обоих: $\lambda r \ll 1$.

Вторыми условиями являются: для (2.2.41) — $t_0 \gg \lambda$, а для (2.2.35) $r - n > 2n$. При этом напоминаем, что (2.2.35) пригодно лишь для достаточно больших t, в то время как (2.2.41) годится для любых $t \geqslant t_0$. Это обстоятельство должно, как нам кажется, повлиять на выбор контрольного опыта.

На этом мы заканчиваем рассмотрение задач, связанных с явлением ползучести, и переходим к задачам, относящимся к явлению релаксации напряжений.

2.2.3. Внезапное растяжение стержня

Как было указано в начале этого параграфа, явление ползучести наблюдается на опыте с постоянной силой, а явление релаксации — на опыте растяжения стержня на постоянную величину u_0. При этом происходит падение напряжений (релаксация) во времени. Закон этого изменения, который в рамках рассматриваемой теории принимается по (2.2.2), мы сейчас перепишем так:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{u_0 n}{lr}\left\{1 + \frac{r-n}{n} e^{-rt}\right\}; \qquad u(x, t) = u_0 \frac{x}{l}. \tag{2.2.42}$$

Так же, как (2.2.35) для постоянной силы, это выражение является решением уравнения равновесия. В предыдущем параграфе мы показали, что названное там квази-статическим решением (2.2.35) вовсе не является решением уравнения движения.

В отличие от этого легко видеть, что (2.2.42) удовлетворяет общему уравнению движения, основному закону деформации (2.2), граничным условиям

$$u(0, t) \equiv 0; \quad u(l, t) \equiv u_0$$

и начальным условиям*

$$u(x, 0) = \frac{u_0 x}{l}; \quad \dot{u}(x, 0) = 0.$$

Таким образом, (2.2.42) является точным решением задачи о внезапном растяжении стержня на постоянную величину u_0.

Следует подчеркнуть, что это справедливо лишь при случае, если в начальный момент $t = 0$ все сечения получают внезапно смещения, пропорциональные расстоянию от закрепленного конца $x = 0$. Заметим, что при этом сила не остается постоянной.

Практически, однако, такое растяжение осуществить в точности, по-видимому, невозможно. Нужно полагать, что состояние, близкое к указанному, можно осуществить лишь более или менее быстрым непрерывным растяжением стержня из естественного положения покоя.

Поэтому в следующем параграфе мы приведем решение для этого случая.

2.2.4. Непрерывное растяжение стержня на заданную величину

Как и в случае непрерывного загружения стержня, примем наиболее простой линейный закон удлинения стержня. Другими словами, положим, что удлинение стержня производится на протяжении отрезка времени $[0, t_0]$ по закону

$$u(l, t) = \frac{u_0}{t_0} t \qquad 0 < t \leqslant t_0,$$

а затем остается неопределенно долго постоянным.

* Во всем предыдущем мы принимали оговоренные в начале главы условия $u(x, 0) = 0$, $\dot{u}(x, 0) = 0$.

Для определения произвольной функции $C(p)$ в (2.2.4) имеем, следовательно, условие

$$\bar{u}(l, p) = \frac{u_0}{t_0 p}(1 - e^{-pt_0}),$$

которое приводит к уравнению

$$C(p)\operatorname{sh}\omega(p)\lambda = \frac{u_0}{t_0 p}(1 - e^{-pt_0}),$$

откуда по (2.2.4)

$$\bar{u}(\xi, p) = \frac{u_0}{t_0 p}\frac{\operatorname{sh}\omega(p)\xi}{\operatorname{sh}\omega(p)\lambda}(1 - e^{-pt_0}). \tag{2.2.43}$$

Обозначим через

$$\bar{u}_1(\xi, p) = \frac{u_0}{t_0 p}\frac{\operatorname{sh}\omega(p)\xi}{\operatorname{sh}\omega(p)\lambda} \div u_1(\xi, t). \tag{2.2.44}$$

Тогда, очевидно:

$$u(\xi, t) = \begin{cases} u_1(\xi, t) & 0 < t < t_0) \\ u_1(\xi, t) - u_1(\xi, t - t_0) & t > t_0. \end{cases} \tag{2.2.45}$$

Для определения $u_1(\xi, t)$, разложим $\bar{u}_1(\xi, p)$ по ее полюсам. Мы получим аналогично (2.2.7)

$$\bar{u}_1(\xi, p) = \frac{u_0\xi}{t_0\lambda p} + \frac{2u_0}{\pi t_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{kp}\frac{\omega^2(p)}{\omega^2(p) + \frac{k_2\pi^2}{\lambda^2}} =$$

$$= \frac{u^0 x}{lt_0 p} + \frac{4u_0}{\pi t_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}\frac{p(p+r)}{p^2(p+r) + \frac{k^2\pi^2}{\lambda^2}(p+n)}.$$

Если мы теперь обозначим через

$$Q_{2k}(p) = p^2(p+r) + \mu_{2k}^2(p+n), \quad \mu_{2k} = \frac{k\pi}{\lambda},$$

все корни этого полинома и функции от них снабдим значком (2) внизу, тогда, как это легко проверить,

$$u_1(\xi, t) = \frac{u_0 xt}{t_0 l} + \frac{4u_0}{\pi t_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k}\left\{\frac{2\beta_{2k}e^{-\alpha_{2k}t}}{\Delta_{2k}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\beta_{2k}t}\left[\frac{\beta_{2k}}{\Delta_{2k}}\cos\gamma_{2k}t + \left(\frac{2\beta_{2k}(\alpha_{2k} - \beta_{2k})}{\Delta_{2k}} + 1\right)\frac{\sin\gamma_{2k}t}{\gamma_{2k}}\right]\right\}. \tag{2.2.46}$$

Так как дальнейшие вычисления очевидны, то на этом мы оставим точное решение задачи (2.2.45) и обратимся к вычислению приближенного решения для случаев $\lambda r \ll 1$.

Чтобы его получить, подставим в (46) приближенные значения входящих в него параметров, согласно результатам 1) —6) на стр. 196.

Мы легко получим

$$u_1(x, t) \approx \frac{u_0 xt}{lt_0} - \frac{2u_0\lambda}{\pi^2 t_0}e^{-\frac{r-n}{2}t}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{\lambda}}{k}, \tag{2.2.47}$$

и для $t > t_0$, согласно (2.2.45),

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_1(x, t - t_0) \approx \frac{u_0 x}{l} -$$

$$- e^{-\frac{r-n}{2}t} \frac{2u_0\lambda}{\pi^2 t_0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{k^2} \left\{\sin\frac{k\pi t}{\lambda} - e^{\frac{r-n}{2}t_0} \sin\frac{k\pi}{\lambda}(t - t_0)\right\}. \quad (2.2.48)$$

Аналогично получим для напряжений $(t > t_0)$

$$\sigma(x, t) \approx \frac{u_0 En}{lr}\left\{1 + \frac{r-n}{nrt_0}(1 - e^{rt_0}) e^{-rt_0}\right\} +$$

$$+ e^{-\frac{r-n}{r}t} \frac{2u_0 E}{\pi l} \frac{\lambda}{t_0} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos\frac{k\pi x}{l}}{k} \left\{\sin\frac{k\pi t}{\lambda} - e^{\frac{r+n}{2}t_0} \sin\frac{k\pi(t - t_0)}{\lambda}\right\}. \quad (2.2.48')$$

Чтобы не произошло разрыва, время растяжения должно быть, по-видимому, не слишком малым. Поэтому имеет смысл искать дальнейшее приближение для случая $t_0 \gg \lambda$, который согласно принятой нами терминологии соответствует «медленному» растяжению стержня.

