УДК 517.95

А. И. ХЕЙФИЦ

КЛАССЫ ХАРДИ И ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

1. В ограниченной области $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 2$ рассмотрим неотрицательную функцию (потенциал) $c(x) \geqslant 0$ такую, что $c \in L^s_{\text{loc}}(\Omega)$, где $s > n/2$ при $n \geqslant 4$ и $s = 2$ при $n = 2, 3$; класс этих функций обозначим $\boldsymbol{E}(\Omega)$. Через $G(x, y)$ обозначим функцию Грина с нулевыми граничными значениями оператора $L_c = -\Delta + c(x) I$, Δ — лапласиан, I — тождественный оператор, определенного первоначально на $C_0^\infty(\Omega)$ и продолженного стандартным способом до самосопряженного на $L^2(\Omega)$. При $|x - y| \to 0$ нормируем G условием $G \sim \gamma_n |x - y|^{2-n}$, когда $n \geqslant 3$, либо $G \sim \gamma_2 \ln(|x - y|^{-1})$, когда $n = 2$. Здесь $\gamma_2 = (2\pi)^{-1}$, $\gamma_n = [(n-2)\sigma_n]^{-1}$ при $n \geqslant 3$, а σ_n — площадь поверхности единичной сферы в $\boldsymbol{R}^n$. Необходимые в дальнейшем свойства G содержатся, например, в [1—3]. Отметим, что если граница $\partial\Omega$ гладкая, то производная по внутренней нормали $\partial G/\partial n \geqslant 0$, суммируема на $\partial\Omega$, а при $s > n$ непрерывна.

Полунепрерывная сверху в Ω функция $u \not\equiv -\infty$ называется обобщенной субгармонической функцией (о. с. ф.) или субфункцией оператора Шредингера L_c, если она принимает значения из промежутка $[-\infty, \infty)$ и в каждой точке $x \in \Omega$ при $0 < r < r(x)$ удовлетворяет обобщенному неравенству для средних значений

$$u(x) \leqslant \int\limits_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial n(y)} d\sigma(y),$$

где G_r — функция Грина L_c в шаре $B(x, y) = \{y : |x - y| < r\}$, сфера $S(x, r) = \partial B(x, r)$, а $d\sigma$ — поверхностная мера на $S(x, r)$. Это определение введено в [4, 5], ряд свойств о. с. ф. изучены в [3; 6—8], систематическому построению теории о. с. ф. посвящены работы [1, 2; 9—13]. Если u и $-u$ одновременно являются о. с. ф., то u называется обобщенной гармонической функцией (о. г. ф.) или c-гармонической функцией. Класс о. с. ф. в области Ω обозначим $SH(c, \Omega)$, а класс о. г. ф. — $H(c, \Omega)$. Очевидно, о. г. ф. непрерывны в области и удовлетворяют обобщенному соотношению средних значений

$$u(x) = \int\limits_{S(x,r)} u(y) \frac{\partial G_r(x, y)}{\partial n(y)} d\sigma(y).$$

Этот интеграл естественно назвать обобщенным или c-интегралом Пуассона.

Мы изучаем граничное поведение c-интеграла Пуассона для полупространства и связанные с этим граничные свойства о. г. ф. в полупространстве. В частности, получено обобщение на о. г. ф. теоремы Фату о существовании почти всюду граничных значений ограниченных аналитических функций. Далее для о. г. ф. в полупространстве введены аналоги классов Харди H^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, получено представление функций из этих классов с помощью c-интегралов Пуассона по границе полупространства.

В рассуждениях мы во многом следовали монографии [14]. Значки ▲ и ▼ обозначают, соответственно, начало и конец доказательств.

2. Обозначим $\Omega = \boldsymbol{R}_+^{m+1} = \{X = (x, \quad x_{m+1}) : x \in \boldsymbol{R}^m, \quad x_{m+1} > 0\}$, $m \geqslant 1$ и $E = \partial\Omega = \boldsymbol{R}^m$. Через $\Gamma_\alpha(\xi)$, где $\alpha > 0$ фиксировано, обозначим конус $\{(x, \ x_{m+1}) \in \Omega : |x - \xi| < \alpha x_{m+1}\}$ с вершиной в точке $\xi \in E$. Отметим, что если не оговорено иное, то нормы $\|\cdot\|$ берутся в $L^p(E)$. В этом пункте мы переносим на о. г. ф. следующие известные утверждения [14].