Но в этом случае динамические члены имеют порядок $\frac{\lambda}{t_0}$ по сравнению с первыми и поэтому могут быть отброшены.

Мы получаем, следовательно, для случая: $\frac{\lambda}{t_0} \ll 1$, $r\lambda \gg 1$

$$u(x, t) \approx \frac{u_0 x}{l}, \; t_0$$

$$\sigma(x, t) \approx \frac{u_0 En}{lr}\left\{1 + \frac{r-n}{nr}\frac{1 - e^{rt_0}}{t_0} e^{-rt}\right\} \quad (t > t_0). \quad (2.2.49)$$

В заключение заметим, что формулы (2.2.49), как и (2.2.41), справедливы для любого $t \geqslant t_0$, если, конечно, вычисления проводить с точностью до $\frac{\lambda}{t_0} \ll 1$. Они не совпадают с (2.2.42), но имеют одинаковые пределы при $t \to \infty$.

2.3. Вынужденные гармонические колебания

В качестве следующего примера продольных колебаний стержней с ползучестью и релаксацией, расмотрим задачу о стержне конечной длины l, на свободном конце которого приложена гармоническая сила

$$\sigma(l, t) = \sigma_0 \sin mt.$$

Эта задача соответствует эксперименту на определение внутреннего трения в твердых телах так называемым резонансным методом*.

Для определения произвольной функции $C(p)$ в (2.2.4) имеем, согласно (2,5), следующее уравнение:

$$\sigma_0 \frac{pm}{p^2 + m^2} \equiv \bar{\sigma}(l, p) = \mathrm{E}(p) \frac{\omega(p)}{c} C(p) \operatorname{ch} \omega(p) \lambda,$$

откуда (2.2.4)

$$u_2(\xi, p) = \frac{\sigma_0 c}{Ep^2} \frac{\omega(p)\, sh\, \omega(p)\, \xi}{\operatorname{ch} \omega(p) \lambda} \frac{pm}{p^2 + m^2} = \bar{u}(\xi, p) \; \frac{pm}{p^2 + m^2}, \quad (2.3.1)$$

где $u(\xi, p)$ соответствует задаче о внезапном приложении силы σ_0 и дано в (2.2.6), а соответствующий функции $\bar{u}(\xi, p)$ оригинал $u(\xi, t)$ дан в (2.2.16).

* См. [5], гл. VI, § 2, а также гл. V.

Мы имеем, очевидно,

$$u_2(\xi,\ t) = m\int_0^t u(\xi,\ \tau)\cos m(t-\tau)\,d\tau$$

и после несложных вычислений, которые мы опускаем, мы получим

$$u_2(x,\ t) = \frac{2\sigma_0 c^2 m}{El}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\mu_{1k}\xi}{\Delta_{1k}}\left\{\frac{2\beta_{1k}e^{-\alpha_{1k}t}}{m^2+\alpha_{1k}^2} + \frac{e^{-\beta_{1k}t}}{|S_{1k}|\sqrt{D_{1k}}}\left[A_{1k}\sin(\gamma_{1k}t-\varphi_{1k}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\beta_{1k}}{\gamma_{1k}}\sin(\gamma_{1k}t+\varphi_{1k})\right]\right\} + \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\mu_{1k}\xi}{D_{1k}(m^2+\alpha_{1k}^2)}\cdot$$

$$(M_{1k}\cos mt + N_{1k}\sin mt), \tag{2.3.2}$$

где $\alpha_{1k},\ \beta_{1k},\ \gamma_{1k},\ S_{1k},\ A_{1k},\ B_{1k},\ \Delta_{1k}$ — те же, что в (2.2.16), а

$$\left.\begin{aligned} M_k &= -\mu_k^2(r-n)m,\ N_k = m^2(\mu_k^2-m^2)+r(n\mu_k^2-rm^2) \\ D_k &= (m^2-|S_k|^2)^2+4m^2\beta_k^2 = \frac{m^2(m^2-\mu_k^2)^2+(rm^2-n\mu_k^2)^2}{m^2+\alpha_k^2} \\ \operatorname{tg}\varphi_k &= \frac{\gamma_k(|S_k|^2-m^2)}{\beta_k(|S_k|^2+m^2)} \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

Относительно полученного решения (2.3.2) можно заметить следующее. Общее колебание стержня состоит в этом случае, как обычно, из затухающих колебаний — первая сумма в (2.3.2), и гармонических вынужденных колебаний — вторая сумма.

Амплитуда затухающих колебаний зависит от частоты возмущающей силы.

Вынужденные колебания имеют частоту возмущающей силы, но сдвинутую фазу. Резонанс имеет место, когда частота возмущающей силы приближается к модулю, скажем $|S_{1k}|$, одного из корней полиномов $Q_{1k}(p)$.

Мы опускаем вычисление напряжений, которые получаются аналогично смещениям по формуле

$$\sigma_2(x,\ t) = m\int_0^t \sigma(x,\ t)\cos m(t-\tau)\,d\tau,$$

где $\sigma(x,\ t)$ дано в (2.2.19), и переходим к нахождению представляющегося нам наиболее интересным приближенного значения вынужденных установившихся колебаний для случаев малых λr.

Для простоты мы будем в дальнейшем следить лишь за концом стержня $x = l\ (\xi = \lambda,\ \sin\mu_{1k}\xi = \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k)$ и рассмотрим установившуюся часть колебаний этого конца (см. (2.3.2) и (2.3.3))

$$u_в(l,\ t) = \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sqrt{m^2+r^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(mt+\psi_{1k})}{\sqrt{D_{1k}(m^2+\alpha_{1k}^2)}} =$$

$$= \frac{2\sigma_0 c^2}{El}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_{1k}\cos mt + N_{1k}\sin mt}{D_{1k}(m^2+\alpha_{1k}^2)} \tag{2.3.2'}$$

для следующих двух случаев.

1) Случай, далеко отстоящий от резонанса.

Положим, что частота возмущающей силы m не очень велика, так что* $m\lambda \ll 1$.

Тогда, если отбросить величины порядка λr и λm, мы легко найдем, что $D_{1k} \approx |S_{1k}|^4 \approx \mu_{1k}^4$, $N_{1k} \approx \mu_{1k}^2 (m^2 + rn)$, $\alpha_{1k} \approx n$,

$$\operatorname{tg} \psi_{1k} = \frac{M_{1k}}{N_{1k}} \approx \frac{(r-n)\, m\mu_{1k}^2}{(m^2+rn)\, \mu_{1k}^2} = -\frac{(r-n)\, m}{m^2+rn} = \operatorname{tg} \psi$$

и (см. (2.3.2′))

$$ut(l, r) \approx \frac{2\sigma_0 c^2}{El} \sqrt{\frac{m^2+r^2}{m^2+n^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{1k}^2} \sin(mt + \psi) =$$

$$= \frac{2\sigma_0 c^2}{El} \sqrt{\frac{m^2+r^2}{m^2+n^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4\lambda^2}} \sin(mt+\psi) =$$

$$= \frac{\sigma_0 l}{E} \sqrt{\frac{m^2+r^2}{m^2+n^2}} \sin(mt+\psi)^{**}. \tag{2.3.4}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае как амплитуда, так и фаза зависят от отношения $\frac{m}{r}$, которое может меняться в достаточно широких пределах ***.

а) Если $\frac{m}{r} \gg 1$, то $\operatorname{tg} \psi \approx \frac{r-n}{m} \approx 0$ и

$$u_{\text{в}}(l, t) \approx \frac{\sigma_0 l}{E} \sin mt.$$

Это — вынужденное колебание абсолютно упругого стержня в том же предложении $\lambda m \ll 1$.

б) Если же $\frac{m}{n} \ll 1$,

то

$$\operatorname{tg} \psi \approx \frac{(r-n)\, m}{rn} \approx 0,$$

$$u_{\text{в}}(l, t) \approx \frac{\sigma_0 lr}{En} \sin mt. \tag{2.3.6}$$

Таким образом, имеем для общего случая $m\lambda \ll 1$ простую формулу (2.3.4), и для двух крайних случаев: больших и малых частот — еще более простые — (2.3.5) и (2.3.6) соответственно.

2) Случай больших частот. Резонанс.

Предположим теперь, что

$$\lambda m \geqslant 1 \quad \left(\frac{m}{r} \geqslant \frac{1}{\lambda r} \gg 1\right),$$

---

* При этом условии $|S_{1k}| \approx \mu_{1k} = \frac{(2k+1)\pi}{\lambda 2} \gg m$, что и оправдывает заголовок. Не следует, однако, думать, что частота m должна при этом быть очень малой. Так, для образца из стали длиной $l = 50$ *см*, $\lambda \approx 10^{-4}\ \frac{1}{\text{сек}}$, поэтому m может быть порядка 10—10^2 герц.

** Очевидно, что в этом случае действия гармонической силы пренебрежение силами инерции совершенно недопустимо. Однако если так поступить и снова решать квази-статическую задачу, то получится в точности (2.3.4) (см. [9, стр. 207]).

*** См. сноску *.

и положим

$$m = (2\nu + 1 + \theta)\frac{\pi}{2\lambda},$$

где $\nu \geqslant 0$ — некоторое целое число, а $|\theta| \leqslant 1$*.

Из суммы (2.3.3) выделим член с номером $k = \nu$. Для всех оставшихся членов ряда, каково бы ни было $k \neq \nu$, справедливы следующие оценки.

Из (2.2.11′)

$$|S_{1k}|^2 = \mu_{1k}^2 - 2\alpha_{1k}\beta_{1k} = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4\lambda^2} - 2\alpha_{1k}\beta_{1k}$$

следует, что

$$|S_{1k}|^2 - m^2 = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4\lambda^2} - m^2 - 2\alpha_{1k}\beta_{1k} = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\left[\left(k - \nu - \frac{\theta}{2}\right)\left(k + \nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha_{1k}\beta_{1k}\lambda^2}{\pi^2}\right] \approx \frac{\pi^2}{\lambda^2}\left(k - \nu - \frac{\theta}{2}\right)\left(k + \nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right) = \mu_{1k}^2 - m^2,$$

так как $\left|k - \nu - \frac{\theta}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}$, а $\alpha_{1k}\lambda \ll 1$, $\beta_{1k}\lambda \ll 1$.

Для тех же $k \neq \nu$ и по тем же причинам

$$\left.\begin{aligned} D_{1k} &= (|S_{1k}|^2 - m^2)^2 + 4m^2\beta_{1k}^2 \approx (\mu_{1k}^2 - m^2)^2 \\ N_{1k} &= (m^2 + rn)(\mu_{1k}^2 - m^2) - m^2 r(r-n) \approx m^2(\mu_{1k}^2 - m^2) \\ M_{1k} &= -(r-n)\mu_{1k}^2 m \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.7)$$

Далее,

а) при

$$\mu_{1k} \geqslant 2m,$$

$$\mu_{1k}^2 - m^2 \geqslant \frac{3}{4}\mu_{1k}^2,$$

$$|\operatorname{ctg}\psi_{1k}| = \frac{|N_{1k}|}{|M_{1k}|} = \frac{|(m^2 + rn)(\mu_{1k}^2 - m^2) - m^2 r(r-n)|}{m(r-n)\mu_{1k}^2} \geqslant \frac{(m^2 + rn)\,3}{(r-n)\,4m} - \frac{mr}{\mu_{1k}^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m}{r-n}\cdot\frac{3}{4} - \frac{mr}{\mu_{1k}^2} = \frac{3}{4}\,\frac{m}{r-n}\left\{1 - \frac{4r(r-n)\,4\lambda^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right\} = \frac{3m}{4(r-n)}\{1 - 0(\lambda^2 r^2)\} =$$

$$= 0\left(\frac{m}{r}\right) = 0\left(\frac{1}{\lambda r}\right);$$

б) при

$$\mu_{1k} < 2m \quad (\nu \neq k,\ |\theta| \leqslant 1)$$

$$|\mu_{1k} - m| = |2k - 2\nu - \theta|\,\frac{\pi}{2\lambda} \geqslant \frac{\pi}{2\lambda},$$

$$|\mu_{1k}^2 - m^2| > \frac{\pi m}{2\lambda} \gg r(r-n),$$

$$\mu_{1k}^2(r-n) < 4m^2(r-n).$$

Значит

$$|\operatorname{ctg}\psi_{1k}| = \frac{|N_{1k}|}{|M_{1k}|} \geqslant \frac{|(m^2 + rn)|\,\mu_{1k}^2 - m^2| - m^2 r(r-n)|}{m(r-n)\mu_{1k}^2} >$$

$$> \frac{m^2\,[|\mu_{1k}^2 - m^2| - r(r-n)]}{m(r-n)\mu_{1k}^2} > \frac{\pi}{8\lambda(r-n)}\left\{1 - \frac{r(r-n)\,2\lambda}{\pi m}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{8\lambda(r-n)}\{1 - 0(\lambda^2 r^2)\} = 0\left(\frac{1}{\lambda r}\right).$$

---

* При $\nu = 0$ считаем $\theta \geqslant -\frac{1}{4}$.

Таким образом, при всех $k \neq \nu$

$$\frac{|N_{1k}|}{|M_{1k}|} = 0\left(\frac{1}{\lambda r}\right),$$

а поэтому можно из суммы (2.3.3) отбросить * слагаемые вида $M_{1k}\cos mt$. Вместо (2.3.3) можно теперь (см. (2.3.7) написать)

$$u_{\text{в}}(l, t) = \frac{2\sigma_0 l}{D\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{D_{1k}(m^2+\alpha_{1k}^2)}\{M_{1k}\cos mt + N_{1k}\sin mt\} \approx$$

$$\approx \frac{2\sigma_0 l}{E\lambda^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^2(\mu_{1k}^2 - m^2)\sin mt}{m^2(\mu_{1k}^2 - m^2)^2} - \frac{m^2(\mu_{1\nu}^2 - m^2)\sin mt}{m^2(\mu_{1\nu}^2 - m^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m^2 D_{1\nu}}(M_{1\nu}\cos mt + N_{1\nu}\sin mt)\right\}. \qquad (2.3.8)$$

Имеем (см. (2. 3. 7)):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{1k}^2 - m^2} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 - \frac{4\lambda^2 m^2}{\pi^2}} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{4\cdot\frac{2\lambda m}{\pi}}\operatorname{tg}\lambda m =$$

$$= \frac{\lambda}{2m}\operatorname{tg}(2\nu + 1 + \theta)\frac{\pi}{2} = -\frac{\lambda^2}{\pi(2\nu+1+\theta)}\operatorname{ctg}\frac{\theta\pi}{2};$$

$$\mu_{1\nu} - m^2 = -\theta\left(2\nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right)\frac{\pi^2}{2\lambda^2};$$

$$N_{1\nu} = (m^2 + rn)(\mu_{1\nu}^2 - m^2) - m^2 r(r-n) \approx m^2(\mu_{1\nu}^2 - m^2) - m^2 r(r-n) =$$

$$= -\frac{m^2}{\lambda^2}\left[2\theta\left(2\nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right)\frac{\pi^2}{4} + \lambda^2 r(r-n)\right];$$

$$D_{1\nu} = (|s_{1\nu}|^2 - m^2)^2 + 4m^2\beta_{1k}^2 = [(\mu_{1\nu}^2 - 2\alpha_{1k}\beta_{1k}) - m^2]^2 + 4m^2\beta_{1k}^2 \approx$$

$$\approx [\mu_{1\nu}^2 - m^2 - n(r-n)]^2 + m^2(r-n)^2 = \frac{1}{\lambda^4}\left\{\left[\frac{\pi^2}{2}\theta\left(2\nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right) + n(r-\right.\right.$$

$$\left.\left. - n)\lambda^2\right]^2 + (2\nu + 1 + \theta)^2\frac{\pi^2}{4}(r-n)^2\lambda^2\right\} \approx \frac{\pi^2}{4\lambda^4}\left\{\pi^2\theta^2\left(2\nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + (2\nu + 1 + \theta)^2(r-n)^2\lambda^2\right\}.$$