Пусть u — (обычная) гармоническая функция в Ω. Если при некотором P, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ нормы $\|u(\cdot, \ x_{m+1})\|$ ограничены для $0 < x_{m+1} < \infty$, то u является интегралом Пуассона функции $f \in L^p(E)$ при $p > 1$ и интегралом Пуассона борелевской меры при $p = 1$, т. е.

$$u(X) = \int_E P(x_{m+1}, \ x - y) f(y)\, dy, \ 1 < p \leqslant \infty;$$

$$u(x) = \int_E P(x_{m+1}, \ x - y)\, d\mu(y), \ p = 1.$$

Причем

$$\int_E [1 + |y|^{m+1}]^{-1} |f(y)|\, dy < \infty;$$

$$\int_E [1 + |y|^{m+1}]^{-1} |d\mu(y)| < \infty,$$

где $P(x_{m+1}, y) = \gamma_{m+1} x_{m+1} [x_{m+1}^2 + |y|^2]^{-(m+1)/2}$ — гармоническое ядро Пуассона для Ω.

Пусть u — интеграл Пуассона функции $f \in L^p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда почти для всех точек x, $\xi \in E$ существуют пределы (напомним, что всегда $X = (x, \ x_{m+1})$)

$$\lim_{x_{m+1} \to 0} u(x) = f(x); \quad \lim_{\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \to \xi} u(X) = f(\xi);$$

если $p < \infty$, то существует предел

$$\lim_{x_{m+1} \to 0} \|u(X) - f(x)\| = 0.$$

Наконец, при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливы неравенства

$$\sup_{x_{m+1} > 0} |u(X)| \leqslant (Mf)(x), \ \forall x \in E;$$

$$\sup_{X \in \Gamma_\alpha(\xi)} |u(X)| \leqslant A_\alpha (Mf)(\xi), \ \forall \xi \in E,$$

где A_α — постоянная, зависящая от раствора конуса и размерности пространства;

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} (nr^{-n}(\sigma_n)^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \text{ — максимальная функция.}$$

В формулировках наших результатов важную роль играет функция Грина $G(X, Y)$ оператора L_c в полупространстве Ω. Ее легко построить как предел функций Грина ограниченных областей, исчерпывающих Ω изнутри [11]. Как известно (см., например, [1, 2]), $G(X, Y) \leqslant g(X, Y)$ — функции Грина лапласиана, откуда

$$\frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} \leqslant P(x_{m+1},\ x-y). \qquad (1)$$

Заметим, что формулируя результаты о представимости c-интегралом Пуассона, мы фактически решаем некоторую задачу Дирихле для оператора L_c. Однако известно [8], что если потенциал $c(X)$ достаточно быстро растет при приближении X к границе области, то эта задача Дирихле может не иметь решения. Поэтому приходится делать дополнительные предположения, ограничивающие рост потенциала вблизи границы.

Пусть $c \in \boldsymbol{E}(\Omega)$ и точка $\xi \in E$; будем писать $c \in \boldsymbol{E}(\xi, \Omega)$, если существует такая функция $Q(t)$, определенная при $0 < t < t(\xi)$, что $c(X) \leqslant Q(|X-\xi|)$ при $X \in \Omega$, $|X-\xi| < t(\xi)$, причем $\int_0^{t(\xi)} Q(t)\,dt < \infty$. Далее предполагается, что $c \in \boldsymbol{E}(\xi, \Omega)$ почти всюду на E, т. е. для всех ξ из множества полной меры $E' \subset E$. Этот класс потенциалов обозначим $\boldsymbol{E}_1(\Omega)$.

Назовем c-интегралом Пуассона для полупространства интеграл

$$u(X) = \int_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} f(y)\,dy, \qquad (2)$$

где dy — m-мерная лебегова мера на E. Его свойства частично изучены в [2, 9, 11]. Далее рассмотрим его граничное поведение.

Теорема 1. *Пусть $u(X)$ — интеграл (2), где функция $f \in L^p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $c \in \boldsymbol{E}_1(\Omega)$. Тогда имеет место следующее.*

1⁰. Интеграл сходится абсолютно, и для всех точек $x,\ \xi \in E$ выполняются неравенства $\sup\limits_{x_{m+1}>0} |u(X)| \leqslant (Mf)(x)$, $\sup\limits_{X \in \Gamma_\alpha(\xi)} |u(X)| \leqslant A_\alpha \times (Mf)(\xi)$, где постоянная A_α зависит лишь от α и m.

2⁰. Для почти всех $x,\ \xi \in E$ существуют пределы $\lim\limits_{x_{m+1}\to 0} u(X) = f(x)$;

$$\lim_{\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \to \xi} u(X) = f(\xi).$$

3⁰. Если $p < \infty$, то существует предел

$$\lim_{x_{m+1}\to 0} \| u(X) - f(x) \| = 0.$$

▲ Утверждение 1⁰ непосредственно следует из (1) и приведенного выше аналогичного неравенства для гармонических функций.

Для доказательства 2^0 возьмем такую точку $\xi \in E$ из лебегова множества f, что $c \in \boldsymbol{E}(\xi, \Omega)$ — эти точки образуют множество полной меры на E, причем $|f(\xi)| < \infty$. Преобразуем разность

$$u(X) - f(\xi) = \int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} [f(y) - f(\xi)]\, dy +$$
$$+ f(\xi)\left[\int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy - 1\right] = \int\limits_{|y-\xi|<\delta} + \int\limits_{|y-\xi|\geqslant\delta} +$$
$$+ f(\xi)\left[\int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy - 1\right] \equiv I_1 + I_2 + I_3. \quad (3)$$

Из предположения $c \in \boldsymbol{E}(\xi, \Omega)$ следует, что ξ — c-регулярная граничная точка [11], поэтому о. г. ф.

$$u_1(X) \equiv \int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy \to 1$$

при $\Gamma_\alpha(\xi) \ni X \to \xi$ как решение задачи Дирихле для оператора L_c в Ω с граничными данными 1. Значит $\lim\limits_{X\to\xi} I_3 = 0$. Соотношения $\lim\limits_{X\to\xi} I_1 = \lim\limits_{X\to\xi} I_2 = 0$ доказываются с учетом (1) и уже имеющегося утверждения 1^0 аналогично случаю $c(X) = 0$ [14]. Если $\xi = x$ и вместо стремления $X \to \xi$ по некасательному конусу $\Gamma_\alpha(\xi)$ рассматривать стремление $X = (x, x_{m+1}) \to x$ по нормали (при $x_{m+1} \to 0$), то рассуждения не меняются. Утверждение 2^0 доказано.

Для доказательства 3^0 запишем равенство (3) при $x = \xi$. По принципу максимума

$$\left|\int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy - 1\right| = 1 - \int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy \leqslant 1$$

для всех $x \in E$, откуда $|I_3| \leqslant |f|$, т. е. I_3 мажорируется суммируемой на E функцией, не зависящей от x_{m+1}. По теореме о мажорированной сходимости

$$\lim_{x_{m+1}\to 0} \|I_3\| = \left\{\int\limits_E |f(x)|^p \lim_{x_{m+1}\to 0}\left[1 - \int\limits_E \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}\, dy\right]^p dx\right\}^{1/p} = 0.$$

Наконец,

$$\|I_1 + I_2\| \leqslant \left\{\int\limits_E |f(y) - f(x)|^p [P(x_{m+1}, x - y)]^p\, dy\right\}^{1/p} =$$
$$= \left\{\int\limits_E |f(y + x) - f(x)|^p [P(x_{m+1}, y)]^p\, dy\right\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_E \|f(y + \cdot) - f(\cdot)\| P(x_{m+1}, y)\, dy \to 0$$

при $x_{m+1} \to 0$ и $p < \infty$ [14, с. 78] ▼

Замечание. По сравнению с классическим случаем $c(X) = 0$ новым моментом в доказательстве является появление в (3) слагаемого I_3.

то связано с тем, что c-ядро Пуассона $\frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)}$ не является аппроксимативной единицей. Именно при оценке I_3 используется дополнительное предположение о потенциале, благодаря которому почти все граничные точки Ω оказываются регулярными относительно оператора L_c.