Теперь вместо (2.3.8) можно написать

$$u_{\text{в}}(l, t) \approx \frac{2\sigma_0 l}{E\lambda^2}\left\{\left[-\frac{\lambda^2}{(2\nu+1+\theta)\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2} + \frac{1}{\left(\theta\,(2\lambda+1+\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{2\lambda^2}{\pi^2}\right]\sin mt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{mD_{1\nu}}\left[(r-n)\mu_{1\nu}^2\cos mt + \frac{\pi^2 m}{2\lambda^2}\left[\theta\left(2\nu + 1 + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{2\lambda^2}{\pi^2}r(r-n)\right]\sin mt\right\} \approx$$

$$\approx \frac{2\sigma_0 l}{Em\lambda}\left\{\left[\frac{2}{\pi\theta}\frac{2\nu+1+\theta}{2\nu+1+\frac{\theta}{2}} - \operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2}\right]\sin mt - \right.$$

$$\left. - \frac{(r-n)\lambda(2\nu+1)^2\cos mt + (2\nu+1+\theta)\left(2\nu+1+\frac{\theta}{2}\right)\pi\cdot\theta\sin mt}{\pi^2\theta^2\left(2\nu+1+\frac{\theta}{2}\right)^2 + \lambda^2(r-n)^2(2\nu+1+\theta)^2}\right\} \qquad (2.3.9)$$

Этот результат можно еще более упростить для следующих частей интервала изменения θ:

а) $|\theta| \gg \lambda r$.

* Напомним, что все приближение сделано с точностью до членов порядка λr.

Тогда можно, очевидно, в числителе второго слагаемого отбросить член с $\cos mt$, а в знаменателе — слагаемое, содержащее λ. Мы получим для этой части интервала

$$u_{\text{в}}(l, t) \approx -\frac{\sigma_0 l}{Em\lambda}\operatorname{ctg}\frac{\pi\theta}{2}\sin mt. \tag{2.3.10}$$

б) $|\theta| \ll 1$.

В этом случае, как нетрудно проверить, первое слагаемое в (2.3.9) можно отбросить и, учитывая далее малость $|\theta|$ во втором слагаемом, найти для малых значений $|\theta|$:

$$u_{\text{в}}(l, t) \approx -\frac{2\sigma_0 l}{Em\lambda}\frac{\pi\theta\sin mt + \lambda(r-n)\cos mt}{\pi^2\theta^2 + \lambda^2(r-n)^2} = \frac{2\sigma_0 l}{Em\lambda}\frac{\sin(mt+\psi_1)}{\sqrt{\pi^2\theta^2+\lambda^2(r-n)^2}}, \tag{2.3.11}$$

где $\psi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\lambda(r-n)}{\pi\theta} + \pi$.

Нетрудно проверить, что резонанс имеет место, когда*

$$|\theta| = 0(\lambda^2 r^2) \approx 0.$$

Тогда (2.3.11) дает

$$\psi_1 = \frac{3\pi}{2}$$

и

$$(u_{\text{в}})_{\text{рез}} \approx -\frac{\sigma_0 l}{2Em\lambda}\frac{1}{\lambda(r-n)}\cdot\cos mt. \tag{2.3.12}$$

По поводу последнего результата сделаем следующее замечание.

1. При условии $\lambda r \ll 1$ резонанс имеет место, когда $\theta \approx 0$, $m = (2\nu+1)\frac{\pi}{2\lambda}$, где $\nu \geqslant 0$ — любое целое число. Следовательно, имеется бесчисленное множество так называемых резонансных пиков амплитуды.

2. Так как амплитуды обратно пропорциональны частотам возмущающей силы, то наибольшая из них отвечает наименьшей резонансной частоте $m = \frac{\pi}{2\lambda}(\nu = 0)$ и равна

$$(u_{\text{в}})_{\max} \approx \frac{\sigma_0 l}{E\pi}\frac{1}{\lambda(r-n)}.$$

Остальные следуют, убывая, как ряд обратных нечетных чисел.

3. Из (2.3.13) видно, что если известен модуль E, то достаточно одного измерения пика амплитуды, чтобы экспериментально определить декремент затухания $\eta = \frac{r-n}{2}$ свободных колебаний.

4. Фаза колебаний при резонансе сдвинута на $\frac{3\pi}{2}$ относительно фазы возмущающей силы.

В заключение заметим, что формула (2.3.4) совместно с (2.35) и (2.36), а формулы (2.3.10) и (2.3.11) совместно с (2.3.12) достаточны, чтобы составить представление о зависимости амплитуды и фазы колебаний от частоты возмущающей силы.

3. Поперечные колебания стержней

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о поперечных колебаниях стержней той же природы, что и в предыдущем.

Сперва составим уравнения, а затем решим некоторые простые задачи поперечных колебаний прямолинейных стержней в тех же предположе-

* Так как (2.3.11) получено отбрасыванием малых членов по θ и λr, то дифференцировать его нельзя.

ниях относительно характера их деформации, которые в случае упругого стержня приводят к известному уравнению

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,\ t), \tag{3.1}$$

где $y(x,\ t)$ — поперечное смещение точек оси стержня (прогиб), I — момент инерции его нормального сечения относительно нейтральной оси, ρ — линейная плотность и E — модуль упругости материала стержня, а $q(x,\ t)$ — поперечная нагрузка, отнесенная к единице длины стержня.

Напомним далее, что это уравнение является следствием следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &EIy'' = -M(x,\ t)\\ &\frac{\partial M}{\partial x} = Q(x,\ t)\\ &\frac{\partial Q}{\partial x} = -q(x,\ t)\end{aligned}\right\}, \tag{3.2}$$

где $M(x,\ t)$ — изгибающий момент, а $Q(x,\ t)$ — поперечная сила в сечении x в момент t.

Последние соотношения позволяют, кроме того, составить граничные условия задачи, которые необходимо добавить к уравнению (3.1), чтобы сделать ее определенной.

Чтобы получить аналогичные уравнения для нашего случая стержня с учетом ползучести и релаксации в форме, принятой в предыдущем параграфе настоящей работы, достаточно повторить все рассуждения технической теории упругого изгиба и только закон Гука заменить в них законом (2.2) *.

Однако, значительно проще будет воспользоваться отмеченной нами на стр. 16 аналогией между уравнениями теории упругости и уравнением движения среды Больцмана, согласно которой L-преобразования (или, что то же, X-преобразования) этих уравнений совпадают, если в уравнениях теории упругости заменить упругие постоянные функциями (1.9) или (1.10).

Но тогда искомые уравнения легко получаются из (3.1) и (3.2), если написать их X-преобразования, заменить в последних модуль упругости E на [24]

$$\mathrm{E}(p) = E\frac{p+n}{p+r} \tag{2.6}$$

и обратить их.

Очевидно поэтому, что последние два соотношения в (3.2), как не зависящие от упругих постоянных, остаются в силе и для нашего случая.

Для получений остальных уравнений напишем их X-изображения. Это будут, очевидно:

$$\mathrm{E}(p)\frac{\partial^4 \overline{y}}{\partial x^4} + \rho p^2\left[\overline{y}(x,\ p) - y_0(x) - \frac{\dot{y}_0(x)}{p}\right] = \overline{q}(x,\ p), \tag{3.1'}$$

$$I\mathrm{E}(p)\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} = -M(x,\ p), \tag{3.2'}$$

где $y_0(x) = y(x,\ 0)$, $\dot{y}_0(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}$.

Искомые уравнения получаются теперь обращением (3.1′) и (3.2′).

---

* Для случая упруго-вязкого стержня Фойхта-Томсона (без релаксации) эти рассуждения провел Хилье в [16]. См. кроме того, [26].

Пусть

$$F(p) \doteq \varphi(t),$$

тогда *

$$\mathrm{E}(p) F(p) = E \frac{p+n}{p+r} F(p) = E\left\{F(p) - (r-n)\frac{p}{p+r}\frac{F(p)}{p}\right\} \doteq$$
$$\doteq E\{\varphi(t) - (r-n) e^{-rt} * \varphi(t)\}.$$

Теперь очевидно, что (3.1′) и (3.2′) дают

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - (r-n) e^{-rt} * \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(x,\ t)}{EI} \quad \left(a^4 = \frac{EI}{\rho}\right), \tag{3.1″}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (r-n) e^{-rt} * \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M(x,\ t)}{EI}, \tag{3.2″}$$

и присоединив к ним последние два соотношения из (3.2)

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -q(x,\ t), \tag{3.2‴}$$

мы получим основное интегро-дифференциальное уравнение 4-го порядка поперечных колебаний стержней с ползучестью и релаксацией рассматриваемого нами типа — (3.1″) и полную систему соотношений (3.2″) и (3.2‴), позволяющих составить необходимые граничные условия.

Мы использовали, таким образом, указанную выше аналогию для составления уравнения задачи. Сейчас мы покажем, как с помощью этой же аналогии разыскать и само решение задачи.

Для этой цели мы рассмотрим задачу, которая и сама по себе, в кругу наших рассмотрений, представляет интерес, так как соответствует опыту по наблюдению явления ползучести при изгибе балок.

3.1. Колебания свободно опертой на две опоры балки с внезапно приложенной к ее середине постоянной сосредоточенной силой P.

Решение этой задачи в случае упругого стержня можно найти в книге А. И. Лурье [24]. X-изображение прогиба балки под силой (в середине пролета длины — $2l$) представлено там следующим рядом **

$$\bar{y}(0,\ p) = \frac{Pl^3}{6EI}\left\{1 - \frac{96}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\frac{p^2}{p^2+\mu_{2k}^2}\right\}, \tag{3.1.1}$$

где $\mu_{2k} = (2k+1)^2\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2$ и, напоминаем, $a^4 = \frac{EI}{\rho}$.

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96},$$

то, как это нетрудно заметить, (3.1.1) можно переписать так:

$$\bar{y}(0,\ p) = \frac{P}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^2+\mu_{2k}^2}. \tag{3.11′}$$

---

* Напомним снова, что $e^{-rt} * \varphi(t) = e^{-rt}\int_0^t e^{r\tau}\varphi(\tau)\,d\tau$.

** Принято, что при $t=0$ $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$.

Чтобы получить изображение того же смещения для нашего случая, достаточно, согласно упомянутой аналогии, заменить в (3.1.1) E на $\mathrm{E}(p) = E\frac{p+n}{p+r}$, значит

$$a^4 = \frac{EI}{\rho} \text{ на } \frac{\mathrm{E}(p)I}{\rho} = \frac{EI}{\rho}\frac{p+n}{p+r} = a^4\frac{p+n}{p+r}$$

и

$$\mu_{2k}^2 = (2k+1)^4\frac{\pi^4 a^4}{(2l)^4} \text{ на } (2k+1)^4\frac{\pi^4 a^4}{(2l)^4}\frac{p+n}{p+r} = \mu_{2k}^2\frac{p+n}{p+r}.$$

Мы получим

$$\bar{y}(0,\ p) = \frac{P}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p+r}{p^2(p+r)+\mu_{2k}^2(p+n)} = \frac{P}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p+r}{Q_{2k}(p)}. \tag{3.1.2}$$

Сравнивая (3.1.2) с (2.2.7) заключаем, что, если в последнем ряде положить $\xi = \lambda$ и вместо $\mu_{1k} = \frac{(2k+1)\pi}{2\lambda}$ взять $\mu_{2k} = (2k+1)^2\frac{\pi^2 a^2}{(2l)^2} = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{\lambda_1}$, где $\lambda_1 = \left(\frac{2l}{a}\right)^2$, мы получим ряд (3.1.2).

Поэтому обращение (3.1.2) можно получить из (2.2.16) автоматически, если там сделать указанную замену, а также у всех параметров, имеющих там индекс* 1, заменить последний на 2. Мы получим

$$y(0,\ t) = \frac{P(2l)^3}{48EI}\frac{r}{n} - \frac{P}{l\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{2k}}\left\{\frac{2\beta_{2k}e^{-\alpha_{2k}t}}{\alpha_{2k}} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-\beta_{2k}t}}{|s_{2k}|^2}\left[A_{2k}\cos\gamma_{2k}t + \frac{B_{2k}}{\gamma_{2k}}\sin\gamma_{2k}t\right]\right\}, \tag{3.1.3}$$

что и дает искомое смещение середины балки, как функцию времени.

Как и в случае растяжения, представляется интересным найти приближение (3.1.3) для случая малых значений параметра** λ_1, r.

Все оценки, приведенные на стр. 194, остаются в силе, если в них подставить μ_{2k} вместо μ_k.

Аналогично (2.2.30) мы легко получим, что

$$y(0,\ t) \approx \frac{P(2l)^2}{48EI}\left\{\frac{r}{n}\left[1 - \frac{r-n}{r}e^{-nt}\right] - \frac{96e^{-\frac{r-n}{2}t}}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{\lambda_1}}{(2k+1)^4}\right. . \tag{3.1.4}$$

Как и в случае продольных колебаний, поперечное смещение балки под действием внезапно приложенной силы состоит из двух частей.

Первая часть, соответствующая первому слагаемому, является, как это нетрудно проверить, решением уравнения квазистатического изгиба балки, получаемого из (3.1″), если отбросить в нем силы инерции.

Вторая же часть, как это очевидно из (3.1.1), представляет собой, как и в (2.2.30), упругие колебания балки около ее оси в положении упругого равновесия, умноженные на $e^{-\frac{r-n}{2}t}$.

Все сказанное относительно (2.2.30), таким образом, полностью относится и к (3.1.4), и поэтому мы настоящую задачу на этом оставляем.

---

* См. условие относительно индексов на стр. 192.

** Следует отметить, что параметр $\lambda_1 r$ несколько больше, чем ранее рассмотренный $\lambda r = \frac{lr}{c}$, однако, он еще настолько мал, что случай — $\lambda_1 r \ll 1$ остается, как нам кажется, практически преобладающим.

3.2. Вынужденные гармонические колебания стержня

В качестве примера непосредственного интегрирования уравнения (3.1″) поперечных колебаний мы рассмотрим следующую задачу, соответствующую эксперименту на определение внутреннего трения при деформации изгиба упоминавшимся выше резонансным методом.

К свободному концу $x = l$ покоящейся консольной балки длины l приложена внезапно в момент $t = 0$ гармоническая сила *

$$P(t) = H \sin mt,$$

где $H = \mathrm{const}$.

Из условия задачи следуют начальные условия, которые очевидны:

$$y(x,\ 0) = 0,\ \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

а также граничные условия, относительно которых заметим, что их значительно проще записать непосредственно для изображения искомой функции прогиба $\overline{y}(x,\ p)$.