3. Теперь мы обычным способом введем для о. г. ф. в полупространстве Ω аналоги классов Харди H^p. Через $H^p(c)$ обозначим совокупность тех о. г. ф. $u \in H(c, \Omega)$, для которых

$$\|u\|_{H^p(c)} = \sup_{0<x_{m+1}<\infty} \|u(X)\| < \infty.$$

Заметим, что вопрос о монотонности и выпуклости норм $\|u(X)\|$ в случае о. г. ф. требует дополнительного исследования, случай сферических средних рассмотрен в [2, 4].

Теорема 2. *Пусть* $c \in \boldsymbol{E}_1 \Omega$ *и* $u \in H(c, \Omega)$. *Для того чтобы функция u была ограниченной в полупространстве Ω, т. е. $u \in H^\infty(c)$, необходимо и достаточно, чтобы u допускала представление c-интегралом Пуассона (2) с плотностью $f \in L^\infty(E)$.*

▲ Существование, ограниченность и c-гармоничность интеграла (2) следуют из [2, теорема 2.5.1] и теоремы 1 выше, поэтому нам осталось доказать необходимость.

Пусть $|u(X)| \leqslant M$ в Ω. Положим $f_k(x) = u(x, 1/k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — по условию, это ограниченные и непрерывные]2] функции. Определим функции

$$u_k(X) = \int\limits_E f_k(y) \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} dy, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где G_k — функция Грина оператора L_{c_k} со «сдвинутым» потенциалом $c_k(X) = c(x, \ x_{m+1} + 1/k)$. Тогда $u_k \in H(C_k, \ \Omega)$. Введем функции $\Delta_k(X) = u(x, x_{m+1} + 1/k) - u_k(X) \in H(C_k \Omega)$. Очевидно, что $|\Delta_k(X)| \leqslant 2M$. Непрерывность u_k вплоть до границы и равенство $u_k(x, 0) = f_k(x)$ вне полярного множества на E при условии $c \in \boldsymbol{E}_1(\Omega)$ доказаны в [11], и поэтому $\Delta_k(x) = 0$ на E вне полярного множества. Применяя к функциям $\pm \Delta_k(X)$ в Ω теорему Фрагмена — Линделефа [ ] (для полупространства критический показатель равен 1), получаем, что $\Delta_k(X) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, для всех $X \in \Omega$, т. е.

$$u(x, \ x_{m+1} + 1/k) = \int\limits_E f_k(y) \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} dy.$$

Теперь аналогично [14, с. 240] найдем функцию $f \in L^\infty(E)$ как слабый предел последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и запишем

$$u(x, \ x_{m+1} + 1/k) = \int\limits_E f_k(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy -$$

$$- \int\limits_E f_k(y) \left\{ \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)} \right\} dy.$$

Используя (1), получим, что первый интеграл здесь стремится к $\int\limits_E f(y)\frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}dy$ при $k\to\infty$. Чтобы оценить второй интеграл, заметим, что G_k — это функция Грина оператора L_c в полупространстве $\Omega_k = R^m \times (1/k, \infty)$, и поэтому $\frac{\partial G_k}{\partial n}\to\frac{\partial G}{\partial n}$ при $k\to\infty$ монотонно, причем

$$\left|\frac{\partial G}{\partial n}-\frac{\partial G_k}{\partial n}\right| \leqslant \frac{\partial g}{\partial n}+\frac{\partial g_k}{\partial n} \leqslant 2\frac{\partial g}{\partial n} \in L^1(E).$$

По теореме о мажорированной сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_E f_k(y)\left[\frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)}-\frac{\partial G_k(X, y)}{\partial n(y)}\right]dy = 0,$$

и теорема доказана полностью ▼

Распространим это утверждение на все конечные значения $p \geqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть $c \in E_1\Omega$ и $u \in H(c, \Omega)$. Для того чтобы $u \in H^p(c)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы и была представима с-интегралом Пуассона (2) с плотностью $f \in L^p(E)$ при $p>1$, либо с борелевской мерой μ при $p=1$. При этом* $\|u\|_{H^p(c)} = \begin{cases}\|f\|, & 1<p\leqslant\infty,\\ \|d\mu\|, & p=1.\end{cases}$

▲ Мы уже отмечали, что *c*-интеграл Пуассона, в том числе и по мере, является с-гармонической функцией, а принадлежность его классам $H^p(c)$ следует из (1) и соответствующего утверждения для случая $c=0$ [14, гл. 7]. При $p=\infty$ утверждение сводится к предыдущей теореме, и нам осталось доказать необходимость при $p<\infty$.