Условимся направить ось x от места заделки консоли, совмещенного с началом координат, к свободному концу ее. Тогда граничные условия для изображения $\overline{y}(x,\ p)$, будучи такими же, как и в случае упругого стержня, в которых только модуль упругости E заменен на $\mathrm{E}(p)$, могут быть записаны так (см. (3.2) и (3.2)):

в месте заделки $(x = 0)$

$$\overline{y}(0,\ p) = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \tag{3.2.1}$$

а на свободном конце $(x = l)$

$$\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^3 \overline{y}}{\partial x^3} \equiv -\frac{\overline{Q}(l,\ p)}{\mathrm{E}(p) I} = -\frac{\overline{P}}{\mathrm{E}(p) I} = -\frac{Hm}{I\mathrm{E}(p)} \frac{p}{p^2 + m^2}. \tag{3.2.1′}$$

Учитывая начальные условия задачи и то, что $q = 0$, видим, что уравнение (3.1′) для нашего случая имеет вид

$$I\mathrm{E}(p) \frac{\partial^4 \overline{y}}{\partial x^4} + \rho p^2 \overline{y}(x,\ p) = 0,$$

или

$$\overline{y}\,\mathrm{IV} + \frac{p^2}{a^4} \frac{p + r}{p + n} \overline{y}(x,\ p) = 0 \quad \left(a^4 = \frac{E \cdot I}{\rho}\right). \tag{3.2.2}$$

Уравнение (3.2.2) совместно с граничными условиями (3.2.1) отвечает известной задаче об упругой консоли, лежащей на упругом основании и нагруженной силой $\overline{P}$ на ее свободном конце. Мы можем поэтому воспользоваться готовым решением этой задачи.

Для простоты мы, как и в предыдущей задаче, займемся вычислением колебаний только свободного конца консоли $(x = l)$. Тогда, если обозначить

$$\eta^4 = \frac{1}{4} \frac{p^2}{a^4} \frac{p + r}{p + n} = \frac{1}{4} \frac{\omega^2(p)}{a^4}, \tag{3.2.3}$$

где $\omega(p) = p \sqrt{\dfrac{p + r}{p + n}}$ — то же, что и в параграфе 2, то, как это легко проверить, значение указанного решения для сечения $x = l$ имеет следующий вид:

$$\overline{y}(l,\ p) = \frac{2\overline{P}\eta}{\rho p^2} \frac{\mathrm{sh}\, 2\eta l - \sin 2\eta l}{\mathrm{ch}\, 2\eta l + \cos 2\eta l + 2}. \tag{3.2.4}$$

---

* Аналогичную задачу, но только для упруго-вязкого стержня, рассмотрел Хилье в [6]. См., кроме того, [27].

Нетрудно видеть, что корни знаменателя, попарно симметричные и попарно сопряженные, могут быть представлены в виде

$$\zeta_k \equiv 2\eta_k l = \pm (1 \pm i) z_k,$$

где z_k — последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$\operatorname{ch} z \cos z + 1 = 0. \tag{3.2.5}$$

Очевидно, что вычеты функции

$$\frac{\operatorname{sh}\zeta - \sin\zeta}{\operatorname{ch}\zeta + \cos\zeta + 2}$$

в указанных полюсах равны 1.

Поэтому, как это нетрудно проверить, вместо (3.2.4) можно написать (см. (3.2.3))

$$\bar{y}(l,\ p) = \frac{2\bar{P}\eta}{\rho p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(2\eta l)^3}{(2\eta l)^4 + 4z_k^4} = \frac{4\bar{P}}{\rho p^2 l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\eta^4(p)}{4\eta^4(p) + \left(\frac{z_k}{l}\right)^4} =$$

$$= \frac{4\bar{P}}{\rho l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p + r}{p^2(p + r) + \mu_{3k}^2 (p + n)} = \frac{4Hm}{\rho l} \frac{p}{p^2 + m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p + r}{Q_{3k}(p)}, \tag{3.2.6}$$

где

$$\mu_{3k} = \left(\frac{z_k a}{l}\right)^2.$$

Относительно последовательности z_k заметим, что [25, стр. 234]

$$z_0 = 1{,}875,\quad z_1 = 4{,}694,\quad z_2 = 7{,}855 \approx \frac{5\pi}{2},\quad z_3 = 10{,}996 \approx \frac{7\pi}{2}\ \text{и т. д.}$$

т. е., что начиная уже с $k = 2$, можно считать

$$z_k \approx \frac{2k+1}{2}\pi$$

и, следовательно (см. (3.1.1.)),

$$\mu_{3k} = \left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right] \approx \mu_{2k}.$$

Все же величины, которые зависят от μ_k, мы будем теперь обозначать индексом 3, но помня при этом, что они мало отличаются от тех же величин с индексом 2.

Возвращаясь к (3.2.6), заметим, что если разложить (2.3.1) по полюсам функции $\bar{u}_2(\xi, p)$, положив в последней $\xi = \lambda$, то можно получить с точностью до множителя ряд (3.2.6), в котором только вместо μ_{3k} поставлено μ_{1k}.

С другой стороны, обращение (2.3.1) дано в (2.3.2) и (2.3.3). Поэтому, если в последних положим $\xi = \lambda$, $\frac{2\sigma_0 c^2}{El}$ заменим на $\frac{4H}{\rho l}$ и все индексы 1 заменим на 3, то автоматически получим обращение (3.2.6) в следующем виде:

$$y(l,\ t) = \frac{4Hm}{\rho l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{3k}} \left\{ \frac{2\beta_{3k} e^{-\alpha_{3k} t}}{m^2 + \alpha_{3k}^2} + \frac{e^{-\beta_{3k} t}}{|s_{3k}|^2 \sqrt{D_{3k}}} \left[A_{3k} \sin(\gamma_{3k} t - \varphi_{3k}) - \right.\right.$$

$$-\frac{\beta_{3k}}{\gamma_{3k}}\sin(\gamma_{3k}t+\varphi_{3k})\Big]\Big\}+\frac{4H}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_{3k}\cos mt+N_{3k}\sin mt}{(m^2+\alpha_{3k}^2)D_{3k}}, \qquad (3.2.7)$$

где, повторяем, все величины даны формулами (2.2.14) и (2.3.3), в которых всюду должен быть дописан индекс 3.

Как и в случае продольных колебаний, общее колебание консоли складывается из затухающих колебаний и гармонических. Последние имеют ту же частоту, что и возмущающая сила, но сдвинутую фазу.