Итак, пусть $u\in H^p(c)$, $1\leqslant p<\infty$. Зафиксируем точку $X=(x, x_{m+1})\in\Omega$. По определению о.г.ф.

$$u(X) = \int\limits_{S(X,\, \alpha x_{m+1})} u(Y)\frac{\partial G_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)}d\sigma(Y), \tag{4}$$

где α — постоянная, $0<\alpha\leqslant 1$; G_α — функция Грина оператора L_c в шаре $B(X, \alpha x_{m+1})$. Заметим, что при всех $\alpha\in(0,1]$ этот шар лежит в «полосе» $E\times(0,2x_{m+1})$. Так как $\partial G_\alpha/\partial r \geqslant 0$, из (4) получаем

$$u(X) \leqslant \int\limits_{S(X,\, \alpha x_{m+1})} |u(Y)|\frac{\partial G_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)}d\sigma(Y) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S(X,\, \alpha x_{m+1})} |u(Y)|\frac{\partial g_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)}d\sigma(Y),$$

где g_α — функция Грина лапласиана в том же шаре. Вместе с аналогичным неравенством для $-u$ приходим к оценке

$$|u(X)| \leqslant \int\limits_{S(X,\, \alpha x_{m+1})} |u(Y)|\frac{\partial g_\alpha(X, Y)}{\partial n(Y)}d\sigma(y) =$$

$$= \sigma_{m+1}^{-1}(\alpha x_{m+1})^{-m}\int\limits_{S(X,\, \alpha x_{m+1})} |u(y)|\,d\sigma(y).$$

Теперь по неравенству Гельдера

$$|u(X)| \leqslant (\sigma_{m+1}(\alpha x_{m+1})^m)^{-1/p} \|u\|_{L^p(S(X,\,\alpha x_{m+1}))},$$

откуда $|u(x)|^p \sigma_{m+1}(\alpha x_{m+1})^m \leqslant \int\limits_{S(X,\,\alpha x_{m+1})} |u(y)|^p d\sigma(Y)$. Проинтегрируем это неравенство по α от 0 до 1:

$$|u(X)|^p \leqslant (m+1)\sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int\limits_{B(X,\,x_{m+1})} |u(Y)|^p dy\, Y \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)\sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int\limits_{E\times(0,2x_{m+1})} |u(Y)|^p dy\, Y =$$

$$= (m+1)\sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{-m} \int\limits_0^{2x_{m+1}} \|u(\cdot,\ t)\|^p dt \leqslant 2(m+1)\sigma_{m+1}^{-1} x_{m+1}^{1-m} \|u\|^p_{H^p(c)}.$$

Итак, $|u(x)| \leqslant [2(m+1)/\sigma_{m+1}]^{1/p} x_{m+1}^{(1-m)/p} \|u\|_{H^p(c)}$, т.е. функция u ограничена в каждом полупространстве Ω_k, $k=1, 2, \ldots$. Окончание доказательства такое же, как в предыдущей теореме. ▼

4. Здесь мы рассмотрим граничное поведение о.г.ф. из классов $H^p(c)$. Из теорем 1 и 3 непосредственно следует

Теорема 4. *Пусть $c \in \boldsymbol{E}_1(\Omega)$ и $u \in H^p(c)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (в частности, пусть u — ограниченная о.г.ф. в Ω). Тогда почти всюду на E функция u имеет некасательные предельные значения: существует $\lim\limits_{\Gamma_\alpha(\xi)\ni X\to\xi} u(X) = f(\xi) \in L^p(E)$ для каждого $\alpha > 0$ и почти всех $\xi \in E$. При $p=1$ функция f определяется из лебегова разложения меры μ, соответствующей функции $u \in H^1(c)$: $d\mu(y) = f(y)\,dy + d\lambda(y)$, где $d\lambda$ — сингулярная компонента (относительно лебеговой меры) и $f \in L^1(E)$.*