Резонанс можно считать наступившим, если при некотором номере k

$$|S_{3k}|^2\equiv\mu_{3k}^2-2\alpha_{3k}\beta_{3k}=m^2.$$

Все рассуждения, проведенные в параграфе 2.3 с целью разыскания приближенных значений вынужденных колебаний при $\lambda r\ll 1$, полностью переносятся и на данный случай при условии $r\lambda_1\ll 1$

$$\left(\lambda_1=\left(\frac{2l}{a}\right)^2 (\text{см. стр. } 77)\right).$$

Мы можем написать автоматически:

1) Приближенное выражение для вынужденных колебаний конца консоли $x=l$, при условии $r\lambda_1\ll 1$ и в области не слишком больших частот, так что $m\lambda_1\ll 1$ (случай далекий от резонанса, см. (2.3.4)):

$$y_{\text{в}}(l,\ t)\approx\frac{4H}{\rho l(m^2+n^2)}\{-(r-n)m\cos mt+(m^2+rn)\sin mt\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{3k}^2}. \qquad (3.2.10)$$

Чтобы просуммировать ряд в (3.2.10), заметим, что, согласно (3.2.6), (3.2.4) и (3.2.3),

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{3k}^2}=\lim_{p\to 0}\frac{\rho l}{4\bar{P}}\frac{n}{r}\bar{y}(l,\ p)=\lim_{\substack{p\to 0\\ \eta\to 0}}\frac{1}{2}\frac{n}{r}\frac{l\eta}{p^2}\frac{\operatorname{sh}2\eta l-\sin 2\eta l}{\operatorname{ch}2\eta l+\cos 2\eta l+2}=$$

$$=\lim_{\substack{p\to 0\\ r\to 0}}\frac{\rho l\eta(p)}{2rp^2}\frac{nl\eta(p)}{2rp^2}\frac{\left(\dfrac{2l\eta}{3}\right)^3}{4}=\frac{l^4}{12a^4}=\frac{l^4\rho}{12EI}.$$

Теперь вместо (3.2.10) можно написать

$$y_{\text{в}}(l,\ t)\approx\frac{Hl^3}{3EI}\sqrt{\frac{m^2+r^2}{m^2+n^2}}\sin(mt-\psi), \qquad (3.2.11)$$

где ψ — дано в (2.3.4), а $\dfrac{Hl^3}{3EI}=f_{cm}$ — прогиб конца упругой консоли под действием силы H, приложенной к ее концу.

2) В диапазоне больших частот, так что $m\lambda_1\gg 1$, можно написать выражение, аналогичное (2.3.5) и позволяющее найти амплитуду при любых значениях этих частот. Мы его, однако, из-за громоздкости опускаем.

Так же, как в параграфе 2.3, найдем, что при резонансе, наступающем, если $m\approx|S_{3\nu}|\approx\mu_{3\nu}=\dfrac{4z_\nu^2}{\lambda_1}$, где $\nu\geqslant 0$ некоторое целое число, будет приближенно

$$y_{\text{в}}(l,\ t)\approx-\frac{(r-n)4H}{\rho lm}\frac{\mu_{3\nu}^2}{m^2(r-n)^2}\cos mt\approx-\frac{4H}{\rho lm(r-n)}\cos mt. \qquad (3.2.12)$$

Отсюда видно снова, что резонансный пик будет наибольшим, если $\nu = 0$, т. е. если (см. выше)

$$m \approx \mu_{30} = \frac{4z_0^2}{\lambda_1} = \frac{4 \cdot 1{,}875^2}{\lambda_1}.$$

Тогда

$$(y_в)_{\max} \approx \frac{4H}{\rho l m (r-n)} = \frac{4H\lambda_1^2}{\rho l \lambda_1 m \cdot \lambda_1 (r-n)} = \frac{4H\left(\frac{2l}{a}\right)^4}{\rho l 4 \cdot 1{,}875^2 \lambda_1 (r-n)} =$$

$$= \frac{Hl^3}{3EI} \cdot \frac{13{,}5}{\lambda_1 (r-n)} = f_{cm} \frac{13{,}5}{\lambda_1 (r-n)}, \tag{3.2.13}$$

где, напоминаем, f_{cm} — статический прогиб упругой консоли.

Число

$$d = \frac{13{,}5}{\lambda_1 (r-n)} \tag{3.2.14}$$

можно назвать коэффициентом динамичности для этого случая изгиба.

3.3. Поперечные колебания упругой балки, лежащей на основании, обладающем ползучестью

При расчете сооружений обычно принимается, что основания из плотного грунта обладают упругими свойствами. Известно, однако, что такие основания обладают выраженными свойствами ползучести. Известно, что сооружение, воздвигнутое на обычном слое грунта в качестве основания продолжает еще долго после его окончания оседать.

Поведение всего сооружения и отдельных его элементов в процессе оседания представляет весьма важную проблему теории сооружений. Возможно, что привлечение к ней теории линейной ползучести, которую мы приняли в этой работе, окажется в каком-то смысле полезным.

Поэтому нам кажется не лишенным интереса рассмотреть некоторые задачи, в которых роль тела, обладающего свойствами ползучести, играет основание. Чтобы сохранить цельным характер настоящей работы, мы продолжаем рассматривать деформацию стержня. Однако в отличие от предыдущего самый стержень будет теперь считаться идеально упругим. Ползучестью же и релаксацией обладает основание, с которым он соприкасается. Таким образом, мы приходим к задаче об упругой балке, лежащей на релаксирующем (и ползучем) основании.

По существу эта задача намного отличается от задач, рассмотренных в этом параграфе. Но как мы увидим, формально она сводится к уравнению, сходному с (3.1), к выводу которого мы и переходим.

Пусть снова $y(x, t)$ — смещение точек оси балки (вниз). Через $R(x, t)$ обозначим реакцию единицы площади основания (вверх). Связь между этими двумя величинами и определяет все свойства основания.

В обычной теории упругого основания* принимается линейная зависимость между ними

$$bKy(x, t) = R(x, t),$$

где b — ширина основания стержня, полагаемая постоянной,

K — коэффициент упругости основания.

Мы же, в согласии со сказанным выше, примем закон, аналогичный (2.2) и (2.3):

$$bKy(x, t) = R(x, t) + (r-n)\, e^{-nt} * R(x, t) \tag{3.3.1}$$

* Это так называемое основание Циммермана-Винклера.

или

$$\frac{R(x,\ t)}{bK} = y(x,\ t) - (r - n)\, e^{-rt} * y(x,\ t). \qquad (3.3.2)$$

Здесь r и n — скорости релаксации и ползучести основания.

Чтобы получить теперь уравнение движения балки, лежащей на такого рода основании и нагруженной активной нагрузкой интенсивности $q(x,\ t)$ на единицу длины, достаточно в правую часть уравнения поперечных колебаний упругой балки (3.1) поставить $q(x,\ t) - R(x,\ t)$ вместо $q(x,\ t)$, где $R(x,\ t)$ дано в (3.3.2).

Мы получим

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) - bK\,[y(x, t) - (r - n)\, e^{-rt} * y(x, t)]$$

или, перенося неизвестную функцию налево и вводя снова обозначение $a^4 = \frac{EI}{\rho}$,

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + bK\,[y(x,\ t) - (r - n)\, e^{-rt} * y(x,\ t)] = \frac{q(x,\ t)}{EI}. \qquad (3.3.3)$$

Это и есть искомое интегро-дифференциальное уравнение колебаний упругой балки на упругом же основании, но с ползучестью и релаксацией.

К этому добавляются обычные граничные условия для упругой балки.

Принимая, как и всюду ранее, что в начальный момент $t = 0$

$$y(x,\ 0) = 0,\ \dot{y}(x,\ 0) = 0$$

и введя обозначение

$$4\zeta^4(p) = \frac{bK}{EI}\frac{p + n}{p + r} + \frac{p^2}{a^4}, \qquad (3.3.4)$$

получим следующее уравнение для изображения $\bar{y}(x,\ p)$

$$\frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial x^4} + 4\zeta^4 y(x,\ p) = \frac{\bar{q}(x,\ p)}{EI}. \qquad (3.3.5)$$

В качестве примера рассмотрим следующую конкретную задачу.

Консоль длины l лежит на указанном основании и нагружена на своем свободном конце $x = l$ внезапно приложенной в момент $t = 0$ и в дальнейшем постоянной силой P. Найти колебания конца этой консоли *.

Так как в этой задаче $q(x,\ t) = 0$, то легко видеть, что уравнение (3.3.5) и граничные условия, которые здесь имеют вид

$$\bar{y}(0,\ p) = 0,\ \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0;\ \left(\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2}\right)_{x=l} = 0,\ \left(\frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial x^3}\right)_{x=l} = -\frac{\bar{Q}(l,\ p)}{EI} = -\frac{P}{EI},$$

с точностью до обозначений совпадают с уравнением (3.2.3) и условиями (3.2.2).

Поэтому мы можем переписать готовое решение (3.2.4), внеся в него лишь очевидные изменения. Мы получим **

$$\bar{y}(l,\ p) = \frac{P}{2\zeta^3 EI}\frac{\operatorname{sh} 2\zeta l - \sin 2\zeta l}{\operatorname{ch} 2\zeta l + \cos 2\zeta l + 2}. \qquad (3.3.7)$$

* Эту задачу мы выбрали ради простоты, так как при ее решении можно будет воспользоваться некоторыми готовыми результатами параграфа 3.2.

** (3.2.4) должно получиться из (3.3.7) после замены $\zeta(p)$ на $\eta(p)$ и E на $\mathrm{E}(p)$, что и выполняется.

Полученное изображение можно представить в виде ряда по его полюсам, аналогично (3.2.6),

$$\overline{y}(l,\ p)=\frac{P}{2\zeta^3EI}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(2\zeta l)^4}{(2\zeta l)^4+4z_k^4}=\frac{4P}{EIl}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4\zeta^4+\left(\frac{z_k}{l}\right)^4}=$$

$$=\frac{4P}{EIl}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{bK}{EI}\frac{p+n}{p+r}+\frac{p^2}{a^4}+\frac{z_k^2}{l^2}}=\frac{4P}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p+r}{(p^2+\mu_{4k})(p+r)+c_1^2(p+n)},\quad (3.3.9)$$

где $c_1^2=\frac{bK}{\rho}$, а z_k и $\mu_{4k}=\mu_{3k}$ — те же, что и в (3.2).

Легко видеть, что корни полиномов из (3.3.9)

$$Q_{4k}(p)=(p^2+\mu_{4k})(p+r)+c_1^2(p+n)$$

обладают свойствами, лишь несущественно отличающимися от свойств корней, скажем, $Q_{3k}(p)$.

Мы снова предположим, что коэффициенты $Q_{4k}(p)$ таковы, что ни один из полиномов не имеет трех вещественных корней. Тогда разложение $\frac{p+r}{Q_{4k}(p)}$ на простые дроби может быть написано по аналогии с (2.2.15)

$$\frac{p+r}{Q_{4k}(p)}=\frac{r}{c_1^2n+r\mu_{4k}}-\frac{2\beta_{4k}}{\Delta_{4k}\alpha_{4k}}\frac{p}{p+\alpha_{4k}}+\frac{A_{4k}p(p+\beta_{4k})+B_{4k}p}{\Delta_{4k}|S_{4k}|^2(p^2+2\beta_{4k}p+|S_{4k}|^2)},$$

где индекс 4 указывает на то, что во всех выражениях, зависящих от корней полиномов $Q_k(p)$, должны быть подставлены корни $Q_{4k}(p)$.

Далее, легко вычисляется

$$\frac{4P}{\rho l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r}{c_1^2n+r\mu_{4k}^2}=\lim_{p=0}\overline{y}(l,\ p)=\frac{P}{2\zeta_0^3EI}\,\frac{\operatorname{sh}2\zeta_0l-\sin 2\zeta_0l}{\operatorname{ch}2\zeta_0l+\cos 2\zeta_0l+2},\quad (3.3.10)$$

где

$$\zeta_0=\lim_{p=0}\zeta(p)=\sqrt[4]{\frac{bKn}{4EIr}}.$$

Подставляя (3.3.9) в (3.3.8) и учитывая (3.3.10), легко найдем оригинал (3.3.8) в следующем виде:

$$y(l,\ t)=\frac{2P\zeta_0}{bK\frac{n}{r}}\,\frac{\operatorname{sh}2\zeta_0l-\sin 2\zeta_0l}{\operatorname{ch}2\zeta_0l+\cos 2\zeta_0l+2}+\frac{4P}{l\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_{4k}}\left\{-\frac{2\beta_{4k}e^{-\alpha_{4k}t}}{\alpha_{4k}}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{-\beta_{4k}t}}{|S_{4k}|^2}\left[A_{4k}\cos\gamma_{4k}t+\frac{B_{4k}}{\gamma_{4k}}\sin\gamma_{4k}t\right]\right\}.\quad (3.3.11)$$

При $t\to\infty$

$$y(l,\ t)\sim\frac{2P\zeta_0}{bK\frac{n}{r}}\cdot\frac{\operatorname{sh}2\zeta_0l-\sin 2\zeta_0l}{\operatorname{ch}2\zeta_0l+\cos 2\zeta l_0+2}.\quad (3.3.12)$$

Нетрудно заметить, что (3.3.12) представляет прогиб конца консоли, лежащей на обычном упругом основании, но коэффициент упругости которого уменьшен в $\frac{r}{n}$ раз, т. е. с новым коэффициентом упругости

$$K_1=K\frac{n}{r}<K.$$

И это естественно, если учесть, что в данном случае можно перейти к пределу $p \to 0$ в самом дифференциальном уравнении (3.3.5), так как $p=0$ является точкой регулярности как коэффициентов уравнения, так и решения, которому отвечает (3.3.7). Очевидно, что при таком переходе к пределу ($p=0$) уравнение (3.3.5) обращается в уравнение равновесия балки, лежащей на обычном упругом основании с коэффициентом упругости K_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюнян. Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. Ю. Н. Работнов. Равновесие упругой среды с последействием, Прикл. мат. и мех., т. XII, в. I, 1948.
3. Ю. Н. Работнов. Некоторые вопросы теории ползучести, Вестн. МГУ, № 10, 1948
4. М. И. Розовский. Техн. физ., XXI, в II, 1951.
5. Г. Кольский. Волны напряжения в твердых телах, И. Л., М., 1955.
6. Л. М. Качанов. Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
7. Л. М. Качанов. Механика пластических сред, Гостехиздат, М.—Л., 1945.
8. А. Р. Ржаницын. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
9. А. Р. Ржаницын. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов, Госстройиздат, М., 1954.
10. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung, Wiener Ber., Bd. 70, 1874.
11. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali della theoria dell'elasticita, Rendiconti della R. Accad. Lincei, 18, 2° Sem , Ser. 5, 1909, 295—301.
12. Volterra V. Equazioni integro-differenziali della elasticita nel caso della isotropica, ibidem, 577—586.
13. Volterra V. Sulle equazioni integro-differenziali, Rendiconti della R. Accad., Lincei, 18, 1° Sem., sem. 5, 1909.
15. А. Ю. Ишлинский. Продольные колебания стержней при наличии линейного закона последействия и релаксации, Прикл. мат. и мех., т. IV, в. I, 1940.
16. Hillier K. W. Proc. Phys. Soc, B. 64. 1951.
17. Dötsch G., Theorie und Anwendung der Laplace—Transformation, Dov. Public; New-Jork, 1943.
18. Е. Тичмарш. Теория функций, Гостехиздат, М —Л., 1951.
19. В. А. Диткин и П. Т. Кузнецов. Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
20. А. Ляв. Математическая теория упругости, ОНТИ, М.—Л., 1935.
21. Hohenemser K. u Prager W., Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. ZAMM, Bd. 12, H. 4, 1932.
22. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы, ДИТВУ, Харьков, 1937.
24. А. И. Лурье. Операционное исчисление, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
25. С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
26. Volterra E. I. Appl. Mech., 18, № 3, 1951.
27. Horio M. a. Onogi S., I. Appl. Phys., № 22, № 7, 1951.
28. Volterra E. J. Appl. Mech. 18, № 4, 1950.

Примечание. Настоящая статья была сдана в редакцию в феврале 1957 года. Поэтому в ней не учтены работы последних трех лет *(12. IV. 1960)*.