Рассмотрим далее локальный вариант теоремы Фату. Нам понадобится

Лемма 1. *Для произвольного компакта $K \subset E$ обозначим $K_h = \bigcap\limits_{\xi\in K} \Gamma_\alpha^h(\xi)$, где $\Gamma_\alpha^h(\xi) = \Gamma_\alpha(\xi) \cap \{E \times (0, h)\}$ — усеченные конусы. При $c \in \boldsymbol{E}_1(\Omega)$ рассмотрим о.г.ф. $u \in H(c,\ \Omega)$, такую, что $|u(X)| \leqslant 1$ при $X \in K_h$. Тогда для почти всех $\xi \in K$ существует предел $\lim u(X)$ при $K_h \ni X = (x,\ x_{m+1}) \to \xi$.*

▲ Вначале получим для u представление в виде суммы $u = \varphi + \psi$, где $\varphi \in H^\infty(c)$ (ср. [14, с. 242—244]). Для этого положим

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} u(x,\ 1/k) \text{ при } (x,\ 1/k) \in K_h, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

и

$$\varphi_k(X) = \int\limits_E \varphi_k(y) \frac{\partial G(X,\ y)}{\partial n(y)}\, dy,\ k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Функции ψ_k определим соотношением $u(x,\ x_{m+1}+1/k) = \varphi_k(X) + \psi_k(X)$. Заметим, что $\varphi_k(X) \in H(c,\ \Omega)$. Так как функции $\varphi_k(X)$ равномерно ограничены на E по L^1-норме (нормы $\|\varphi_k\|_{L^1(E)} \leqslant 1$, $k=1,\ 2,\ \ldots$), то последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ слабо сходится к некоторой функции $\varphi \in L^1(E)$, причем $\|\varphi\|_{L^1(E)} \leqslant 1$. Положим

$$\varphi(X) = \int_E \varphi(y) \frac{\partial G(X, y)}{\partial n(y)} dy.$$

Для некоторой подпоследовательности k' $\varphi_{k'}(X) \to \varphi(X)$ уже поточечно в Ω, и в то же время $u(x, x_{m+1} + 1/k) \to u(X)$ при $k \to \infty$. Таким образом, $\psi_{k'}(x)$ сходится при $k' \to \infty$ поточечно в Ω к некоторой функции $\psi(X)$, причем $u(X) = \varphi(X) + \psi(X)$. По построению $\varphi(X) \in H^{\infty}(c)$, следовательно, в силу теоремы 4 $\varphi(X)$ почти всюду на E имеет некасательные предельные значения.

Теперь покажем, что функция $\psi(X)$ всюду на K имеет нулевые некасательные предельные значения. Для этого используем построенную в [14, с. 244] неотрицательную гармоническую функцию $H(X)$, $X \in \Omega$. Для нее выполняется соотношение $\Delta H - c(X) H = -c(X) H \leqslant 0$, следовательно, H является c-суперфункцией в Ω. Но по построению $\psi \in H(c, \Omega)$, значит, $|\psi| \in SH(c, \Omega)$, и разность $|\psi| - H$ оказывается c-субфункцией.

Далее, так как $|u| \leqslant 1$ и $|\varphi_k| \leqslant 1$, то $|\psi(X)| \leqslant 2$ всюду в K_h. Однако мы показали, что $\lim\limits_{X\to\xi} \psi(X) = \lim\limits_{X\to\xi} (u(X) - \varphi(X)) = 0$ при $\xi \in K$, а с другой стороны, $H(X) \geqslant 2$ на $\partial K_h \setminus E$ [14, с. 244]. Теперь из принципа максимума следует оценка $|\psi(X)| \leqslant H(X)$ всюду в K_h, откуда $\lim\limits_{X\to\xi} |\psi(X)| \leqslant \lim\limits_{X\to\xi} H(X) = 0$, $\xi \in K$, что влечет существование предела $\lim\limits_{X\to\xi} u(X) = \lim\limits_{X\to\xi} \varphi(X)$ для почти всех $\xi \in K$. ▼

Из леммы 1 и леммы [14, с. 242], которая от гармоничности или c-гармоничности не зависит, с помощью рассуждений, аналогичных случаю $c(X) = 0$, получаем следующий локальный вариант теоремы Фату для о.г.ф. При $c = 0$ этот результат принадлежит Кальдерону [14, гл. 7]. Напомним, что функция u называется нетангенциально ограниченной в точке $\xi \in E$, если $\sup |u(X)| < \infty$ для точек X из какого-нибудь усеченного конуса $\Gamma_\alpha^h(\xi)$.

Теорема 5. *Пусть $c \in \boldsymbol{E}_1(\Omega)$ и $u \in H(c, \Omega)$. Если u нетангенциально ограничена в точках K, то она имеет нетангенциальные пределы почти для всех $\xi \in K$.*

5. В заключение сделаем несколько замечаний. Аналогичные результаты справедливы для о.г.ф. в шаре. Далее вместо интегралов (2) можно рассмотреть интегралы

$$U(X) = \int_E k(X, y) f(y) dy, \tag{5}$$

где ядро Ķ не связано, вообще говоря, с каким-либо дифференциальным оператором, и при некоторых предположениях относительно этого ядра изучить граничное поведение интегралов (5), обобщающих как интегралы (2), так и общие интегралы свертки, рассмотренные в [15]. Эти результаты будут опубликованы отдельно.

писок литературы: 1. *Левин Б. Я., Хейфиц А. И.* Асимптотическое поведение убфункций оператора Шредингера в n-мерном конусе // Докл. АН СССР, 1988. 01, № 3. С. 540—543. 2. *Хейфиц А. И.* Субфункции оператора Шредингера. Ч. . Ростов н/Д, 1988. 137 с. Деп. в ВИННТИ 19.10.88., № 7544 В88. 3. *Stampachia G.* Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre coefficients discontinus // Ann. Inst Fourier. 1965. **15**, № 1. P. 189—257. *Myrberg L. I.* Über subelliptische Funktionen // Suomalais tied. toim. 1960. Ser. I, № 290. S. 1—9 5. *Dinghas A.* Über einige Konvexitats fragen bei partiellen ifferential gleichungen vom Sturmschen typus // Math Ann. 1964. **155**, № 5 S. 97—427. 6. *Herve R.-M., Herve M.* Les fonctions surharmoniqus associées á un perateur elliptique du second ordre á coefficients discontinus // Ann. Inst. Fouier. 1969. **19**, № 1. P 305—359. 7. *Maeda F.-Y.* Boundary value problems for he equation $\Delta u - qu = 0$ with respect to an ideal boundary // J.Sei. Hiroshima niv. 1968. Ser. A. Div. 1. **32**, № 1. P. 85—146. 8. *Maeda F.-Y.* On regularity boundary points for Dirichlet problems of the equation $\Delta u = qu$ $(q \geqslant 0)$ // iroshima Math.J. 1971. **1**, № 2. P. 373—404. 9. *Хейфиц А. И.* Субфункции ператора Шредингера. Ч. 2. Ростов н/Д, 1989. 42 с. Деп. в ВИНИТИ 09.01.89, 199-В89. 10 *Руссаковский А. М.* Об асимптотическом поведении субфункций ператора Шредингера конечного нижнего порядка // Сиб. мат. журн. 1989. **30**, 4. С. 160—170. 11. *Хейфиц А. И.* Субфункции оператора Шредингера. Ч. 3 стов н/Д, 1990. 101 с. Деп. в ВИНИТИ 26.06.90. 12. *Хейфиц А. И.* Канонические представления обобщенных субгармонических функций // Изв. вузов. Сер. т. 1990. № 2. С. 92—94. 13. *Хейфиц А. И.* Распределение значений и предвления обобщенных субгармонических функций. Докл. АН СССР. 1990. **314**, 3. С. 568—572. 14. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные йства функций. М., 1973. **342** с. 15 *Fefferman C., Stein E. M.* H^p-spaces of eral variables // Acta Math. 1972, **129**, № 3—4. P. 137—193.

Поступила в редколлегию 08.10.90